

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA AMBIENTAL

**MODELAGEM E SIMULAÇÕES DOS FLUXOS DE CO₂
EM ÁREAS ALAGADAS DO PANTANAL
MATO-GROSSENSE**

JESUMAR LOPES SIQUEIRA

ORIENTADOR: PROF. DR. Geraldo Lúcio Diniz

Cuiabá, MT
Dezembro de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA AMBIENTAL

**MODELAGEM E SIMULAÇÕES DOS FLUXOS DE CO₂
EM ÁREAS ALAGADAS DO PANTANAL
MATO-GROSSENSE**

JESUMAR LOPES SIQUEIRA

*Tese apresentada ao Programa de
Pós-graduação em Física Ambiental
da Universidade Federal de Mato
Grosso, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Física
Ambiental.*

ORIENTADOR: PROF. DR. Geraldo Lúcio Diniz

Cuiabá, MT
Dezembro 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

L864m Lopes Siqueira, Jesumar.
 MODELAGEM E SIMULAÇÕES DOS FLUXOS DE CO₂ EM ÁREAS
 ALAGADAS DO PANTANAL MATO-GROSSENSE / Jesumar Lopes Siqueira. --
 2017
 70 f. ; 30 cm.

 Orientador: Geraldo Lúcio Diniz.
 Tese (doutorado) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Física,
 Programa de Pós-Graduação em Física Ambiental, Cuiabá, 2017.
 Inclui bibliografia.

 1. Dispersão de CO₂. 2. Modelagem ambiental. 3. Elementos finitos. 4.
 Simulação computacional. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.

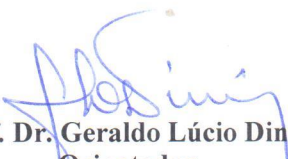
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física Ambiental

FOLHA DE APROVAÇÃO

**TÍTULO: MODELAGEM E SIMULAÇÃO DOS FLUXOS DE CO₂ EM
ÁREAS ALAGADAS DO PANTANAL MATO-GROSSENSE**

AUTOR: JESUMAR LOPES SIQUEIRA

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 11 de dezembro de 2017, pela comissão julgadora:

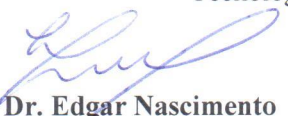

Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz
Orientador

Instituto de Ciências Exatas e da Terra - UFMT


Prof. Dr. Denilton Carlos Gaio
Examinador Interno
Instituto de Física - UFMT


Prof. Dr. André Krindges
Examinador Interno
Instituto de Ciências Exatas e da Terra - UFMT


Prof. Dr. Willian de Souza Pereira
Examinador Externo
Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia de Mato Grosso – IFMT


Prof. Dr. Edgar Nascimento
Examinador Externo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – IFMT

DEDICATÓRIA

A minha esposa Ana Lúcia e meus filhos Bruno, Sofia, Pedro e Arthur pelo amor, apoio e compreensão, aos meus pais Euzébio (*in memoriam*) e Marlene (*in memoriam*) e toda minha família.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer, em primeiro lugar, a Deus, pela força e coragem durante toda esta longa caminhada.

Ao Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz, pela orientação e principalmente pela paciência, compreensão, incentivo, apoio, confiança e amizade, ingredientes que possibilitaram a realização deste;

Ao Prof. Dr. José de Souza Nogueira, pela confiança, apoio e grande trabalho feito frente ao Programa de Pós-graduação em Física Ambiental da Universidade Federal de Mato Grosso;

Ao Prof. Dr. Marcelo Biudes, pelas aulas de Física Ambiental, que foram fundamentais para o meu ingresso no curso;

A todos os professores do Programa de Pós-graduação em Física Ambiental, pelo conhecimento transmitido;

A Soilce e Cesário pela amizade e colaboração frente a secretária do Programa;

Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso e a Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso pelo apoio a minha qualificação;

A todos os colegas de curso que ajudaram em muito, os quais se tornaram grandes amigos, em especial ao colegas de turma Anna Carolina, Fahin, Hozana, Luiz, Marcos, Rubia e Wilani.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	1
1 ESTADO DA ARTE E CARACTERIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO	4
1.1 ÁREAS INUNDÁVEIS	4
1.2 O PANTANAL	4
1.3 FLUXO DE CO ₂	6
1.4 DESCRIÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO	9
2 MODELAGEM AMBIENTAL	11
2.1 MODELO MATEMÁTICO	13
2.1.1 Modelo Conceitual	13
2.1.2 Formulação Analítica do Modelo	16
3 MÉTODO DE APROXIMAÇÃO DA SOLUÇÃO	20
3.1 CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL	20
3.2 FORMULAÇÃO VARIACIONAL	21
3.3 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO	22
3.4 DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	24
3.4.1 Discretização do Modelo	24
3.4.2 As Sub-matrizes de Rigidez	26
3.4.3 Criação das Matrizes A e B e do Vetor d (vetor de cargas)	29
4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS – RESULTADOS E ANÁLISES	30
4.1 INTRODUÇÃO	30
4.2 SIMULAÇÃO DE CENÁRIOS	30
4.2.1 Discretização do Domínio	30
4.2.2 Escolha dos Termos Fontes:	33
4.2.3 Simulação do Primeiro Cenário:	34
4.2.4 Simulação do Segundo Cenário:	36
4.2.5 Simulação do Terceiro Cenário:	38
4.2.6 Simulação do Quarto Cenário:	40
4.2.7 Simulação do Quinto Cenário:	41
4.2.8 Análise dos Resultados	43
CONSIDERAÇÕES FINAIS	43
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	45
APÊNDICE	49
1 CÓDIGOS FONTE	49

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Localização geográfica e foto de satélite da Baía de Chacororé, no Pantanal Matogrossense. (Fonte: EMBRAPA – Brasil, 2004)	10
Figura 2: Definição do domínio aéreo retangular (Ω) por um plano limitado pela fronteira Γ	14
Figura 3: Elemento de área e principais fluxos de massa a ele relacionados (ODI, 2005) ...	16
Figura 4: Imagem de satélite da área de estudo. Fonte: Embrapa (2004)	31
Figura 5: Domínio simplificado para discretização, usando o software livre Gmsh.	31
Figura 6: Domínio discretizado por elementos triangulares	32
Figura 7: Localização destacados nos cenários considerados.....	33
Figura 8: Simulação do cenário 1 para 4 instantes de tempo.	35
Figura 9: Concentração de CO ₂ em 4 nós do domínio, para o cenário 1	35
Figura 10: Simulação do cenário 2 para 4 instantes de tempo.	37
Figura 11: Concentração de CO ₂ em 4 nós do domínio, para o cenário 2.....	37
Figura 12: Simulação do cenário 3 para 4 instantes de tempo.	39
Figura 13: Concentração de CO ₂ em 4 nós do domínio, para o cenário 3.	39
Figura 14: Simulação do cenário 4 para 4 instantes de tempo.	40
Figura 15: Concentração de CO ₂ em 4 nós do domínio, para o cenário 4.	41
Figura 16: Simulação do cenário 5 para 4 instantes de tempo.	42
Figura 17: Concentração de CO ₂ em 4 nós do domínio, para o cenário 5.	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Parâmetros adotados para as simulações do cenário 1	32
Tabela 2: Parâmetros adotados para as simulações do cenário 2	36
Tabela 3: Parâmetros adotados para as simulações do cenário 3	38
Tabela 4: Parâmetros adotados para as simulações do cenário 4	40
Tabela 5: Parâmetros adotados para as simulações do cenário 5	41

LISTA DE SIMBOLOS

Ω Ômega	Domínio bidimensional
Γ Gama (maiúsculo)	Fronteira k
H Eta	Vetor normal exterior unitário
α Alfa	Coeficiente de difusividade efetiva
δ_0 Delta	Operador delta de Dirac
σ Sigma	Coeficiente de degradação global de CO_2
φ Fi	Função base linear
θ Teta	Ângulo para o sentido do vento predominante
μ mi	Medida (no sentido de Lebesgue)
C	Concentração de dióxido de carbono
∇	Operador nabla
V	Campo vetorial de velocidade-termo advectivo
f	Termo fonte
$N_{j(i)}$	Nó do j -ésimo vértice do i -ésimo triângulo
t	Tempo (horas)
A	Matriz de rigidez
T_n	Triângulo (n -ésimo)
B	Matriz componente do vetor carga
d	Componente do vetor carga
V_h	Sub-espço vetorial dos deslocamentos finitos
v	Função teste
L^2	Espaço de Banach (funções de quadrado Integrável no sentido de Lebesgue)
H^1	Espaço de Sobolev
R, S^ξ, S^η	Matrizes

RESUMO

Siqueira, J. L. **Modelagem e simulações dos fluxos de CO₂ em áreas alagadas do pantanal Mato-grossense**. Cuiabá. MT, 2017, 70f. Tese (Doutorado em Física Ambiental) – Instituto de Física, Universidade Federal de Mato Grosso.

Neste trabalho, é feito um estudo do fluxo de dióxido de carbono na região da Baía de Chacororé, no Pantanal Mato-grossense. O objetivo deste trabalho é propor um modelo matemático bidimensional e a simulação de cenários, de modo a descrever o processo de dispersão da concentração do dióxido de carbono na atmosférica, em função dos fenômenos físicos considerados. O modelo foi elaborado a partir de uma equação geral de difusão-advecção, para a qual se obteve a existência e unicidade de solução para o problema em sua formulação variacional. A aproximação numérica foi obtida por métodos computacionais com a discretização espacial por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), via Galerkin (discretização espacial) e Crank-Nicolson (discretização temporal). O uso das simulações computacionais permitiu a apresentação de cenários, onde foi possível verificar o comportamento da concentração de dióxido de carbono na compreender os efeitos da mudança nos ciclos biogeoquímicos globais e regionais, bem como o papel dos ecossistemas terrestres tropicais no balanço de dióxido de carbono.

Palavras-chave: Dispersão de CO₂; modelagem ambiental; elementos finitos; simulação computacional

ABSTRACT

Siqueira, J. L. **Modeling and simulationsof CO₂ flows in flooded areas of the Pantanal Mato-grossense**. Cuiabá. MT, 2017, 70f. Thesis (Doctorate in Environmental Physics) - Institute of Physics, Federal University at Mato Grosso.

In this work a study of the flow of carbon dioxide in the Chacororé Bay in the region of Pantanal Mato-grossense is carried out. The objective of this work is to propose a two dimensional mathematical model and the simulation of scenarios, in order to describe the process of concentration of carbon dioxide in the atmospheric, in function of the physical phenomena considered. The model was elaborated from a general diffusion-advection equation, of which the existence and uniqueness of solution to the problem in its variational formulation was obtained. The numerical approximation was obtained by computational methods with spatial discretization through the Finite Element Method (FEM), by Galerkin Standard (spatial discretization) and Crank-Nicolson (for temporal discretization). The use of computational simulations allowed the presentation of scenarios, where it was possible to verify the behavior for the dispersion of the concentration of carbon dioxide in the study area, which is fundamental to understand the effects of the change in the global and regional biogeochemical cycles, as well as the role of the Tropical terrestrial ecosystems in the carbon dioxide balance.

Keywords: CO₂ dispersion; Environmental modeling; finite elements wetland; Computer simulation

INTRODUÇÃO

A modelagem matemática ambiental é um recurso que tem sido, cada vez mais, empregado nos estudos ambientais, devido ao seu alto valor científico e sua utilidade no prognóstico e na avaliação de impactos ambientais. Por meio de simulações de modelos especializados, é possível estimar diferentes impactos da atividade antrópica, por exemplo, o alcance de poluentes na atmosfera, os efeitos do efluente líquido na quantidade da água de um corpo hídrico, os níveis sonoros na comunidade próxima a um empreendimento, os fatores determinantes nas questões relacionadas aos drenos e fontes de carbono em uma determinada área, dentre outros.

A dinâmica do carbono de ecossistemas tropicais brasileiros tem recebido considerável importância, devido a necessidade de compreender os efeitos da mudança da cobertura terrestre, em ciclos biogeoquímico regionais e globais e o papel dos ecossistemas terrestres tropicais no equilíbrio de dióxido de carbono (VOURLITIS et al., 2004, 2011).

Estima-se que as áreas alagáveis tropicais conhecidas por pântanos, ocupam uma área da superfície do globo entre 5% e 7% (NEUE et al., 1997). A alta produção primária líquida da matéria orgânica, produzida pela decomposição natural, torna as áreas alagáveis tropicais um importante sorvedouro de carbono. Pequenas alterações no clima, água e regime de nutrientes e uso da terra podem alterar o delicado equilíbrio destas áreas.

Neste trabalho, investigamos o problema de fluxo de CO₂ na região do Pantanal Mato-grossense. O Pantanal é considerado importante sistema regulador do meio ambiente, devido ao seu regime de chuva e inundação que afeta a distribuição sazonal de energia e carbono dessa região. O objetivo geral é propor um modelo matemático que possa representar a dinâmica do fluxo de CO₂ na atmosfera local.

O melhor entendimento da dinâmica do fluxo de CO₂ do solo é fundamental para compreender a participação do solo no balanço do carbono, já que o CO₂ é um componente expressivo da dinâmica do Carbono nos ecossistemas terrestres. Outro fator importante é a compreensão de como o Pantanal Mato-grossense emite ou sequestra carbono. A emissão ou sequestro de carbono atmosférico envolve uma

complexa variedade de processos físicos, químicos e biológicos, atuando em direções ou intensidades diferentes.

Estudos têm sido realizados em diversos biomas, para entender a influência de atividades antrópicas, principalmente, no que diz respeito à liberação de gases poluentes para a atmosfera, sobretudo a liberação de CO₂ estocado pelas florestas e áreas alagáveis. O CO₂ é uma substância que, em conjunto com a radiação solar e com água, é utilizado pelas plantas continuamente para sintetizar a glicose, no processo da fotossíntese (BALDOCCHI, 2008).

Existe uma contínua troca de gás carbônico entre os seres vivos e a atmosfera, tais como: respiração e fotossíntese, materiais da crosta, combustão e oxidação, assim como entre os oceanos e atmosfera. Cerca de 90% da matéria que forma os vegetais são provenientes da atmosfera por meio da atividade fotossintética (VAREJÃO, 2006).

O CO₂ necessário para o desenvolvimento das plantas é fornecido por três sistemas: pela atmosfera, pelo solo através da respiração das raízes e pela própria planta (KOCH e MOONEY, 1996).

Do total de dióxido de carbono que existe na Terra, aproximadamente 98% se encontram dissolvidos na água dos oceanos, sob a forma de bicarbonato. Quase todo o restante está na atmosfera, onde sua concentração oscila muito pouco em torno de 0,5 g de CO₂ por kg de ar. Porém, essa concentração, pode aumentar consideravelmente nas vizinhanças dos grandes parques industriais e dos conglomerados urbanos de maior porte (VAREJÃO, 2006).

Os processos do ciclo de carbono variam de bioma para bioma, entretanto, alguns dos maiores fluxos de dióxido de carbono poderão ser encontrados nas florestas tropicais úmidas que estão entre os mais importantes e menos monitorados ecossistemas do planeta (MALHI et al., 1998). As pesquisas de interação biosfera-atmosfera e do fluxo de carbono permitem que se avalie o impacto de eventuais mudanças ambientais no mesmo, incluindo mudanças no uso do solo, na variabilidade climática e no aumento de concentração de CO₂ na atmosfera, alterando o funcionamento total de um ecossistema natural (GALLON et al., 2006).

Para realizar simulações de cenários e estimativas da concentração de CO₂ em uma área alagada do Pantanal, este trabalho propõe o uso de um modelo matemático em sua formulação clássica. Em seguida, obtém a sua formulação variacional (ou

formulação fraca) e apresenta a existência e unicidade da solução fraca. Os cenários são obtidos por meio das simulações com o código numérico apropriado. Portanto, os objetivos específicos deste trabalho são:

- Criar um modelo que descreva o processo de dispersão do CO_2 para a área de estudo;
- Obter a formulação fraca para o modelo em sua formulação clássica;
- Discretizar o problema em sua formulação fraca e
- Implementar códigos numéricos adequados ao problema para simular cenários.

O primeiro capítulo é destinado a revisão de literatura que serve de sustentação à elaboração desta tese e a descrição da localização e das características da área de estudo. No segundo capítulo será proposto um modelo bidimensional, que descreve o processo de dispersão de CO_2 para o fluxo laminar na direção horizontal em sua formulação clássica, utilizando uma equação de difusão-reação-advecção. No terceiro capítulo, será obtida a formulação variacional para o problema. Em seguida, é feita a discretização do problema, utilizando métodos computacionais para as discretizações espacial (elementos finitos – via Galerkin) e temporal (via Crank-Nicolson). No último capítulo serão apresentados os resultados, por meio da simulação de cenários e, por fim, as conclusões obtidas.

1 ESTADO DA ARTE E CARACTERIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO

1.1 ÁREAS INUNDÁVEIS

As planícies inundáveis são áreas que oscilam entre as fases terrestre e aquática e são marcadas pela alta complexidade estrutural, refletida por um mosaico paisagístico e funcional decorrente das drásticas modificações sazonais as quais o sistema é submetido periodicamente (JUNK, 1997). A inundação está associada ao regime hidrológico, que provoca a expansão, contra o e fragmenta o dos sistemas aquáticos, além de interferir no grau de conectividade entre as partes do sistema (FANTIN-CRUZ et al., 2011). Na região neotropical é comum a ocorrência de planícies de inunda o, como as planícies inundáveis da Amazônia Central, o Pantanal, que abrange o Brasil, Bolívia e Argentina, e a Ilha do Bananal (Brasil), os Lhanos Bajos do rio Orinoco (Venezuela), as savanas do nordeste da Bolívia entre os rios Madre de Dios, Beni, Mamoré e Guaporé (JUNK, 1997) entre outros.

As características topográficas, os solos pobremente drenados, associados   pronunciada sazonalidade hídrica e a alta taxa pluviométrica são fatores que influenciam no grande número de áreas periodicamente inundadas na região neotropical.

O Pantanal é caracterizado como elo entre o Cerrado, a Amazônia e os Chacos Bolivianos e Paraguaio (JUNK e NUNES da CUNHA, 2005) e apresenta o pulso de inunda o como principal força moderadora da paisagem, por apresentar baixa drenagem dos solos e frequente prolongamento do período de inunda o (JUNK, 2005).

1.2 O PANTANAL

O Pantanal é a maior área inundável contínua do mundo, e experimenta uma extensa e prolongada inunda o sazonal, com picos de inunda o em meses distintos e em diferentes compartimentos geográficos da planície (ASSINE, 2003).

O Pantanal é um dos seis biomas existentes no Brasil e representa 1,76% do território nacional (IBGE, 2013). Situado na depressão do rio Paraguai 16,20° S e 55,58° O, se estende entre o antigo escudo cristalino do Brasil Central e sua zona de transição para o sopé dos Andes geologicamente jovens. O rio Paraguai é o principal tributário da Bacia do Alto Paraguai. Sua extensa área inundável e a de seus afluentes formam o Pantanal Mato-grossense. A Bacia do rio Paraguai consiste no conjunto de todos os recursos hídricos convergindo para a área banhada pelo rio Paraguai e seus afluentes. O rio Paraguai nasce em território brasileiro e sua região hidrográfica abrange uma área de drenagem de 1.095.000 km², sendo 33% no Brasil e o restante na Bolívia, Paraguai e Argentina. A Região Hidrográfica do Paraguai, compreende, no território brasileiro, uma área de 362.259 km², dos quais 52% correspondem ao Mato Grosso e 48% ao Mato Grosso do Sul.

Geologicamente, o Pantanal pode ser considerado um sistema jovem com aproximadamente 2,5 milhões de anos, com muitas das feições morfolologicamente oriundas de uma evolução paleográfica condicionada por mudanças climáticas electônicas que vem ocorrendo desde o final do Pleistoceno (ASSINE, 2003). O Pantanal pertence à categoria das zonas úmidas temporárias sujeitas a um pronunciado pulso de inundação monomodal (JUNK et al., 2006a). Nos trópicos e sub-trópicos as zonas úmidas ocorrem comumente e possuem um padrão de chuvas fortemente sazonal. Outra característica marcante em grande parte dessas áreas é a ocorrência de um período completamente seco após o período de chuvas e, conseqüentemente, a colonização por espécies vegetais e animais terrestres que podem, ou não, ser específicas de áreas úmidas (JUNK et al., 2006b).

O clima do Pantanal é do tipo Aw, conforme classificação de Koppen, com temperatura do ar média no verão entre 26°C e 29°C e de 20°C a 23°C no inverno (HOFFMAN et al., 2010). O clima é quente praticamente todo o ano, sendo que a temperatura média anual é de 24°C. No verão a temperatura média é de 33°C, enquanto no inverno fica em torno de 16°. A seca característica do inverno no Pantanal origina-se da estabilidade gerada pela influência do anticiclone subtropical do Atlântico Sul e das pequenas dorsais que se formam sobre o continente (HOFFMAN et al., 2010; BRANDÃO et al., 2011). Segundo Brandão et al. (2011), associado ao período de

chuva está o deslocamento da Zona de Convergência Intertropical (CIT) para Sul,acompanhando a marcha aparente do Sol em direção ao Trópico de Capricórnio. O período chuvoso tem início em setembro na Serra dos Parecis, na região próxima a Rondônia e em toda a porção noroeste da bacia estendendo-se até junho. Na região meridional período chuvoso inicia-se em novembro (BRANDÃO et al., 2011). A precipitação acumulada anual no Pantanal, apresenta variação entre a região norte com 1800 mm e a região sul com 1500 mm. Os extremos sul e norte da bacia apresentam três meses de seca ao longo do ano, enquanto o Pantanal propriamente dito e as cabeceiras localizadas a Leste (região de Rondonópolis e Coxim) ficam por até quatro meses submetidos a condições de seca, podendo chegar até cinco meses no bolsão desde o norte de Poconé até próximo a Corumbá (HOFFMAN et al., 2010; BRANDÃO et al.,2011).

A flora do Pantanal pode alcançar até 2.000 espécies e constitui um encontro de elementos de ampla distribuição e de províncias fitogeográficas muito próximas, tais como o Cerrado, florestas estacionais, Chaco, Amazônia e Mata Atlântica (POTT et al., 2011). O grupo mais numeroso é de espécies com ampla distribuição, enquanto o segundo contingente é proveniente do Cerrado. Plantas endêmicas são raras, somente sete espécies catalogadas (POTT et al., 2011).A vegetação é um mosaico de plantas aquáticas, campos inundáveis, mata ciliar, savanas (cerrados), cerradão, floresta decidual, e uma grande parte de savanas e florestas pioneiras monodominantes (POTT et al., 2011). Cerca de 30% da área do Pantanal é coberta por florestas inundáveis (NUNES da CUNHA e JUNK, 2004). A proporção de ocorrência de certas comunidades vegetais é dependente das características ecológicas, especialmente da frequência, extensão, altura e duração das inundações e das características do solo, sendo inversa a relação entre a altura da inundação e a diversidade das espécies (ARIEIRA e NUNES da CUNHA, 2006).

1.3 FLUXO DE CO₂

Para entender o modelo matemático, necessita-se entender os principais fatores que afetam os constituintes e as concentrações de dióxido de carbono devido ao seu fluxo.

O dióxido de carbono, de forma geral, é produzido no solo pelas raízes e organismos do solo e, em pequena escala, pela oxidação de materiais que contém carbono no solo (RAICH e SCHLESINGER, 1992). A respiração do solo origina-se da decomposição microbiana heterotrófica da matéria orgânica, da respiração autotrófica da rizosfera e da associação micorrízica (HANSON et al., 2000; JURASINSKI et al., 2012).

Trocas ou fluxos de CO₂ representam a quantidade do gás transferido de um reservatório de carbono para outro, devido a processos físicos, biológicos ou químicos (OMETTO, 1981). Para se estimar dentro de um ambiente, coleta-se o ar atmosférico em dois diferentes níveis, e mede-se a diferença de concentração do CO₂. O resultado é, em módulo, o fluxo de CO₂ no ambiente.

Pesquisas em florestas mostram que valores positivos de fluxo de carbono são obtidos durante a noite, devido a respiração e emissão do solo, caracterizando assim o ambiente como uma fonte de CO₂. Após amanhecer, começa a diminuir a produção de CO₂ pela floresta, e inicia-se o consumo devido à atuação do processo de fotossíntese, invertendo o sinal, passando o ambiente a ser caracterizado como um sumidouro de CO₂. (BALDOCCHI, 2001; SANTOS, 1999; MALHI et al., 1998; MEIR et al., 1996).

A biota terrestre representa um sumidouro significativo de dióxido de carbono atmosférico por apresentar absorção diurna de gás carbônico superior à sua liberação noturna. No entanto, os processos do ciclo de carbono variam de bioma para bioma, e algumas das maiores taxas de carbono podem ser encontradas nas florestas tropicais úmidas, que estão entre os mais importantes e menos monitorados ecossistemas do planeta (MALHI et al., 1998).

Estimada entre 60 PgC/ano (SCHLESINGER, 1997) e 80 PgC/ano (RAICH e POTTER, 1995; RAICH et al., 2002), a respiração do solo representa o segundo maior fluxo entre a superfície dos ecossistemas e a atmosfera (RAICH et al., 2002). Devido à magnitude desse fluxo, pequenas mudanças na taxa de respiração do solo podem afetar significativamente a concentração de CO₂ na atmosfera (IPCC, 2001; SOE e BUCHMANN, 2005).

No Pantanal Mato-grossense, Carvalho (2013) realizou estudos que mostram que o valor médio do fluxo de CO₂ do solo é de $0,54 \pm 0,30 \text{g(CO}_2\text{)/m}^2\text{he}$ que o solo atuou como provável fonte de carbono, sendo que a estimativa do balanço de carbono

do solo foi de -9,11 t/ha. Se observou, também, que o estoque anual de carbono do solo foi $57,27 \pm 9,77$ t/ha, variando de $41,48 \pm 8,00$ t/ha em setembro a $80,47 \pm 24,38$ t/ha em fevereiro/2012. A densidade do solo determinada foi $1,63 \text{ g/cm}^3$. Observou-se que os maiores estoques de carbono ocorreram nos períodos de cheia e enchente, com $63,56 \pm 14,94$ e $57,45 \pm 6,93$ t/ha, respectivamente, sendo que nos períodos de vazante e estiagem observou-se os menores valores, $52,95 \pm 4,47$ e $55,12 \pm 11,83$ t/ha, respectivamente.

Estudos realizados em áreas do Pantanal Mato-grossense, na região de Barão de Melgaço por Mendes (2009), estimaram o estoque médio anual de carbono do solo em $89,9 \pm 25,1$ t/ha, Milesi (2010) encontrou uma média anual de $39,08 \pm 16,62$ t/ha.

Davidson et al. (1998) e Savage e Davidson (2003) também encontraram um pulso na emissão de CO_2 após o rápido umedecimento do solo seco, conforme pode ser visto no quadro 1, que apresenta alguns estudos relacionados com fluxo de CO_2 em alguns pontos de Mato Grosso.

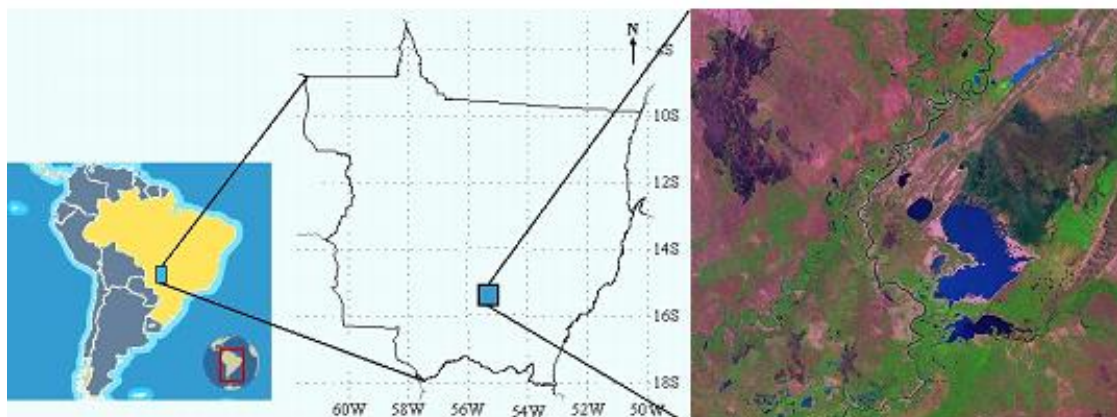
Quadro 1- Estudos realizados com fluxo de CO_2 do solo no Brasil	Aut	Ano	Período de	Localização	Fluxo de CO_2 ($\text{g}(\text{CO}_2)/\text{m}^2\text{h}$)	Equipamento
Coelho (2005)		2004	Final do Período da Seca	Sinop-MT Brasil em floresta tropical de transição	0,64*	EGM – 1
Coelho (2005)		2004	Transição Seca Úmida	Sinop-MT Brasil em floresta tropical de transição	$1,53 \pm 0,10^*$	EGM – 1
Pinto-Jr (2007)		2005	Ano inteiro	Sinop-MT Brasil em Serrado e pastagem	$0,87 \pm 0,10^*$	EGM – 2
Ferreira et.al (2008)		2005/2006	Ano inteiro	Fazenda Água Limpa,	0,23*	LI-COR LI-6400-09

			Brasília, DF, Brasil		
Valentini et al (2008)	2003	Ano inteiro	Sinop, MT Brasil em floresta tropical de transição	$1,20 \pm 0,80^*$	LI-COR LI-6400-09
Zanchi et al. (2012)	2007	Chuvosa e Seca	Reserva Cuieiras, Manaus, AM, Brasil	$0,38 \pm 0,06^*$	LI-COR LI- 8100-101
Zanchi et al. (2012)	2007	Chuvosa e Seca	Reserva Campina, Manaus, AM, Brasil	$0,38 \pm 0,06^*$	LI-COR LI- 8100-101
Brandão (2012)	2011	Ano inteiro	RPPN Sesc Pantanal, Barão de Melgaço, MT, Brasil	$0,63 \pm 0,26^*$	LI-COR LI-6400-09
Presente Estudo	2012	Ano inteiro	RPPN Sesc Pantanal, Poconé, MT, Brasil	$0,54 \pm 0,30$	EGM – 04

*Esses valores foram apresentados originalmente em $\mu\text{mol}/\text{m}^2\text{s}$, sendo convertidos para $\text{g}(\text{CO}_2)/\text{m}^2\text{h}$, pelo fator 6,312.

1.4 DESCRIÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO

Figura 1: Localização geográfica e foto de satélite da Baía de Chacororé, no Pantanal



Matogrossense. (Fonte: EMBRAPA – Brasil, 2004)

Para avaliarmos o fluxo de CO_2 na região do Pantanal, foi considerada uma baía permanente que está inserida na planície de inundação do rio Cuiabá, parte Norte do Pantanal mato-grossense (Figura 1): a baía Chacororé, localizada entre a cidade de Barão de Melgaço e o distrito de Mimoso. Esta baía pertence à bacia hidrográfica do rio Cuiabá e ocupa uma área de relevo aplainado, formando uma planície fluviolacustre em zona de média inundação (ADÂMOLI, 1986). A inundação na planície do rio Cuiabá apresenta uma amplitude de 2,5 m e duração máxima de 166 dias, com variação interanual dependente hidrológica da região e do ciclo do rio Cuiabá (1990) em períodos de Cheia (janeiro, fevereiro e março), Vazante (abril, maio e junho), Estiagem (julho, agosto e setembro) e Enchente (outubro, novembro e dezembro). O clima regional é quente e úmido com chuvas no verão e estiagem no inverno. A pluviosidade oscila entre 800 e 1400 mm/ano, sendo que 80% ocorrem entre os meses de novembro e março. A média anual de temperatura oscila entre um máximo de 29 a 32°C e um mínimo de 17 a 20°C (BRASIL, 1997). Os solos são de origem sedimentar, ocorrendo em fases argilosa e arenosa de forma alternada e descontínua, com a dominância de solos hidromórficos compondo 92,5% do total (AMARAL FILHO, 1984).

2 MODELAGEM AMBIENTAL

A modelagem matemática de problemas ambientais, tais como: alteração no ecossistema, poluição do ar, mudanças climáticas, tem como objetivo principal reproduzir as características relevantes para o tratamento de uma determinada questão específica; faz uso de equações diferenciais, que podem ser ordinárias (EDO) ou parciais (EDP), para estabelecer as variáveis que governam o fenômeno. Tais equações empregam em sua formulação os princípios físicos envolvidos no problema. A modelagem constitui-se uma tentativa aproximada de representar um fenômeno da natureza (WENDLAND, 2004). Portanto, antes que um modelo seja aplicado a um sistema real, necessita ser validado, para que seja assegurado que ele, realmente, represente o processo físico que supostamente está sendo simulado (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2006). Esta tarefa é feita comparando-se resultados do modelo com observações de campo ou de laboratório, sendo que esta comparação não precisa ser exata, mas é preciso que se tenha evidências de que os processos físicos e bioquímicos estejam adequadamente representados e incorporados no modelo.

Modelos matemáticos têm permitindo o estudo de diversos fenômenos ambientais. Para analisar, por exemplo, o ponto de alcance das emissões aéreas oriundas de chaminés de indústrias (HEIN e BONA, 2004), foram usadas equações de difusão unidimensional no estudo de diferentes características das emissões. Marques Filho (2002) propõe a deposição de poluentes em regiões costeiras a partir das emissões de plataformas de petróleo. A modelagem da qualidade do ar por transporte de gases traço e aerossóis e as emissões aéreas provocadas por pontos móveis, tais como aeronaves na pulverização de agrotóxicos em lavouras e descargas de automóveis foram estudadas por Wang e Ostojă-Strzewski (2004), Longo (1999), Freitas (1999), Santos (1998) e Artacho (1993). Diniz (2003) apresentou estudo de funcionamento da modelagem matemática e simulação numérico computacional para contaminação ambiental. Modelagem e simulação dos fluxos de vapor d'água na área da represa do rio Manso-MT foram feitas por Odi (2005). O Fluxo de água e transporte de solutos na zona não-saturada do solo foram simulados por Pizarro (2009). Vilani (2008) realizou estudos da dispersão de CO₂ em áreas de transição floresta-cerrado, por meio de modelagem e simulações.

As equações diferenciais nem sempre apresentam solução analítica devido à complexidade da geometria, porém, é possível obter aproximações da solução via método numérico (ROSMAN, 1989). O método de diferenças finitas e o de elementos finitos são os mais usados na engenharia. Esses métodos baseiam-se no processo de discretização das equações diferenciais parciais (EDP) governantes a fim de reduzir o problema físico contínuo a um problema discreto, de modo que tais equações possam ser avaliadas em cada ponto de uma malha computacional, que é utilizada por um modelo computacional para representar a região que se pretende estudar.

As EDPs são capazes de descrever fenômenos físicos tridimensionais, mas para efeitos computacionais, nem sempre são relevantes. Em geral, se utiliza um modelo bidimensional integrado na vertical. Falconer (1976) diz ser aceitável a utilização de modelos promediados na vertical quando há predominância horizontal dos fluxos de quantidade de movimento, e é insignificante a estratificação da matéria estudada. Para que a solução dessas equações matemáticas seja única num determinado domínio é necessário, ainda, promover condições de contorno às mesmas e uma condição inicial, que podem ser o resultado de outras simulações ou podem resultar de observações ou medições.

A obtenção de resultados numéricos de um modelo matemático gera imprecisões devido às simplificações impostas ao modelo. A estas imprecisões numéricas, relacionadas com os métodos numéricos e com as capacidades computacionais, dever-se-ão associar as incertezas das observações referentes à precisão dos equipamentos, tempos de amostragem, medidas temporais, etc. O valor final (real) resulta do uso de muitas e diferentes técnicas matemáticas, tais como método variacional, técnicas analíticas, estatística aplicada, etc. (BORREGO e MIRANDA, 2000).

Em qualquer problema que envolva a resolução de equações, as derivadas parciais levantam três questões fundamentais, as quais em seu conjunto, definem o que se chama um problema bem posto. São elas:

- A existência de solução;
- A unicidade da solução;
- A estabilidade da solução, isto é, que a solução dependa continuamente das condições definidas, de modo que as pequenas variações destas correspondam a pequenas variações da solução (BORREGO e MIRANDA, 2000).

Na próxima seção, será apresentado o modelo proposto para descrever o processo do fluxo de CO_2 para a área de estudo apresentada na seção 1.4 do primeiro capítulo.

2.1 MODELO MATEMÁTICO

Para descrever o fluxo de CO_2 na área de estudo apresentada, é importante entender o modelo matemático utilizado. A proposta é utilizar um modelo matemático, em sua formulação clássica, classificado como problema de valor de contorno, caracterizado pela equação diferencial parcial, as condições de contorno e a condição inicial, para assim, simular o transporte e a difusão de CO_2 na atmosfera, levando em conta os fenômenos relativos à dinâmica ambiental.

O desafio que se apresenta é a obtenção de um modelo matemático capaz de simular o transporte e a difusão de CO_2 . Este modelo será estabelecido a partir de algumas considerações sobre a dinâmica atmosférica, bem como dos fenômenos que definem a entrada e saída de CO_2 num domínio regular limitado.

2.1.1 Modelo Conceitual

Para descrever o processo de dispersão atmosférica do CO_2 na área de estudo apresentada, é importante saber qual o modelo matemático que mais se ajusta ao processo real que ocorre na natureza, e que possa simular o transporte e a difusão de CO_2 na atmosfera. Este modelo será analisado, a partir de algumas considerações sobre a dinâmica atmosférica, levando-se em conta os fenômenos relativos à dinâmica ambiental.

Inicialmente, nesta primeira abordagem, será adotado um domínio bidimensional, supondo que o CO₂ não atinge grandes altitudes, e será considerado o processo de dispersão apenas no plano horizontal, o que facilita o estudo nesta abordagem inicial. Além disso, o processo difusivo pode ser considerado homogêneo a cada camada de 100 m de altitude. Daí, considerando as dimensões da área de estudo, que seria de 100 km de latitude, por 100 km de longitude e 100 m de altitude, a partir da superfície, se justifica a adoção de um plano horizontal (domínio bidimensional), conforme apresentado na Figura 2.

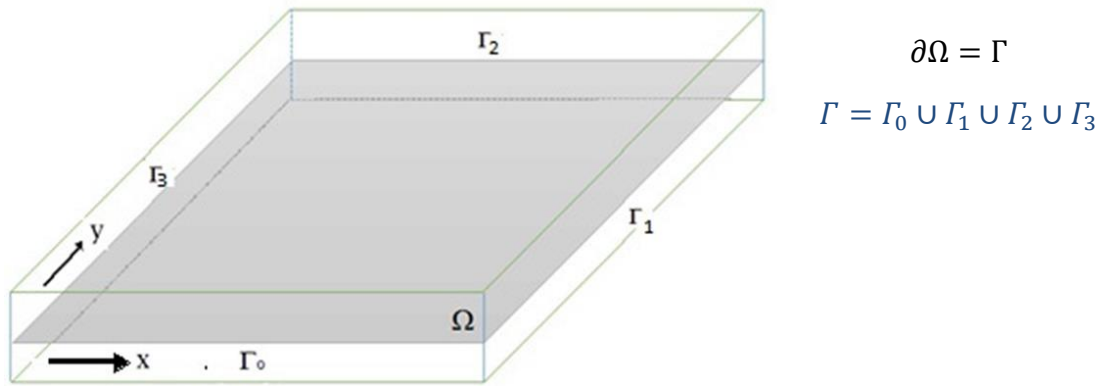


Figura 2: Definição do domínio aéreo retangular (Ω) por um plano limitado pela fronteira Γ .

O plano bidimensional utilizado, no qual será definido o processo descrito pelo modelo para a dispersão, para o comportamento evolutivo da concentração de um conjunto de partículas de CO₂, transportadas nesta área do domínio escolhido, onde serão considerados os fenômenos do processo difusivo (microscópico e aleatório) e advectivo (macroscópico, por meio das correntes atmosféricas - ventos), cuja fronteira será adotada, conforme apresentada na Figura 2.

Os processos atmosféricos são governados por uma série de variáveis difíceis de serem estabelecidas, tanto no aspecto qualitativo quanto quantitativo. Assim, torna-se difícil estabelecer as contribuições de cada variável em cada momento da evolução do sistema. Para que o modelo possa produzir cenários aceitáveis e, para que seja matematicamente tratável, a concepção do sistema deverá sofrer algumas simplificações com a escolha dos processos mais significativos que nos possibilitem tratá-lo sem que se perca a condição de explicar o processo evolutivo.

Vamos assumir que a teoria subjacente aos processos atmosféricos é a dinâmica laminar dos fluidos e que a formulação do modelo será pautada nestes princípios.

As leis da dinâmica dos fluidos são bem estabelecidas e podem ser formuladas de muitos modos equivalentes. Por exemplo, elas podem ser deduzidas lembrando que o comportamento de um sistema físico é completamente definido pelas leis de conservação. Isto corresponde à ideia de que, durante a evolução de um fluido, certas propriedades, como massa, quantidade de movimento e energia, são conservadas. Informações adicionais necessárias são as especificações da natureza do fluido (por exemplo, fluido incompressível, gás perfeito, fluido viscoso, etc.) e o coeficiente de difusividade (MARCHUK, 1986).

O conceito de conservação significa que a variação do fluxo da propriedade que se conserva no interior de um dado volume, deve-se ao efeito pontual de algumas fontes internas e ao saldo dos fluxos através da fronteira (OMETTO, 1976). Este saldo é chamado de fluxo, e sua expressão resulta das propriedades mecânicas e termodinâmicas do fluido. Semelhantemente, as fontes ligadas ao fluxo também são assumidas como conhecidas a partir da discretização espacial. Os fluxos e as fontes são, em geral, dependentes das coordenadas espaço-tempo, assim como do movimento do fluido.

Para estabelecer o modelo conceitual do processo do fluxo, consideremos um domínio horizontal (cf. figura 2), fixado acima da superfície e destacamos um elemento de área de dimensões $\Delta x \times \Delta y$. Consideremos, ainda, que estamos interessados em descrever o comportamento de um grupo de moléculas de CO_2 que tenha sido injetado neste elemento de área por algum processo natural (proveniente do solo ou pela ação do vento). Se considerarmos que o fornecimento é constante, então, a diferença da concentração de CO_2 de um ponto a outro será afetada, principalmente, por um gradiente de concentração, pelo transporte ocasionado pelo vento e pela perda de algumas parcelas para a atmosfera adjacente (Figura 3), a fonte adotada será considerada sobre uma parcela do domínio, aproximada por uma função do tipo periódica.

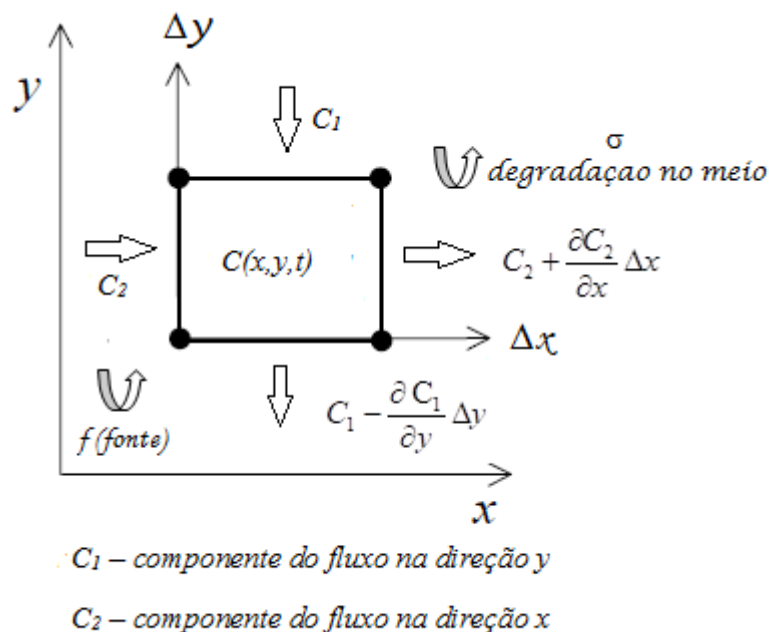


Figura 3: Elemento de área e principais fluxos de massa a ele relacionados (ODI, 2005)

2.1.2 Formulação Analítica do Modelo

O modelo conceitual permite que se equacione analiticamente os fluxos. Denominando de $C(x,y,t)$ a concentração de CO_2 num ponto do domínio ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) então, a variação da concentração neste ponto, em um dado instante $t \in (0, T]$, deverá considerar todos os fluxos em conjunto. A interpretação de como cada componente do fluxo total age no processo de transporte e como interfere na concentração é que conduz a formulação do modelo matemático.

Os fluxos relevantes são gerados a partir de duas contribuições: uma devido ao transporte advectivo do fluido e outra devido à difusão dada pelo movimento molecular, que sempre está presente. Então, a equação que rege o processo deve obedecer a formulação genérica dada a seguir, a qual representa uma generalização do modelo procurado:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\{\text{difusão}\} - \{\text{transporte do meio}\} - \{\text{degradação}\} + \text{fonte} \quad 2-1$$

Trata-se de uma equação diferencial parcial, denominada de difusão-advecção-reação, que tem origem nas leis de conservação das massas (BASSANEZI e FERREIRA Jr., 1988).

Se considerarmos aceitável este modelo, resta investigar se, a partir da equação genérica acima, podemos atingir uma formulação adequada que represente os fenômenos mais relevantes envolvidos. Assim, é necessário especificar analiticamente os fluxos, a fonte e as condições de fronteira. Para tanto, considera-se que o efeito do movimento molecular expressa a tendência de um fluido em alcançar o equilíbrio e a uniformidade, já a diferença na magnitude do fluxo da propriedade extensiva que está sendo considerada gera sua transferência no espaço de forma a reduzir a não homogeneidade, ou seja, existe um fluxo de matéria das regiões de maior concentração para as de menor. A contribuição dessa componente do fluxo age como um efeito difusivo do próprio gradiente da concentração, com sinal trocado $\text{div}(-\alpha(x,y,t) \nabla C)$, em que α serve como parâmetro de intensidade. Quanto maior o seu valor, mais facilmente a matéria se desloca e, conseqüentemente, maior o fluxo na direção de $-\nabla C$ (CANTÃO, 1988).

O outro fluxo refere-se ao transporte advectivo, proporcionado por um agente de movimento externo. Seja então $\vec{V} = (V_1(x, y, t), V_2(x, y, t))$ um campo de velocidade, que será considerado como conservativo nesta abordagem. Neste caso, a movimentação se dá na mesma direção do campo de velocidade e a quantidade movida é a própria concentração no ponto. Assim, teremos esse fluxo como $\text{div}[\vec{V}C]$.

A degradação será considerada proporcional à própria concentração no ponto, podendo ser caracterizada por captura de moléculas pela superfície do solo, das plantas e reações químicas ocorrentes na atmosfera.

Em termos de modelagem clássica destes fenômenos, tem-se:

$$\{\text{difusão}\} = -\text{div}[\alpha \nabla C] \quad (\text{cf. OKUBO, 1980})$$

$$\{\text{transporte advectivo}\} = \text{div}[\overrightarrow{VC}] \quad (\text{cf. EDELSTEIN-KESHET, 1988})$$

$$\{\text{degradação}\} = \sigma C \quad (\text{cf. BASSANEZI e FERREIRA, 1988})$$

A modelagem do termo fonte deve considerar uma superfície livre de água. Dada a irregularidade da geografia das baías, a fonte será estabelecida a partir da discretização espacial, considerando a presença de pontos de contribuição. O que será discutido no capítulo que trata da discretização espacial pelo método dos elementos finitos.

Assim, a equação adotada para modelar o processo do fluxo de CO₂ no domínio estabelecido será dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\text{div}(\alpha \nabla C) - \text{div}(\overrightarrow{V} C) - \sigma C + f \quad (2-2)$$

onde,

$\alpha = \alpha(x, y, t)$, aproxima a difusividade efetiva no meio aéreo;

$\overrightarrow{V} = \langle V_1(x, y, t); V_2(x, y, t) \rangle$ com $\text{div}(\overrightarrow{V}) = 0$, aproxima um campo bem comportado no sentido do fluxo aéreo;

σ , aproxima linearmente a degradação total no meio aéreo e

f , é o termo fonte

Seja η o vetor normal exterior unitário ao longo da fronteira Γ_0 . As condições de contorno serão:

$$-\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (\text{von Neumann}) \quad (2-3)$$

Esta condição simplificadora significa dizer que a entrada e saída de CO₂ no domínio, ao longo desta fronteira, se anulam de modo que o balanço de entrada e saída na fronteira do domínio seja nulo (condição assintoticamente estável).

Nas outras fronteiras, as condições de contorno adotadas serão:

$$-\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_i} = \beta C(x, y), \quad (\text{Robin}) \quad (2-4)$$

Por fim, a condição inicial do problema será considerada como

$$C(x, y, 0) = C_0(x, y) \quad (2-5)$$

Essas equações (2-2, 2-5) constituem a formulação clássica ou “forte” do problema. Conforme assinalado anteriormente, nem sempre é fácil ou possível obter a solução analítica do problema. Para o caso em estudo, não perseguiremos a solução exata, mas uma aproximação via métodos numéricos, assunto que nos deteremos no capítulo seguinte.

Tendo em vista a necessidade de demonstrar e obter, de algum modo, a existência e unicidade da solução do problema e visando a aplicação do Método de Elementos Finitos (MEF), via método de Galerkin para discretização espacial, de modo a obter as aproximações numéricas adequadas da solução para cada instante $t \in (0, T]$, faz-se necessário a obtenção da formulação variacional ou “fraca” do problema, que será feita no próximo capítulo. Além disso, serão apresentadas a descrição do MEF e a discretização da formulação variacional para o problema do fluxo de CO_2 em um domínio retangular.

3 MÉTODO DE APROXIMAÇÃO DA SOLUÇÃO

Neste capítulo será desenvolvida a formulação variacional do problema (2-2 a 2-5), apresentado no capítulo anterior em sua formulação clássica.

3.1 CONCEITOS BÁSICOS DE ANÁLISE FUNCIONAL

A formulação clássica ou forte exige condições de regularidade analítica que problemas ambientais simplesmente não têm.

Além disto, as geometrias envolvidas eliminam, com as ferramentas de que dispomos hoje, a possibilidade de exibir qual é a solução analítica $C(x, y, t)$. Isto nos leva naturalmente a métodos de aproximação cujos instrumentos também não têm as exigências de regularidade que a formulação forte exige.

A opção natural é a formulação variacional ou fraca em que as necessidades exigidas de regularidade são sensivelmente menos restritivas, devido ao uso de derivadas no sentido de distribuições e de integrais de Lebesgue, (BARTLE, 1995).

Uma observação pertinente é a de que se houver solução do problema na formulação 2.2 esta será, também, a solução do problema na concepção variacional.

O processo para obtenção da formulação variacional (ou fraca) para o problema consiste em considerar as derivadas da formulação clássica no sentido das distribuições e multiplicar cada termo da equação 2-2 por uma função v , denominada função teste (MEYER e DINIZ, 2004), sendo esta pertencente a um sub-espaço conveniente de:

$$H^1(\Omega) = \left\{ v(x, y) \in L^2(x, y) : \frac{\partial v}{\partial x} e \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\}, \quad \text{que será denotado por } v,$$

caracterizado a seguir, em que $v \in L^2(\Omega)$ se, e somente se, $\iint_{\Omega} v^2 d\mu < \infty$, ou seja $L^2(\Omega)$

é o espaço das funções de quadrado integrável no sentido de Lebesgue (BARTLE, 1995).

3.2 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

A formulação variacional do problema é obtida por meio da integração resultante, no sentido Lebesgue, sobre o domínio Ω , apresentada na secção anterior. Passando da formulação clássica para a formulação variacional, ampliamos a classe das funções admissíveis para a solução do problema.

Aplicando-se condições de contorno apresentadas pelas equações 2-3 e 2-4, e considerando o termo fonte homogêneo sobre parte do domínio Ω , num primeiro momento, e, ao se considerar também a densidade do ar constante na faixa horizontal do domínio, permite-se uma aproximação do coeficiente de difusão α , nas equações 2-2, 2-3 e 2-4, como constante no domínio considerado. Para obter a formulação variacional, faremos:

1 – Multiplicação de ambos os termos da equação 2-2 por uma função teste não nula φ , daí, termos

$$\frac{\partial C}{\partial t} \varphi = -\alpha \Delta C \varphi - V_1 \frac{\partial C}{\partial x} \varphi - V_2 \frac{\partial C}{\partial y} \varphi - \sigma C \varphi + f \varphi \quad (3-1)$$

2 – Integração de todos os membros no sentido de Lebesgue

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} \varphi d\mu = \alpha \iint_{\Omega} \Delta C \varphi d\mu - V_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial x} \varphi d\mu - V_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial y} \varphi d\mu - \sigma \iint_{\Omega} C \varphi d\mu + \iint_{\Omega} f \varphi d\mu \quad (3-2)$$

3 – Usando a primeira identidade de Green (ÍÓRIO, 1988) e as condições de contorno 2-3 e 2-4

$$\alpha \iint_{\Omega} \Delta C \varphi d\mu = -\alpha \iint_{\Omega} (\nabla C \cdot \nabla \varphi) d\mu + \alpha \int_{\Gamma} \frac{\partial C}{\partial \eta} \varphi d\gamma$$

Daí

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} \varphi d\mu = -\alpha \iint_{\Omega} \nabla C \cdot \nabla \varphi d\mu - V_1 \iint_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial x} \varphi d\mu - V_2 \iint_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial y} \varphi d\mu - \sigma \iint_{\Omega} C \varphi d\mu + \iint_{\Omega} f \varphi d\mu \quad (3-3)$$

Usando as notações de produto interno dados por $(u|v) = \iint_{\Omega} uv d\mu$, teremos

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} \middle| \varphi \right)_{0,\Omega} + \alpha (\nabla C | \nabla \varphi) + V_1 \left(\frac{\partial C}{\partial x} \middle| \varphi \right)_{0,\Omega} + V_2 \left(\frac{\partial C}{\partial y} \middle| \varphi \right)_{0,\Omega} + \sigma (C | \varphi)_{0,\Omega} = (f | \varphi)_{0,\Omega} \quad (3-4)$$

Ao considerar, também, o decaimento global σ constante e que as componentes advectivas sejam definidas por $V_1 = V \cos \theta$ e $V_2 = V \sin \theta$, sendo V a velocidade do vento e θ o ângulo da direção do vento, orientado no sentido anti-horário a partir do eixo Leste, o que determina as projeções da velocidade nas direções correspondentes aos eixos x e y , respectivamente. A equação (3-4) poderá ser escrita na forma:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} \middle| \varphi \right)_{0,\Omega} + \alpha (\nabla C | \nabla \varphi) + V \cos \theta \left(\frac{\partial C}{\partial x} \middle| \varphi \right)_{0,\Omega} + V \sin \theta \left(\frac{\partial C}{\partial y} \middle| \varphi \right)_{0,\Omega} + \sigma (C | \varphi)_{0,\Omega} = (f | \varphi)_{0,\Omega} \quad (3-5)$$

$$\forall \varphi \in V, \forall t \in (0, T].$$

É importante observar que em (3-5), aparecem apenas as derivadas de primeira ordem, no sentido de distribuições, da solução $C(x, y, t)$, enquanto na equação 2-2, aparecem as derivadas de segunda ordem, no sentido clássico.

Desta forma, passando da formulação clássica (2-2, 2-5) para a formulação variacional (3-5), são enfraquecidas as hipóteses de regularidade da solução, o que proporciona um aumento da classe de funções para as quais o problema faz sentido.

Além disso, na formulação variacional, a demonstração de existência e unicidade da solução fraca, cuja demonstração será tratada na próxima seção, se torna bem mais simples e, agora, viável em comparação com a demonstração para a solução clássica.

3.3 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO

A fim de utilizar métodos de aproximação da solução analítica da equação (3.5), antes de tudo, é necessário garantir a existência e unicidade da solução procurada. Para tal, será utilizado teorema de Lions (LIONS, 1961), o qual garante a existência e unicidade de solução para uma classe de problemas abstratos, reescrito aqui de modo adequado aos objetivos deste trabalho, seguindo a analogia adotada em Diniz (2003).

Primeiramente, agrupando os termos de (3.5) na forma abaixo e adotando a notação usada no citado teorema (LIONS, 1961) tem-se:

$$A(t, \bullet) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(A_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x, t) + A_0$$

O que em (3.5), mediante as escolhas indicadas mais abaixo fornece:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} \middle| \varphi \right)_{0,\Omega} + (A(t, C) | \varphi)_{0,\Omega} = (f | v)_{0,\Omega} + (C_0 | \varphi)_{0,\Omega} \delta_0(t) \quad (3-6)$$

$$\forall \varphi \in V, \forall t \in (0, T]$$

Ou numa notação mais compacta

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} \middle| \varphi \right)_{0,\Omega} + A(t, C, \varphi) = L_f(\varphi) \quad (3-7)$$

onde,

$$A(t, C, \varphi) = \iint_{\Omega} A(t, C) \varphi d\mu$$

e

$$L_f(\varphi) = \iint_{\Omega} f \varphi d\mu + \delta_0(t) \iint_{\Omega} C_0 \varphi d\mu$$

dadas as escolhas em (3-5) e do operador $\delta_0(t)$ que é o operador de Dirac que fixa a condição inicial.

Assim, seja o Teorema de Lions, enunciado a seguir:

Teorema de Lions: Dado o conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, considere os espaços $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$ e tais que: $H^1_0(\Omega) \subset v \subset H^1(\Omega)$ para $w = w(x, t)$ e $\varphi = \varphi(x, t)$, seja o operador A dado por:

$$A(t, w, \varphi) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_i} \varphi dx + \int_{\Omega} a_0(x, t) w \varphi dx$$

Se

- i) a_{ij}, a_i e $a_0 \in \mathbb{R}^2(\Omega \times (0, T))$;
- ii) $\forall w, \varphi \in v$ a função: $\Lambda: t \rightarrow A(t; w, \varphi)$ é mensurável;
- iii) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que: $|A(t; w, w)|^2 + \lambda \|w\|_{L^2}^2 \geq \delta \|w\|_{H^1(\Omega)}^2, \delta > 0, w \in v$, quase todo ponto;
- iv) $|A(t; w, \varphi)| \leq M \|w\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$;
- v) $L_f(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi dx + \left(\int_{\Omega} w_0 \varphi dx \right) \delta_0(t)$ é contínuo;
- vi) $f \in L^2((-\infty, T); \mathbb{R}^2(\Omega))$ e $w_0(x) \in L^2(\Omega)$;

Então existe uma função $w \in L((-\infty, T); L^2(\Omega))$ e $\{w: (-\infty, 0) \rightarrow 0\}$ que é solução do problema (3.7).

Como em Diniz (2003), as condições do teorema são satisfeitas pela equação (3-6)

3.4 DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Nesta seção será feita a discretização do problema variacional (3-5). Para a aproximação espacial via Galerkin, faremos uso de Método dos Elementos Finitos (ODEN, 1983; CIARLET, 2002), e, para as aproximações temporais, faremos uso do método de Crank-Nicolson, seguindo o procedimento adotado em Diniz (2003).

3.4.1 Discretização do Modelo

Como primeiro passo, para obter a discretização do modelo, por meio do MEF para discretização espacial, devemos considerar um subespaço de $H^1(\Omega)$, que denominamos V_h gerado pelas N funções φ_i (SIMMONS, 1963) – chamadas funções base de V_h . Assim, toda $v \in V_h$ é da forma:

$$v = \sum_{j=1}^N v_j(t) \varphi_j(x, y) \quad (3-8)$$

Considerando o subespaço $v_h \subset V_h$, a equação (3.5) pode ser reescrita na forma:

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial C_j}{\partial t} \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\mu + \alpha C_j \iint_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\mu + V_1 \cos \theta C_j \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \varphi_i d\mu + \right. \quad (3-9)$$

$$\left. V_2 \sin \theta C_j \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} d\mu + \sigma C_j \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\mu \right) = \iint f \varphi_i d\mu$$

ou ainda,

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial C_j}{\partial t} \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\mu + \sum_{j=1}^N C_j \left[\alpha \iint_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\mu + V \cos \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i d\mu + V \sin \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i d\mu + \right. \quad (3-10)$$

$$\left. \sigma \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\mu \right] = \iint f(x, y, t) \varphi_i d\mu$$

que é uma equação diferencial ordinária para cada função teste φ_i .

O segundo passo é a discretização temporal pelo método das diferenças finitas. Neste caso, será usado o método de Crank-Nicolson, com diferenças centradas no ponto $t_n + \frac{\Delta t}{2}$, fazendo a seguinte transformação:

$$\frac{dC_j}{dt} \left(t_n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cong \frac{C_j^{n+1} + C_j^n}{2} \quad (3-11)$$

$$\text{em que } \begin{cases} C_j^{n+1} = C_j(t_{n+1}) \\ C_j^n = C_j(t_n) \end{cases}$$

$$C_j \left(t_n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cong \frac{C_j^{n+1} + C_j^n}{2} \quad (3-12)$$

Daí, levando (3-11) e (3-12) em (3-10), em termos matriciais, vem

$$AC^{(n+1)} = BC^{(n)} + d \quad (3-3)$$

onde

$$\begin{aligned}
a_{ij} = & \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \sigma\right) \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\mu + \frac{\Delta t}{2} \left[\alpha \iint_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\mu + V \cos \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i d\mu \right. \\
& \left. + V \sin \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i d\mu \right]
\end{aligned} \tag{3-14}$$

$$\begin{aligned}
b_{ij} = & \left(1 + \frac{\Delta t}{2} \sigma\right) \iint_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\mu - \frac{\Delta t}{2} \left[\alpha \iint_{\Omega} \nabla \varphi_j \nabla \varphi_i d\mu + V \cos \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \varphi_i d\mu \right. \\
& \left. + V \sin \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \varphi_i d\mu \right]
\end{aligned} \tag{3-15}$$

$$d_i(t_n) = \iint_{\Omega} f\left(x_j, y_j, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \varphi_i d\mu \tag{3-16}$$

A matriz A deste sistema de equações algébricas lineares é chamada de matriz de rigidez e o vetor resultante das operações $BC^{(n)} + d$, para cada instante $(t_n + \frac{\Delta t}{2})$, é denominado vetor carga.

A condição inicial é dada por

$$\left(C^0 | \varphi_i\right) = \sum_{j=1}^N C_j^{(0)} \left(\varphi_j | \varphi_i\right) \quad \forall i = 1, \dots, N \tag{3-17}$$

A ordem das aproximações temporais é, localmente, da ordem de Δt^2 .

Em (3-13) chegamos a uma forma para a aproximação de soluções que envolve a criação de duas matrizes A e B , um vetor d , e a multiplicação matriz/vetor e resolução de sistemas lineares em cada iteração no tempo. Detalharemos agora a construção dessas matrizes.

3.4.2 As Sub-matrizes de Rigidez

Cada elemento de A (ou B) corresponde a uma série de produtos internos entre as funções de base, ou suas derivadas. Cada φ , global possui suporte compacto, abrangendo uns poucos elementos. Portanto, a primeira conclusão que extraímos desse fato é que os produtos internos podem ser calculados apenas no suporte das funções em questão. Melhor ainda: o suporte de cada φ , consiste num número finito de

triângulos muito bem caracterizados. Então, nossa segunda conclusão é que podemos calcular as integrais localmente, vasculhando cada elemento da malha e efetuando as operações apropriadas (esse procedimento será mais claro na seção logo abaixo).

A fim de utilizarmos as definições das funções de base local criaremos uma transformação que leve do triângulo padrão ($\hat{K}$), em coordenadas (ξ, η) para um triângulo real qualquer (K), em coordenadas (x, y) . Essa transformação é:

$$x(\xi, \eta) = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta \quad (3-18)$$

$$y(\xi, \eta) = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta$$

de onde verificamos que $\varphi_i(\xi, \eta) = \varphi_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, ou seja, ela leva funções globais em funções locais.

Antes de prosseguirmos, é conveniente expressarmos as derivadas das funções globais em função das derivadas de funções locais. Para tanto, pela regra da cadeia sabemos que:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

Resolvendo o sistema acima para $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$ e $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$ obtemos as seguintes relações:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \frac{1}{|\det J|} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right\} \quad (3-19)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = \frac{1}{|\det J|} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\}$$

Onde J é a matriz jacobiana da transformação

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix},$$

o que nos leva a $|\det J| = |(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$, que é constante por elemento, dependendo apenas de suas coordenadas.

Explicamos agora os produtos internos constantes de (3-10).

Caso 1: $\iint_K \varphi_i \varphi_j dy dx$

Usando a transformação acima, temos, diretamente do Cálculo:

$$\varphi(\xi, \eta) = \iint_K \varphi_i \varphi_j dy dx = \iint_K \varphi_i \varphi_j |\det J| d\eta d\xi = \underbrace{|\det J| \varphi_i \varphi_j d\eta d\xi}_{(*)} \quad (3-20)$$

Caso 2: $\iint_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dy dx$

Neste caso vamos abrir o produto interno dos gradientes e efetuar a substituição das derivadas (3.20)

$$\begin{aligned} \iint_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dy dx &= \iint_K \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} dy dx = \\ &= \iint_K \left\{ \frac{1}{|\det J|} \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{dy}{d\eta} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{dy}{d\xi} \right] \frac{1}{|\det J|} \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \frac{dy}{d\eta} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \frac{dy}{d\xi} \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{|\det J|} \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{dx}{d\xi} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{dx}{d\eta} \right] \frac{1}{|\det J|} \left[\frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \frac{dx}{d\xi} - \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \frac{dx}{d\eta} \right] |\det J| d\eta d\xi \end{aligned}$$

que, devidamente distribuída, resulta em

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|\det J|} \iint_K \left[(y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_1)^2 \right] \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} + \left[(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \right] \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} - \\ &- \left[(y_3 - y_1)(y_2 - y_1) + (x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \right] \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{d\varphi_j}{d\eta} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \frac{d\varphi_i}{d\eta} \right) d\eta d\xi \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \iint_K \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dy dx &= \\ &= h_1 \underbrace{\iint_K \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{d\varphi_j}{d\xi} d\eta d\xi}_{(*)} + h_2 \underbrace{\iint_K \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{d\varphi_j}{d\xi} d\eta d\xi}_{(*)} - h_3 \underbrace{\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} d\eta d\xi}_{(*)} \end{aligned} \quad (3-21)$$

com

$$h_1 = \frac{1}{|\det J|} \left[(y_3 - y_1)^2 + (x_3 - x_1)^2 \right],$$

$$h_2 = \frac{1}{|\det J|} \left[(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 \right] \text{ e}$$

$$h_3 = \frac{1}{|\det J|} \left[(y_3 - y_1)(y_2 - y_1) - (x_3 - x_1)(x_2 - x_1) \right]$$

O que é realmente importante observar, é que escrevemos os produtos internos sobre um elemento real a partir de integrais sobre o elemento padrão. Assim, as únicas integrais que realmente necessitam ser calculadas, são as marcadas com (*) nas equações (3-20 e 3-21). Estas integrais foram previamente calculadas e seus resultados armazenados em arquivo para uso pelo código implementado.

3.4.3 Criação das Matrizes A e B e do Vetor d (vetor de cargas)

Finalmente temos em mãos todos os elementos necessários para a criação das matrizes e vetores envolvidos na simulação.

A fim de simplificar um pouco a notação, introduziremos as matrizes **R**, **S^ξ**, **S^η**, **T** e **U**, onde:

$$r_{ij} = \iint_K \varphi_i \varphi_j d\eta d\xi \quad S_{ij}^{\xi} = \iint_K \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} d\eta d\xi$$

$$S_{ij}^{\eta} = \iint_K \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} d\eta d\xi \quad S_{ij}^{\xi\eta} = \iint_K \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} d\eta d\xi$$

$$t_{ij} = \iint_K \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi} \varphi_i \varphi_j d\eta d\xi \quad u_{ij} = \int \frac{\partial \varphi_m}{\partial \eta} \varphi_i \varphi_j d\eta d\xi$$

No capítulo seguinte, apresenta-se algumas simulações de cenários e suas respectivas análises.

4 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS – RESULTADOS E ANÁLISES

Neste capítulo, serão apresentadas algumas simulações de cenários para análise do fluxo de dióxido de carbono na atmosfera, de forma a testar o código numérico implementado e o modelo proposto.

4.1 INTRODUÇÃO

Com objetivo de aplicar o modelo matemático apresentado anteriormente, foram utilizados parâmetros nas simulações apresentadas mais adiante, tais como, coeficiente de difusão, velocidade e direção do vento, coeficiente de degradação, condição inicial e constante de decaimento, resultantes de dados levantados na literatura. No entanto, alguns parâmetros não foram encontrados e, assim, tiveram de ser estimados para a realização das simulações.

4.2 SIMULAÇÃO DE CENÁRIOS

Os códigos foram implementados para obtenção de interface gráfica e permitir a obtenção de animação que descreve o processo evolutivo do fluxo de dióxido de carbono para o domínio discretizado, dentro de um determinado período de tempo previamente escolhido (DINIZ, 2007).

4.2.1 Discretização do Domínio

Com base na imagem de satélite (Figura 4) foi feita uma simplificação do domínio (Figura 5) para a discretização e teste do código numérico.



Figura 4: Imagem de satélite da área de estudo. Fonte: Embrapa (2004)



Figura 5: Domínio simplificado para discretização, usando o software livre Gmsh.

Com base na Figura 5, foi feita a discretização do domínio para uma malha de elementos finitos de 1ª ordem, através do Gmsh, gerando um total de 3455 nós e 6848 elementos triangulares (Figura 6).

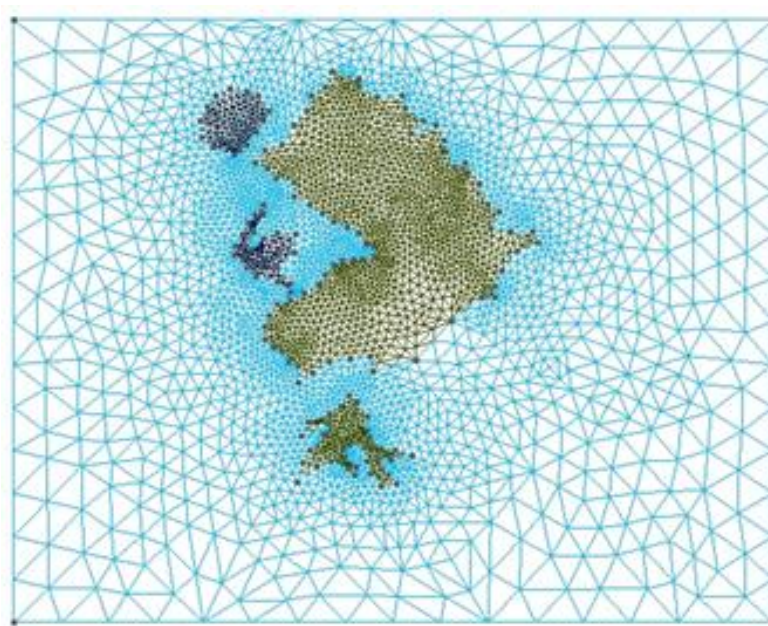


Figura 6: Domínio discretizado por elementos triangulares

Para a simulação dos cenários apresentados a seguir, foi gerado um código numérico apropriado para as aproximações, via Galerkin (discretização espacial) e Crank-Nicolson (discretização temporal), que facilite a visualização gráfica dos cenários.

Os parâmetros do modelo matemático utilizados para gerar as simulações dos cenários são os que se encontram na Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros adotados para as simulações do cenário 1

Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
α	0,012	m^2/h	V	1,8	m/h
σ	0,015	h^{-1}	β	0,0	m/h
C	0,5	$\text{g}/\text{m}^2\text{h}$	ω	$\pi/4392$	Radiano

Nas simulações para os 4 cenários foi usado o mesmo valor para $\Delta t = 0,1098$ horas e em cada cenário mudou-se a direção e a velocidade do vento conforme indicado nas tabelas de parâmetros de cada cenário, e as simulações foram geradas para um intervalo de tempo de 6 meses, cujas condições do termo fonte se referem ao período de janeiro a junho que, no Pantanal Mato-grossense, corresponde ao período

de transição de cheia para vazante. Alguns pontos foram escolhidos para acompanhar a evolução da concentração de CO₂, conforme figura 7. A escolha destes pontos particulares é devida a sua localização estratégica: os pontos 160 e 1000 ficam regiões afastadas do lago, onde há presença de vegetação. O ponto 300, nas bordas de uma superfície alagada e o ponto 2100, em uma superfície de alagamento permanente.

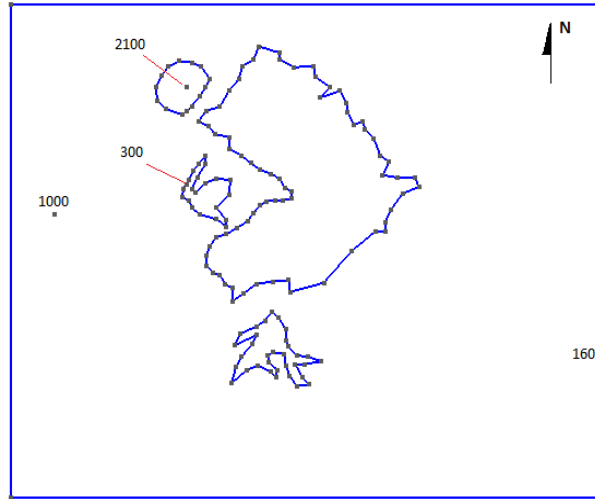


Figura 7: Localização destacados nos cenários considerados.

4.2.2 Escolha dos Termos Fontes:

Considerando os valores de fluxo de CO₂ apresentados no quadro 1, tendo como parâmetros $C_{\text{máx}}$, o valor máximo da concentração de CO₂, C_{min} , o valor mínimo da concentração de CO₂, com $C_{\text{med}} = \frac{C_{\text{max}} + C_{\text{min}}}{2}$ e a fonte de CO₂ do solo periódica, com ciclo de 6 meses, o que resultou no período $\omega = \pi / 4392$.

Além disso, para a amplitude da variação da função periódica que modela o termo fonte, foi usado o valor $C_{\text{max}} - C_{\text{min}}$. Daí, o termo fonte, $f(x_i, y_j, t)$ ser dado por:

$$f(x_i, y_j, t) = C_{\text{med}} + \left(\frac{C_{\text{max}} - C_{\text{min}}}{2} \right) \cos(\omega t_n)$$

Para os nós (x_i, y_j) que se encontram fora das áreas alagadas. Este é o termo fonte que aparece nos cálculos do vetor d, da equação discretizada (3-14).

4.2.3 Simulação do Primeiro Cenário:

Neste cenário, foi considerado o vento de SO para NE ($\theta = \pi/4$), cujos parâmetros do modelo matemático, para gerar as simulações, são apresentados na tabela 1 a seguir.

Tabela 1: Parâmetros adotados para as simulações do cenário 1

Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
α	0,012	m ² /h	V	1,8	m/h
σ	0,015	h ⁻¹	β	0,0	m/h
C_{min}	0,01	g/m ² h	ω	$\pi/4392$	Radiano

Na Figura 8, é apresentada a distribuição do CO₂ sobre o domínio para 4 instantes de tempo conforme indicado em cada gráfico da figura. Entre $t = 0$ e $t = 91$ dias ($t = 0$ e $t = 2196$ horas), observa-se um aumento na distribuição de CO₂ na região próxima ao lago, esse aumento é justificado pelo aumento da umidade do solo já que esse período corresponde a estação de cheia no Pantanal. A umidade do solo exerce grande influência na emissão de CO₂ do solo, pois interfere em suas características físicas e biológicas (ROSS, 1989). Em região muito úmida, a água drenada para o solo também força a saída de CO₂ presente nos poros e que, por meio do processo de difusão, é emitido para atmosfera (SOTTA, 2004; MAZINI, 2002; CASTOR E KAUFFMAN, 1998). No tempo $t = 183$ dias ($t = 4392$ horas), que corresponde ao período de vazante no Pantanal, diminui a umidade do solo e, conseqüentemente, diminui o desenvolvimento da atividade microbiana diminuindo, assim, significadamente a concentração de CO₂.

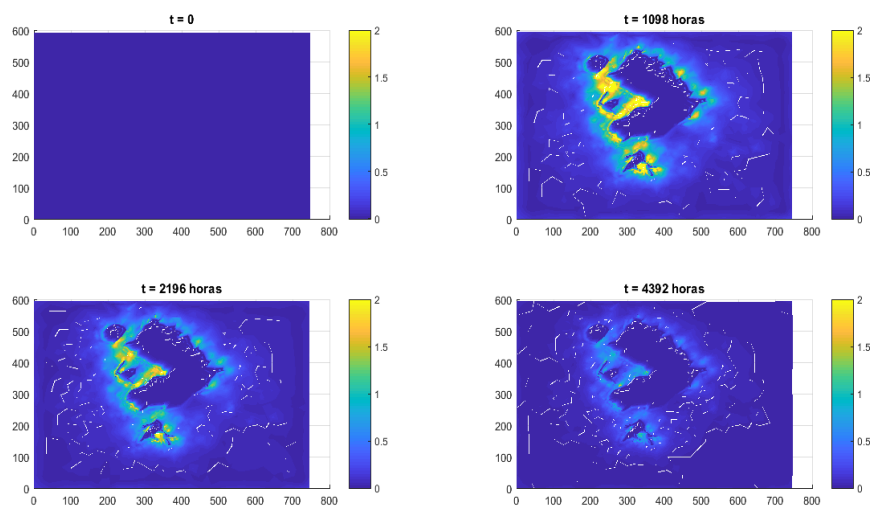


Figura 8: Simulação do cenário 1 para 4 instantes de tempo.

A figura 9 apresenta o processo evolutivo de concentração de CO_2 em 4 nós distintos, ao longo das iterações.

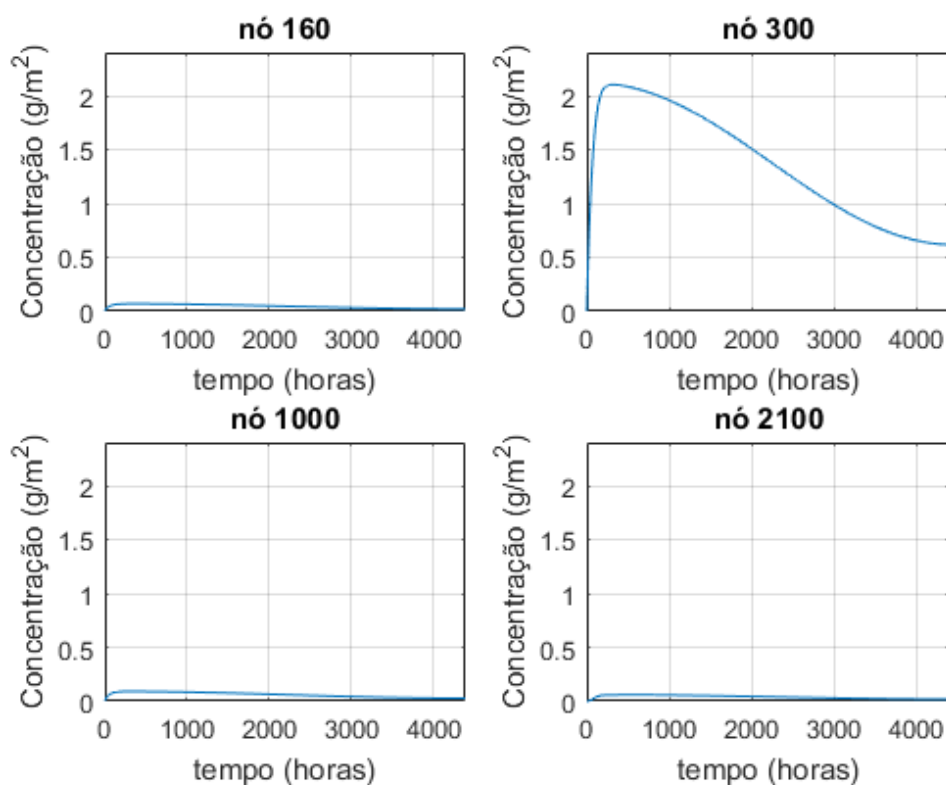


Figura 9: Concentração de CO_2 em 4 nós do domínio, para o cenário 1

Nos nós 160 e 1000 (regiões afastadas do lago) observam-se concentrações de CO_2 que sofrem um aumento muito pequeno, o que mostra que o efeito de transporte pelo vento é relevante. Com a concentração tendendo a deslocar-se para fora do domínio, predominando uma dispersão horizontal.

No nó 300 (próximo ao lago), percebe-se um maior nível de concentração, comparado, em torno de $2,0 \text{ g/m}^2\text{h}$, tendo o ponto máximo de concentração nas primeiras 1000 horas (41 dias), que corresponde justamente ao período de cheia, quando a umidade do solo é maior. A partir daí tende a se estabilizar em $0,5 \text{ g/m}^2\text{h}$, que é a concentração média de CO_2 da região.

Observando o comportamento da concentração no nó 2100 (superfície alagada), observa-se uma pequena concentração de CO_2 , bem próximo de 0, pelo fato da não existência de fonte em superfícies alagadas. O alto conteúdo de água do solo dessa região provoca um efeito físico de real como impedimento da passagem de CO_2 até atingir a interface solo-atmosfera (BRANDÃO, 2012).

4.2.4 Simulação do Segundo Cenário:

Este cenário simula a condição do vento de NO para SE ($\theta = -\pi/4$), cujos parâmetros adotados são os mesmos da tabela 2, sem nenhuma alteração em relação a tabela 1, apenas a direção do vento.

Tabela 2: Parâmetros adotados para as simulações do cenário 2

Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
α	0,012	m^2/h	V	1,8	m/h
σ	0,015	h^{-1}	β	0,0	m/h
C_{min}	0,01	$\text{g/m}^2\text{h}$	ω	$\pi/4392$	Radiano

Na figura 10, é apresentada a distribuição do CO_2 sobre o domínio para 4 instantes de tempo: $t = 0$, $t = 1098 \text{ h}$, $t = 2196 \text{ h}$ e $t = 4392 \text{ h}$, conforme indicado em cada gráfico da figura. Nos quatro tempos, como no primeiro cenário, observou-se o

mesmo comportamento de aumento da concentração em $t = 1098$ horas (45 dias), período de cheia onde a umidade do solo é maior.

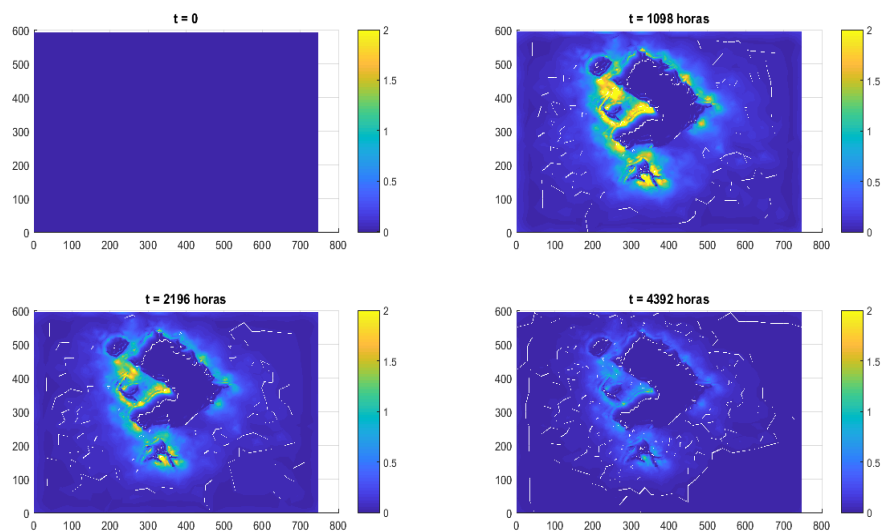


Figura 10: Simulação do cenário 2 para 4 instantes de tempo.

A Figura 11 apresenta o processo evolutivo de concentração de CO₂ em 4 nós distintos, ao longo das iterações, para o cenário 2.

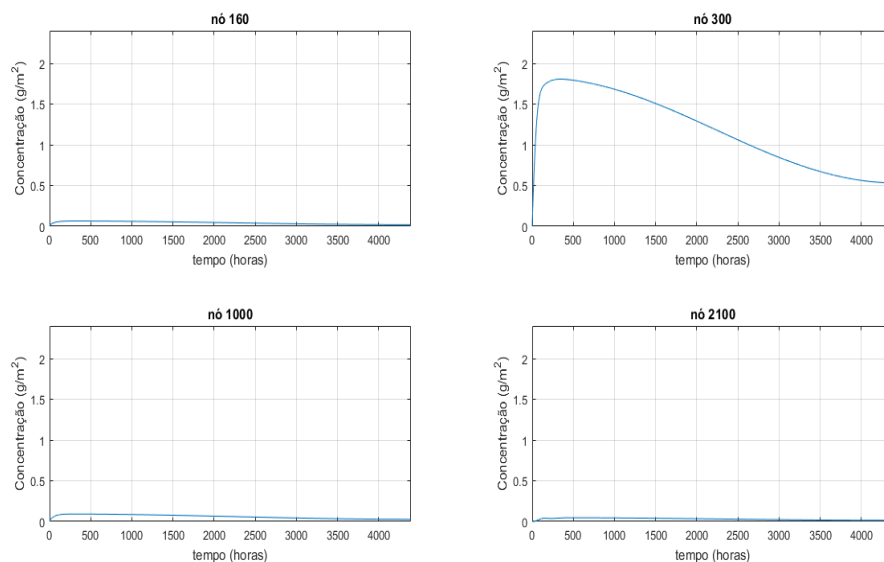


Figura 11: Concentração de CO₂ em 4 nós do domínio, para o cenário 2.

Neste cenário, observa-se, também um aumento na concentração de CO_2 no nó 300. A maior concentração ocorre entre $t = 0$ e $t = 500$ horas (20 dias) e o pico de concentração fica em torno de $1,8 \text{ g/m}^2\text{h}$, um pouco menor que no cenário 1, que ficou acima de $2 \text{ g/m}^2\text{h}$. Isso indica que nessa direção o vento atua mais, dispersando a concentração que, também, tende a estabilizar em $0,5 \text{ g/m}^2\text{h}$.

Nos nós 160 e 1000, observa-se uma pequena concentração, indicando que os efeitos da advecção são muito pequenas nessa região. No nó 2100, o aumento de concentração é mínimo por se tratar de uma região alagada, o pouco aumento de CO_2 que ocorre nessa região é devido a ação do vento.

4.2.5 Simulação do Terceiro Cenário:

Neste cenário, é feita a simulação para a situação do vento de SE para NO ($\theta = 3\pi/4$), cujos parâmetros do modelo matemático para gerar as simulações, são apresentados na tabela 3 a seguir.

Tabela 3: Parâmetros adotados para as simulações do cenário 3

Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
α	0,012	m^2/h	V	3,6	m/h
σ	0,015	h^{-1}	β	0,0	m/h
C_{min}	0,01	$\text{g}/\text{m}^2\text{h}$	ω	$\pi/4392$	Radiano

A figura 12, apresentada a distribuição do CO_2 sobre o domínio para 4 instantes de tempo conforme indicado em cada gráfico da figura. Observa-se neste cenário, o esperado aumento na concentração de CO_2 no período de cheia, com a máxima concentração em $t = 1098$ horas, aumento esse devido ao aumento da umidade do solo. A diminuição na concentração ocorre em $t = 4392$ horas, que se trata do período de vazante, período em que o solo se torna menos úmido.

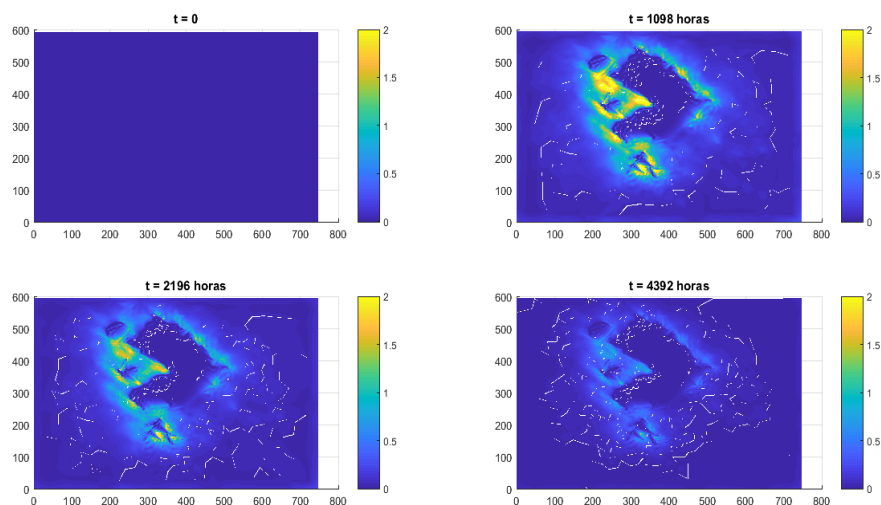


Figura 12: Simulação do cenário 3 para 4 instantes de tempo.

A Figura 13 apresenta o processo evolutivo da concentração de CO₂ em 4 nós distintos, ao longo das iterações, para o cenário 3.

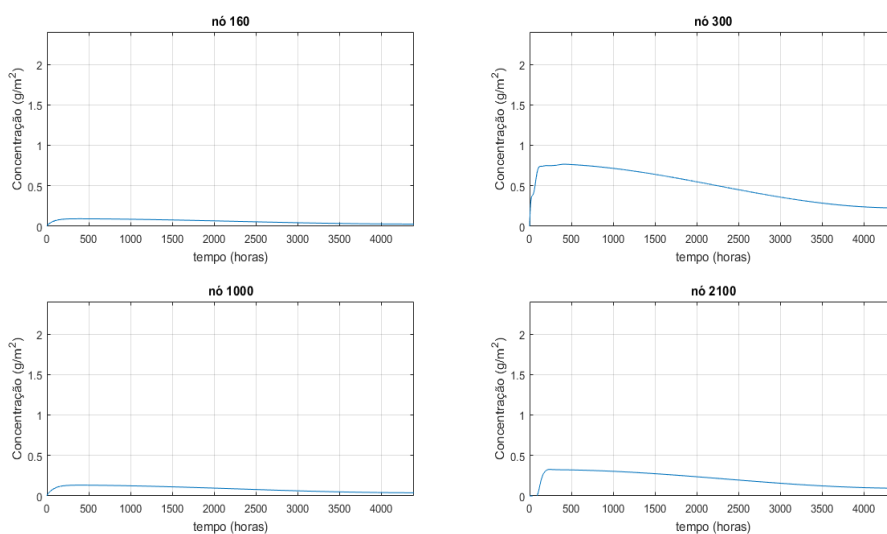


Figura 13: Concentração de CO₂ em 4 nós do domínio, para o cenário 3.

Com o vento na direção $\theta = 3\pi/4$, o ponto na margem do lago tem o ponto máximo de concentração em torno de $0,7 \text{ g/m}^2\text{h}$, muito menor que no cenário 1 e 2. O nó 2100, que nos dois primeiros cenários apresentou concentração baixa, aqui sofreu um aumento maior. O comportamento na distribuição de CO₂ nos nós 300 e 2100 configura que o aumento da velocidade do vento, de $1,8 \text{ m/h}$ para $3,6 \text{ m/h}$, não permite que a concentração ser muito grande na área úmida, e na área alagada, o aumento

ocorre, unicamente, pela ação do vento. Um aumento significativo ainda não é observado nos nós 160 e 1000, assim como no cenário 1 2e 2.

4.2.6 Simulação do Quarto Cenário:

Para este cenário, a simulação foi feita agora com vento de NE para SO ($\theta = -3\pi/4$). Nesta nova situação, os parâmetros utilizados foram são apresentados tabela 4.

Tabela 4: Parâmetros adotados para as simulações do cenário 4

Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
α	0,012	m ² /h	V	7,2	m/h
σ	0,015	h ⁻¹	β	0,0	m/h
C_{min}	0,01	g/m ² h	ω	$\pi/4392$	Radiano

Na Figura 14, é apresentada a distribuição do CO₂ sobre o domínio para 4 instantes de tempo conforme indicado em cada gráfico da figura. Ainda foi apresentado o comportamento de aumento de concentração no período de cheia e diminuição no período de vazante. Mas, com uma velocidade de 7,2 m/h, observa-se uma concentração menor em t = 1098 horas.

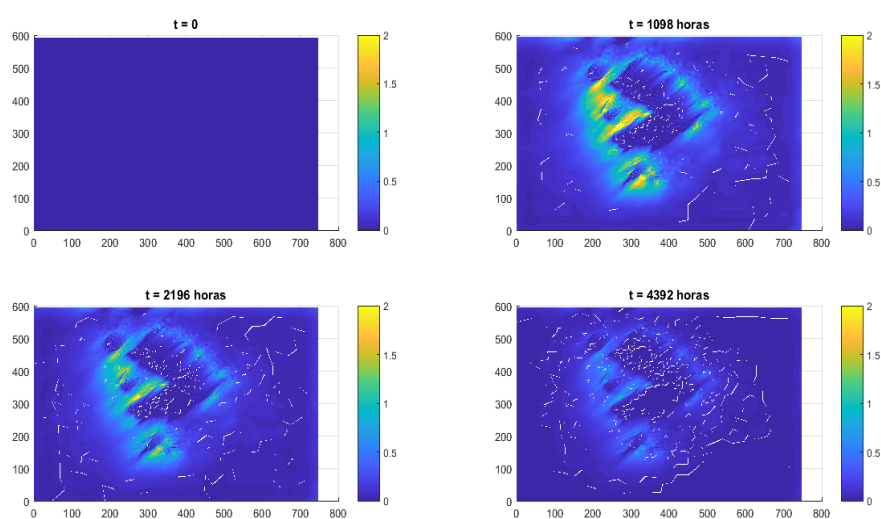


Figura 14: Simulação do cenário 4 para 4 instantes de tempo.

A Figura 14 apresenta o processo evolutivo de concentração de CO_2 em 4 nós distintos, ao longo das iterações, para o cenário 4.

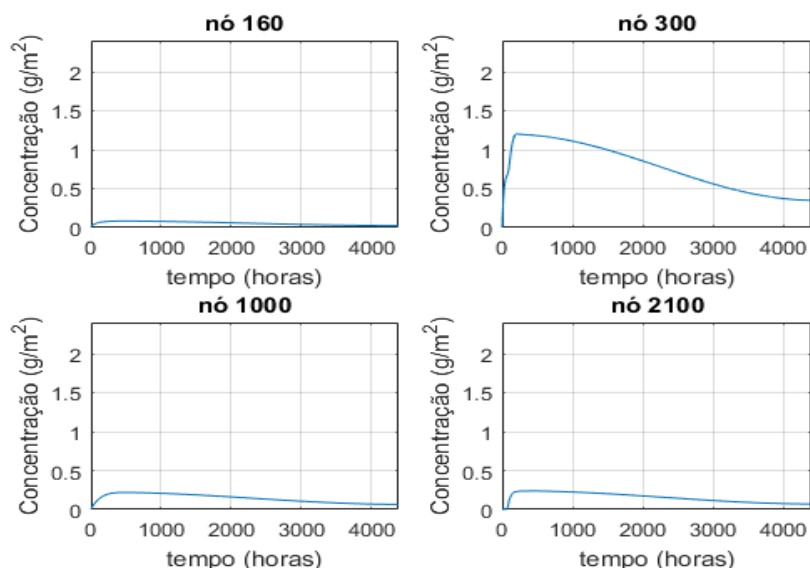


Figura 15: Concentração de CO_2 em 4 nós do domínio, para o cenário 4.

O quarto cenário mostra um aumento de concentração no nó 300, com pico em torno de $1,3 \text{ g/m}^2\text{h}$, tendendo a estabilizar em $t = 4392$ horas. Os efeitos da advecção provoca um aumento na concentração na área alagada (nó 2100) e nas áreas afastadas do lago (nós 160 e 1000).

4.2.7 Simulação do Quinto Cenário:

Para este cenário, a simulação foi feita agora com vento de O para L ($\theta = 0$). Neste último cenário, os parâmetros utilizados são apresentados na tabela 5.

Tabela 5: Parâmetros adotados para as simulações do cenário 5

Parâmetro	Valor	Unidade	Parâmetro	Valor	Unidade
α	0,012	m^2/h	V	10,0	m/h
σ	0,015	h^{-1}	β	0,0	m/h
C_{min}	0,01	$\text{g/m}^2\text{h}$	ω	$\pi/4392$	Radiano

Na Figura 16, é apresentada a distribuição do CO_2 sobre o domínio para 4 instantes de tempo conforme indicado em cada gráfico da figura. A velocidade do vento é de 10,0 m/h. Ainda observa-se aumento de concentração no período de cheia e diminuição no período de vazante. Mas, com uma velocidade de 7,2 m/h, observa-se uma concentração menor em $t = 1098$ horas.

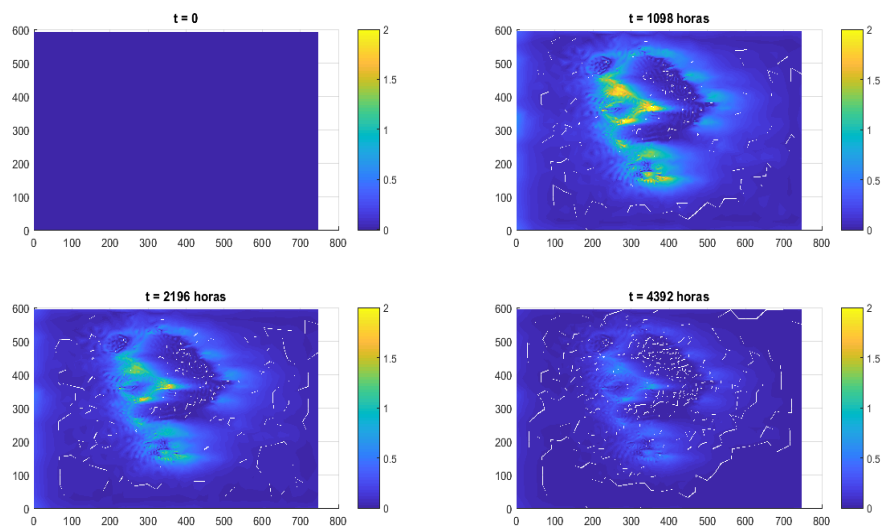


Figura 16: Simulação do cenário 5 para 4 instantes de tempo.

A figura 17 apresenta o processo evolutivo de concentração de CO_2 em 4 nós distintos, ao longo das iterações, para o cenário 5.

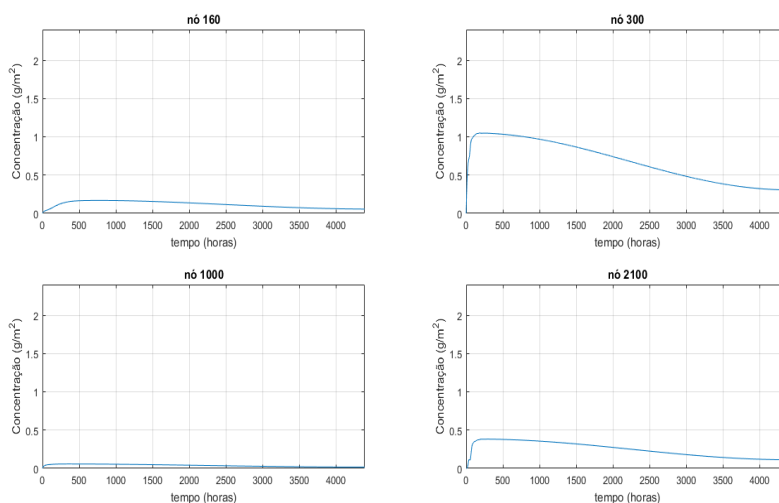


Figura 17: Concentração de CO_2 em 4 nós do domínio, para o cenário 5.

O quarto cenário mostra um aumento de concentração no nó 300, com pico em torno de $1 \text{ g/m}^2\text{h}$, tendendo a estabilizar em $t = 4392$ horas. O aumento, também é observado na região alagada (nó 2100), esse aumento é atribuído aos efeitos da adevccção.

4.2.8 Análise dos Resultados

O modelo matemático foi obtido com base em elementos clássicos da literatura.

A formulação variacional obtida teve garantida a existência e unicidade da solução fraca.

Nas simulações, a malha é grosseira, o que, pelas características inerentes ao modelo, diminui a estabilidade numérica dos resultados.

A linha da margem natural do lago é bastante irregular. A análise dos gráficos, em todos os cenários, revela que essa irregularidade dá origem ao aumento ou diminuição da concentração de dióxido de carbono, devido ao período de enchente ou vazante. Podemos interpretar este fenômeno, como no caso real, como sendo resultante do processo natural do aumento da umidade do solo na região mais próxima do lago, a concentração de dióxido de carbono é maior.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação de fluxo de dióxido de carbono em uma área alagada do Pantanal matogrossense pelo Método dos Elementos Finitos via Galerkin (discretização espacial) e Crank-Nicolson (discretização temporal) é uma contribuição original do trabalho. A aplicação destas técnicas está em plena ascensão e novas propostas técnicas vêm sendo desenvolvidas atualmente.

Considerando que isto pode revelar uma dificuldade em avaliar o modelo proposto e os resultados alcançados. Esta dificuldade nos motiva a prosseguirmos as investigações, de modo a estabelecer critérios de implementação mais rigorosos do ponto de vista da análise numérica, bem como uma abordagem enriquecida com parâmetros experimentais.

A modelagem ambiental com o aporte das ferramentas aplicadas no presente trabalho adquire novas características e possibilidades de abordagem na avaliação de alterações ambientais provocadas pelas atividades decorrentes do uso e mudanças no uso do solo. A técnica mostrou-se muito robusta e estudos ambientais poderão ser estabelecidos e podem trazer avanços significativos no estudo e análise de impactos devidos, por exemplo, ao desflorestamento de uma região, bem como dos fluxos de matéria e energia nos mais diversos sistemas ambientais.

Este trabalho contribui de forma efetiva para a avaliação dos fluxos de dióxido de carbono na região do Pantanal, cujas simulações permitem estudar possíveis impactos no micro-clima da região, por meio da introdução de campos reais de ventos para a região a ser estudada.

Sob esta ótica, vislumbramos algumas possibilidades de abordagens para trabalhos futuros no sentido de aprimorar o programa apresentado:

- i) Inserção de um mapa de ventos da região, carregado externamente, o que não exige alteração do programa desenvolvido;
- ii) Inserção de parâmetros experimentais de variáveis climáticas e de concentração de dióxido de carbono no solo, determinantes no fenômeno de fluxo CO₂;
- iii) Investigar o transporte de dióxido de carbono para camadas superiores da atmosfera pelo fenômeno da difusão turbulenta, dando assim um tratamento tridimensional ao problema.

A continuidade do trabalho certamente trará uma melhor compreensão dos fenômenos atmosféricos e das características da circulação geral da atmosfera, bem como sua relação com as atuais alterações no clima que poderão ser incorporadas ao presente estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADÂMOLI, J. Fitogeografia do Pantanal. In: I Simpósio Sobre Recursos Naturais e Socioeconômicos Do Pantanal, 1986. Corumbá. Anais. Corumbá: Centro de Pesquisa Agropecuária do Pantanal, p. 90-106.1986.

ARIEIRA, J.; CUNHA, C. N.; Fitossociologia de uma floresta inundável monodominante de *Vochysiadivergens* Pohl (*Vochysiaceae*), no Pantanal Norte, MT, Brasil. Acta Botanica Brasilica, v.20, n.3, p.569-580, 2006.

ASSINE, M.L. 2003. *Sedimentação na Bacia do Pantanal Mato-Grossense, Centro-Oeste do Brasil*. Rio Claro, Tese de Livre-Docência, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista (Unesp), 106 p.

BALDOCCHI, D., FALGE, E., GU, L., OLSON, R., HOLLINGER, D., RUNNING, S. FLUXNET: A new tool to study the temporal and spatial variability of ecosystem-scale carbon dioxide, water vapor, and energy flux densities. Bulletin of the American Meteorological Society, 82, 2415-2434, 2001.

BARTLE, R. G., The Elements of Integration and Lebesgue Measure, Wiley-Interscience, 1st, (1995).

BASSANEZI, R. C., W.C. FERREIRA JR, Equações diferenciais com Aplicações. São Paulo, Harbra, (1988).

BRANDÃO, A.B. Dinâmica temporal de e fluxo de CO₂ do solo em área de cerrado no Pantanal Mato-Grossense. 59p. Dissertação (Mestrado em Física Ambiental) – Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2012.

CANTÃO, R. F., 1998. Modelagem e simulação numérica de derrames de óleo no canal de São Sebastião, SP. Tese de Mestrado, IMECC – UNICAMP, Campinas/SP.

CARVALHO, P.V. Estudo do fluxo do CO₂ e do estoque de carbono do solo em área de interflúvio no Pantanal Município de Poconé, Mato Grosso. 68 f. 2013.

CIARLET, P. G., The Finite Element Method for Elliptic Problems, SIAM, 2nd, (2002).

DAVIDSON, E.; TRUMBORE, S. Control on soil carbon storage and soil CO₂ fluxes at the Harvard Forest core experiment. [HTTP://nigec.ucdavis.edu/publications/annual97/northeast/project18.htm/](http://nigec.ucdavis.edu/publications/annual97/northeast/project18.htm/). 1998.

DINIZ, G.L., Dispersão de Poluentes num Sistema Ar-Água: Modelagem, Aproximação e Aplicações. Tese de Doutorado, FEEC-UNICAMP, Campinas/SP, (2003).

DIXON, R.K.; BROWN, S.; HOUGHTON, R.A.; SOLOMON, A.M.; TREXLER, M.C.; WISNIEWSKI, J. 1994. Carbon Pools and Flux of Global Forest Ecosystems. *Science*, 263: 185-190, 1994.

EDELSTEIN-KESHET, L. Mathematical models in biology. N. York. Random-House, 1988.

FRANTINI-CRUZ, I.; GIRARD, P.; ZEILHOFER, P.; COLLISCHONN, W.; CUNHA, C.N.; Unidades fitosionômicas em mesoescala no Pantanal Norte e suas relações com a geomorfologia. *Revista Biota Neotropica*, v.10, n.2, 2010.

FREITAS, H.C. Estimativa de Fluxos de CO₂ por Respiração em Cana-de-açúcar, Sertãozinho, SP, 1999. Relatório Final de Iniciação Científica. Departamento de Ciências Atmosféricas, Instituto Astronômico e Geofísico, Universidade de São Paulo.

GALLON, N.M.P; SANCHES, L.; PAULO, S.R de. Fluxo e perfil de dióxido de carbono do dossel de uma floresta tropical de transição Amazônica. *Revista Brasileira de Meteorologia*. 2005.

GASH, C. A. NOBRE, J. M. ROBERTS and R. VICTÓRIA. John Wiley and Sons, Chichester, UK, p. 319-330, 1996.

HANSEN, J., M. Sato, R. Ruedy, A. Lacis, and V. Oinas, 2000: Global warming in the twenty-first century: An alternative scenario. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **97**, 9875-9880, doi:10.1073/pnas.170278997.

JUNK, W.J.; NUNES DA CUNHA, C. Pantanal: a large South American wetland at a crossroads. *Ecological Engineering*. v. 24, n.4, p.391-401.2005.

JUNK, W.J.; NUNES DA CUNHA, C.; WANTZEN, K.M.; PETERMANN, P.; STRUSSMANN, C.; MARQUES, M.I.; ADIS, J. Biodiversity and its conservation in the Pantanal of Mato Grosso, Brazil. *Aquatic Sciences*, v.68, n. 3, p. 278-309, 2006.

JUNK, W.J.1997.” General aspects of flood plain ecology with special reference to Amazonian flood plains.” *In*: Junk. W.J. (Ed.) The central Amazon flood plain: ecology of a pulsing system. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3-20p, 1997.

LIONS, J. L., 1961. *Equations Differentielles Operationelles*, Springer.

MALHI, Y.; NOBRE, A.D.; GRACE, J.; KRUIJT, B.; PEREIRA, M.G.P.; CULF, A.; SCOTT, S. Carbon dioxide transfer over a Central Amazonian rain Forest. *Journal of Geophysical Research*, v.103, p.315933612, 1998.

MARCHUK, G. I., 1986. Mathematical models in environmental problems. *Studies in Mathematical and its Applications*, Vol.16. North-Holland, Amsterdam.

MEIR, P.; GRACE, J.; MIRANDA, A.; LLOYD, J. Soil respiration in Amazônia and in cerrado in central Brazil. *Amazonian Deforestation and Climate*. eds. J. C. H.

MENDES, J.D. Distribuição espacial do estoque de carbono orgânico no solo e na biomassa vegetal lenhosa, em três fisionomias no Pantanal Norte, Mato Grosso, Brasil. Dissertação (Mestrado em Ecologia e Conservação da Biodiversidade) UFMT, 2009.

MEYER, J. F. C. A e G. L. Diniz, 1997. Changes of habitat of fish populations: a mathematical model. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 28 (4), 519-529.

MILESI, J. Análise temporal do carbono orgânico de solos sob diferentes fitofisionomias do Pantanal Mato-Grossense. 56p. Dissertação (Mestrado em Agricultura Tropical) – Faculdade de Agronomia e Medicina Veterinária, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2010.

NUNES DA CUNHA, C., JUNK, W.J. Year-to-year changes in water level drive the invasion of *Vochysiadivergens* in Pantanal grasslands. – Applied Vegetation Science. v.7, p.103-110, 2004.

NUNES DA CUNHA, C.; JUNK, W.J. Distribution of Woody plant communities along the food gradient in the Pantanal of Poconé. Mato Grosso, Brazil. International Journal of Ecology and Environmental Sciences, v.27, n.1, p.63-70, 2001.

ODEN J.T., CAREY G. F., Finite Elements: a second course, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, vol. II, (1983).

ODI N. L. G., Estudo dos fluxos superficiais de vapor d'água na área da represa do rio Manso/MT: modelagem e simulações. ICET – UFMT, Cuiabá/MT, (2005).

OKUBO, A. Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models. Springer, Berlin. 1980.

PIZARRO, M.L.P. Simulação de fluxo e transporte de solutos na zona não saturada do solo. 2009. 185 f. Tese (Doutorado em Ciências da Engenharia Ambiental) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

POTT, A.; OLIVEIRA, A.K.M.; DAMASCENO-JUNIOR, G-A. & SILVA, J.S.V. Plant diversity of the Pantanal wetland. Brazilian Journal of Biology, v.71, p.265-273, 2011.

RAICH J.W.; POTTER, C.S.; BHAGAWATI, D. Interannual variability in global soil respiration, 1980-94. Global Change Biology, v.8, p.800-812, 2002.

RAICH, J.W.; SCHLESINGER, W.H. The global carbon dioxide flux in soil respiration and its relationship to vegetation and climate. Tellus, v.44B, n.2, p.81-99, 1992.

RAICH, J.W.; POTTER, C.S. Global patterns of carbon dioxide emissions from soils. Global Biogeochemical Cycles. V.9.23-36. 1995.

SANTOS, G.A.; CAMARGO, F.A.O. Fundamentos da matéria orgânica do solo: ecossistemas tropicais e subtropicais. Porto Alegre, RS: Gênese, 508p, 1999.

SAVAGE, K. & Davidson, E. (2003) A comparison of manual and automated systems for soil CO₂ flux measurements: trade-offs between spatial and temporal resolution. *Journal of Experimental Botany*, 54, 891–899

SCHLESINGER, W.H. 1997. Biogeochemistry. *Geotimes* 42(2):44.

SCHLESINGER, W.H. 1997. Biogeochemistry: An Analysis of Global Change. 2nd edition. Academic Press, San Diego. 558 p. (Eighth printing, 2005; Spanish edition, 2000)

SPERANDIO, D.; MENDES, J.T.; SILVA, L.H.M. Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006. 354 p.

VAREJÃO SILVA, M. A. Meteorologia e Climatologia. Versão Digital 2. Recife/Brasil, p.215-392, março/2006.

VILANI, V. Dispersão de CO₂ em área de transição floresta-cerrado: modelagem e simulações. 90f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-graduação em Física Ambiental – Cuiabá, MT. 2008.

VOURLITIS, G.L., LOBO, F.A., BIUDES, M.S. ORTÍZ, C.E.R.; NOGUEIRA, J.de.S. Spatial variations in soil chemistry and organic matter content across a *Vochysiadivergens* invasion front in the Brazilian Pantanal. *Soil Science Society American Journal*. v.75, p.1553-1560, 2011.

VOURLITIS, G.L.; PRIANTE FILHO N.; HAYASHI, M.M.S.; NOGUEIRA, J.S.; RAITER, F.; HOEGEL, W.; CAMPELO, JR. J.H. Effects of Meteorological Variations on the CO₂ Exchange of a Brazilian Transitional Tropical Forest. *Ecological Applications*, v.14, p.89-100, 2004.

WANG, G. & OSTOJA-STARZEWSKI, M. (2004a) Influence of topography on the Phoenix CO₂ dome: a computational study. *Atmos. Sci. Lett.* 5: 103–107.

WENDLAND, E. Contribuição à simulação de processos em meios porosos. 2004. 270 f. Tese (Livro-Docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

APÊNDICE

1 CÓDIGOS FONTE

Neste apêndice, são apresentados os códigos numéricos utilizados na implementação do teste de simulação computacional escolhido para as aproximações da solução do problema.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Simulação do cenário 1 para dispersão de CO2 no pantanal
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%          PARAMETROS          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
clear all; t0=cputime; %format long;
%
%      parâmetros do modelo
%
a = 0.012;          % coeficiente difusivo
s = 1.5e-2;         % coeficiente de degradação
V = 1.8;           % velocidade do vento
tet= pi/4;          % direção do vento
c_m= 0.5;           % fonte de CO_2 media
Ap = (0.9-0.35);    % amplitude da fonte de CO_2
w = pi/4392;        % período do ciclo anual
b = 0.0;            % permeabilidade em Gama 1 e 2
%
%      malha do dominio (gerada pelo gmsh)
%
load malha_3455.mat;          % matriz malha dos elementos finitos indicando a
superficie
load nos_3455.mat;           % matriz de coordenadas dos nós
load front2.mat;             % vetor de nós nas froteiras Gama 1 e 2
load malha_3455a.mat;        % matriz malha - só os nós
ntr = length(malha_3455a);   % calculo do nº de elementos da malha
ntn = length(nos_3455);      % calculo do nº de nós da malha
tfinal=4392;                 % atribuição do instante final
itmax =40000;                % nº máximo de iterações no tempo
xmax = max(nos_3455(:,1));    % cálculo do valor máximo em no eixo x
ymax = max(nos_3455(:,2));    % cálculo do valor máximo no eixo y
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% calculo dos parametros da discretizacao
%

```

```

dt = tfinal/itmax;
mdt = dt/2;
%
%      preparacao dos parametros que independem das coordenadas
%
tt = [dt:dt:tfinal];      % vetor tempo (horas)
c1 = mdt*s;               % coef. aux (fi-j | fi-i)
c2 = mdt*a;               % coef. (grad fi-j | grad fi-i)
Vx = mdt*V*cos(tet);      % coef. (d fi-j/dx | fi-i)
Vy = mdt*V*sin(tet);      % coef. (d fi-j/dy | fi-i)
stm=(1+c1);               % coef. a esq (fi-j | fi-i)
stn=(1-c1);               % coef. a dir (fi-j | fi-i)
%
%      submatrizes de rigidez
%
%      (fi-j)*(fi-i)
%
mfi=[1/12 1/24 1/24; 1/24 1/12 1/24; 1/24 1/24 1/12];
%
%      submatrizes nas fronteiras Gama 1 e Gama 2
%
mfo=[1/3 1/6; 1/6 1/3];
%
%      montagem das matrizes do sistema
%
A = sparse(ntn,ntn);
B = sparse(ntn,ntn);
d = zeros(ntn,1);
u = zeros(ntn,1);
x=zeros(3);
y=x;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for itr=1:ntn
    for il=1:3
        ig = malha_3455a(itr,il);
        x(il)=nos_3455(ig,1);
        y(il)=nos_3455(ig,2);
    end
    jac = det([(x(2)-x(1)) (x(3)-x(1));(y(2)-y(1)) (y(3)-y(1))]);
    s = abs(jac);
%
%      calculo das entradas p\ submatrizes restantes
%
    dfdx(1)=y(2)-y(3); dfdy(1)=x(3)-x(2);
    dfdx(2)=y(3)-y(1); dfdy(2)=x(1)-x(3);
    dfdx(3)=y(1)-y(2); dfdy(3)=x(2)-x(1);
%
%      Obtendo a submatriz de rigidez para (grad fi_i | grad fi_j)
%

```

```

    gra1 = [(dfdx(1)^2) (dfdx(1)*dfdx(2)) (dfdx(1)*dfdx(3));(dfdx(2)*dfdx(1)) (dfdx(2)^2)
(dfdx(2)*dfdx(3));(dfdx(3)*dfdx(1)) (dfdx(3)*dfdx(2)) (dfdx(3)^2)];
    gra2 = [(dfdy(1)^2) (dfdy(1)*dfdy(2)) (dfdy(1)*dfdy(3));(dfdy(2)*dfdy(1)) (dfdy(2)^2)
(dfdy(2)*dfdy(3));(dfdy(3)*dfdy(1)) (dfdy(3)*dfdy(2)) (dfdy(3)^2)];
    mgf = gra1 + gra2;
%
% Obtendo a submatriz de rigidez para (d fi-j/dx | fi-i)
%
    mdx = [dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3)];
%
% Obtendo a submatriz de rigidez para (d fi-j/dy | fi-i)
%
    mdy = [dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)];
%
%
    for il=1:3
        ig = malha_3455a(itr,il);
        for jl=1:3
            jg = malha_3455a(itr,jl);
            soma =(c2/s)*mgf(il,jl) + (Vx*mdx(il,jl) + Vy*mdy(il,jl))*s*mdt/(6*jac);
            A(ig,jg) = A(ig,jg)+stm*s*mfi(il,jl)+soma;
            B(ig,jg) = B(ig,jg)+stn*s*mfi(il,jl)-soma;
        end
    end
end
u0 = zeros(ntr,1);
%
% Condicao inicial (distribuição de CO_2 sobre o domínio em t = 0)
%
    for ii=1:ntr
        if malha_3455(ii,1)==147
            ig1 = malha_3455(ii,2);
            ig2 = malha_3455(ii,3);
            ig3 = malha_3455(ii,4);
            u0(ig1) = 0.01;
            u0(ig2) = u0(ig1);
            u0(ig3) = u0(ig1);
        end
    end
end
%
% Resolucao iterativa do sistema
%
p1=zeros(itmax,1);
p2=zeros(itmax,1);
p3=zeros(itmax,1);
p4=zeros(itmax,1);
t = 0;
%
% montagem do grafico para a condição inicial e dos nós separados
%
```

```

fig=figure;
    subplot(2,2,1)
        trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 0'), set(gca,
'CLim', [-0.001, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
for it = 1:itmax
    p1(it)=u(160);
    p2(it)=u(300);
    p3(it)=u(1000);
    p4(it)=u(2100);
%
% montando a fonte em d para os nós do solo
%
    for ii=1:ntr
        if malha_3455(ii,1)==147
            ig1 = malha_3455(ii,2);
            ig2 = malha_3455(ii,3);
            ig3 = malha_3455(ii,4);
            d(ig1) = dt*(c_m+(Ap/2)*cos(w*t));
            d(ig2) = d(ig1);
            d(ig3) = d(ig1);
        end
    end
%
% Entrada/Saida nas fronteiras Gama 1 e 2
%
    ntf = length(front2);
    for itr1f=front2(1):front2(ntf);
        for ilocal=1:2;
            ig = front2(itr1f);
            x(ilocal)=nos_3455(ig,1);
            y(ilocal)=nos_3455(ig,2);
        end
        jac2 = sqrt((x(2)-x(1))*(x(2)-x(1))+(y(2)-y(1))*(y(2)-y(1)));
        for ilocal=1:2;
            ig = front2(itr1f);
            for jlocal=1:2;
                s0 = mdt*jac2*b*mfo(ilocal,jlocal);
            end
            d(ig) = d(ig)+s0;
        end
    end
%
% Efetuando as operações do lado direito
%
    dir=B*u0 + d;
%
% Resolvendo o sistema linear e atualizando valores
%
    u=A\dir;
    u0=u;

```



```

t = t + dt;
%
% construção dos gráficos para os instantes de tempos selecionados
%
if it==10000
    subplot(2,2,2)
    trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 1098
horas'),set(gca,'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
end
if it==20000
    subplot(2,2,3)
    trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 2196 horas'),
set(gca, 'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
end
if it==40000
    subplot(2,2,4)
    trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 4392 horas'),
set(gca, 'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
end
end
figure(2)
subplot(2,2,1)
plot(tt,p3),title('nó 160'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
subplot(2,2,2)
plot(tt,p2),title('nó 300'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
subplot(2,2,3)
plot(tt,p1),title('nó 1000'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
subplot(2,2,4)
plot(tt,p4),title('nó 2100'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
e=cputime-t0;
disp('tempo');
disp(e);

%
% Simulação do cenário 2 para dispersão de CO2 no pantanal
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%
PARAMETROS
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all; t0=cputime; %format long;
%
% parâmetros do modelo
%
a = 0.012; % coeficiente difusivo

```

```

s = 1.5e-2;          % coeficiente de degradação
V = 1.8;             % velocidade do vento
tet= -pi/4;          % direção do vento
c_m= 0.5;            % fonte de CO_2 media
Ap = (0.9-0.35);     % amplitude da fonte de CO_2
w = pi/4392;         % período do ciclo anual
b = 0.0;             % permeabilidade em Gama 1 e 2
%
%      malha do dominio (gerada pelo gmsh)
%
load malha_3455.mat;   % matriz malha dos elementos finitos indicando a
superficie
load nos_3455.mat;     % matriz de coordenadas dos nós
load front2.mat;       % vetor de nós nas fronteiras Gama 1 e 2
load malha_3455a.mat;  % matriz malha - só os nós
ntr = length(malha_3455a); % calculo do nº de elementos da malha
ntn = length(nos_3455); % calculo do nº de nós da malha
tfinal=4392;          % atribuição do instante final
itmax =40000;          % nº máximo de iterações no tempo
xmax = max(nos_3455(:,1)); % cálculo do valor máximo em no eixo x
ymax = max(nos_3455(:,2)); % cálculo do valor máximo no eixo y
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% calculo dos parametros da discretizacao
%
dt = tfinal/itmax;
mdt = dt/2;
%
%      preparacao dos parametros que independem das coordenadas
%
tt = [dt:dt:tfinal]; % vetor tempo (horas)
c1 = mdt*s;          % coef. aux (fi-j | fi-i)
c2 = mdt*a;          % coef. (grad fi-j | grad fi-i)
Vx = mdt*V*cos(tet); % coef. (d fi-j/dx | fi-i)
Vy = mdt*V*sin(tet); % coef. (d fi-j/dy | fi-i)
stm=(1+c1);          % coef. a esq (fi-j | fi-i)
stn=(1-c1);          % coef. a dir (fi-j | fi-i)
%
%      submatrizes de rigidez
%
%      (fi-j)*(fi-i)
%
mfi=[1/12 1/24 1/24; 1/24 1/12 1/24; 1/24 1/24 1/12];
%
%      submatrizes nas fronteiras Gama 1 e Gama 2
%
mfo=[1/3 1/6; 1/6 1/3];
%
%      montagem das matrizes do sistema

```

```

%
A = sparse(ntn,ntn);
B = sparse(ntn,ntn);
d = zeros(ntn,1);
u = zeros(ntn,1);
x=zeros(3);
y=x;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for itr=1:ntn
    for il=1:3
        ig = malha_3455a(itr,il);
        x(il)=nos_3455(ig,1);
        y(il)=nos_3455(ig,2);
    end
    jac = det([(x(2)-x(1)) (x(3)-x(1));(y(2)-y(1)) (y(3)-y(1))]);
    s = abs(jac);
%
% calculo das entradas p\ submatrizes restantes
%
    dfdx(1)=y(2)-y(3); dfdy(1)=x(3)-x(2);
    dfdx(2)=y(3)-y(1); dfdy(2)=x(1)-x(3);
    dfdx(3)=y(1)-y(2); dfdy(3)=x(2)-x(1);
%
% Obtendo a submatriz de rigidez para (grad fi_i | grad fi_j)
%
    gra1 = [(dfdx(1)^2) (dfdx(1)*dfdx(2)) (dfdx(1)*dfdx(3));(dfdx(2)*dfdx(1)) (dfdx(2)^2)
    (dfdx(2)*dfdx(3));(dfdx(3)*dfdx(1)) (dfdx(3)*dfdx(2)) (dfdx(3)^2)];
    gra2 = [(dfdy(1)^2) (dfdy(1)*dfdy(2)) (dfdy(1)*dfdy(3));(dfdy(2)*dfdy(1)) (dfdy(2)^2)
    (dfdy(2)*dfdy(3));(dfdy(3)*dfdy(1)) (dfdy(3)*dfdy(2)) (dfdy(3)^2)];
    mgf = gra1 + gra2;
%
% Obtendo a submatriz de rigidez para (d fi-j/dx | fi-i)
%
    mdx = [dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3)];
%
% Obtendo a submatriz de rigidez para (d fi-j/dy | fi-i)
%
    mdy = [dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)];
%
%
    for il=1:3
        ig = malha_3455a(itr,il);
        for jl=1:3
            jg = malha_3455a(itr,jl);
            soma =(c2/s)*mgf(il,jl) + (Vx*mdx(il,jl) + Vy*mdy(il,jl))*s*mdt/(6*jac);
            A(ig,jg) = A(ig,jg)+stm*s*mfi(il,jl)+soma;
            B(ig,jg) = B(ig,jg)+stn*s*mfi(il,jl)-soma;
        end
    end
end

```

```

end
u0 = zeros(ntn,1);
%
% Condicao inicial (distribuição de CO_2 sobre o domínio em t = 0)
%
for ii=1:ntr
    if malha_3455(ii,1)==147
        ig1 = malha_3455(ii,2);
        ig2 = malha_3455(ii,3);
        ig3 = malha_3455(ii,4);
        u0(ig1) = 0.01;
        u0(ig2) = u0(ig1);
        u0(ig3) = u0(ig1);
    end
end
%
% Resolucao iterativa do sistema
%
p1=zeros(itmax,1);
p2=zeros(itmax,1);
p3=zeros(itmax,1);
p4=zeros(itmax,1);
t = 0;
%
% montagem do grafico para a condição inicial e dos nós separados
%
fig=figure;
subplot(2,2,1)
trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 0'), set(gca,
'CLim', [-0.001, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
for it = 1:itmax
    p1(it)=u(160);
    p2(it)=u(300);
    p3(it)=u(1000);
    p4(it)=u(2100);
%
% montando a fonte em d para os nós do solo
%
for ii=1:ntr
    if malha_3455(ii,1)==147
        ig1 = malha_3455(ii,2);
        ig2 = malha_3455(ii,3);
        ig3 = malha_3455(ii,4);
        d(ig1) = dt*(c_m+(Ap/2)*cos(w*t));
        d(ig2) = d(ig1);
        d(ig3) = d(ig1);
    end
end
%
% Entrada/Saida nas fronteiras Gama 1 e 2

```

```

%
ntf = length(front2);
for itr1f=front2(1):front2(ntf);
    for ilocal=1:2;
        ig = front2(itr1f);
        x(ilocal)=nos_3455(ig,1);
        y(ilocal)=nos_3455(ig,2);
    end
    jac2 = sqrt((x(2)-x(1))*(x(2)-x(1))+(y(2)-y(1))*(y(2)-y(1)));
    for ilocal=1:2;
        ig = front2(itr1f);
        for jlocal=1:2;
            s0 = mdt*jac2*b*mfo(ilocal,jlocal);
        end
        d(ig) = d(ig)+s0;
    end
end
%
% Efetuando as operações do lado direito
%
dir=B*u0 + d;
%
% Resolvendo o sistema linear e atualizando valores
%
u=A\dir;
u0=u;
t = t + dt;
%
% construção dos gráficos para os instantes de tempos selecionados
%
if it==10000
    subplot(2,2,2)
    trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 1098
horas'),set(gca,'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
end
if it==20000
    subplot(2,2,3)
    trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 2196 horas'),
set(gca, 'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
end
if it==40000
    subplot(2,2,4)
    trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 4392 horas'),
set(gca, 'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
end
end
figure(2)
subplot(2,2,1)
plot(tt,p3),title('nó 160'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);

```



```

% calculo dos parametros da discretizacao
%
dt = tfinal/itmax;
mdt = dt/2;
%
%      preparacao dos parametros que independem das coordenadas
%
tt = [dt:dt:tfinal];      % vetor tempo (horas)
c1 = mdt*s;               % coef. aux (fi-j | fi-i)
c2 = mdt*a;               % coef. (grad fi-j | grad fi-i)
Vx = mdt*V*cos(tet);      % coef. (d fi-j/dx | fi-i)
Vy = mdt*V*sin(tet);      % coef. (d fi-j/dy | fi-i)
stm=(1+c1);               % coef. a esq (fi-j | fi-i)
stn=(1-c1);               % coef. a dir (fi-j | fi-i)
%
%      submatrizes de rigidez
%
%      (fi-j)*(fi-i)
%
mfi=[1/12 1/24 1/24; 1/24 1/12 1/24; 1/24 1/24 1/12];
%
%      submatrizes nas fronteiras Gama 1 e Gama 2
%
mfo=[1/3 1/6; 1/6 1/3];
%
%      montagem das matrizes do sistema
%
A = sparse(ntn,ntn);
B = sparse(ntn,ntn);
d = zeros(ntn,1);
u = zeros(ntn,1);
x=zeros(3);
y=x;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for itr=1:ntr
    for il=1:3
        ig = malha_3455a(itr,il);
        x(il)=nos_3455(ig,1);
        y(il)=nos_3455(ig,2);
    end
    jac = det([(x(2)-x(1)) (x(3)-x(1));(y(2)-y(1)) (y(3)-y(1))]);
    s = abs(jac);
%
%      calculo das entradas p\ submatrizes restantes
%
    dfdx(1)=y(2)-y(3); dfdy(1)=x(3)-x(2);
    dfdx(2)=y(3)-y(1); dfdy(2)=x(1)-x(3);
    dfdx(3)=y(1)-y(2); dfdy(3)=x(2)-x(1);
%

```

```

% Obtendo a submatriz de rigidez para (grad fi_i | grad fi_j)
%
    gra1 = [(dfdx(1)^2) (dfdx(1)*dfdx(2)) (dfdx(1)*dfdx(3));(dfdx(2)*dfdx(1)) (dfdx(2)^2)
    (dfdx(2)*dfdx(3));(dfdx(3)*dfdx(1)) (dfdx(3)*dfdx(2)) (dfdx(3)^2)];
    gra2 = [(dfdy(1)^2) (dfdy(1)*dfdy(2)) (dfdy(1)*dfdy(3));(dfdy(2)*dfdy(1)) (dfdy(2)^2)
    (dfdy(2)*dfdy(3));(dfdy(3)*dfdy(1)) (dfdy(3)*dfdy(2)) (dfdy(3)^2)];
    mgf = gra1 + gra2;
%
% Obtendo a submatriz de rigidez para (d fi-j/dx | fi-i)
%
    mdx = [dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3)];
%
% Obtendo a submatriz de rigidez para (d fi-j/dy | fi-i)
%
    mdy = [dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)];
%
%
    for il=1:3
        ig = malha_3455a(itr,il);
        for jl=1:3
            jg = malha_3455a(itr,jl);
            soma =(c2/s)*mgf(il,jl) + (Vx*mdx(il,jl) + Vy*mdy(il,jl))*s*mdt/(6*jac);
            A(ig,jg) = A(ig,jg)+stm*s*mfi(il,jl)+soma;
            B(ig,jg) = B(ig,jg)+stn*s*mfi(il,jl)-soma;
        end
    end
end
u0 = zeros(ntr,1);
%
% Condicao inicial (distribuição de CO_2 sobre o domínio em t = 0)
%
    for ii=1:ntr
        if malha_3455(ii,1)==147
            ig1 = malha_3455(ii,2);
            ig2 = malha_3455(ii,3);
            ig3 = malha_3455(ii,4);
            u0(ig1) = 0.01;
            u0(ig2) = u0(ig1);
            u0(ig3) = u0(ig1);
        end
    end
%
% Resolucao iterativa do sistema
%
p1=zeros(itmax,1);
p2=zeros(itmax,1);
p3=zeros(itmax,1);
p4=zeros(itmax,1);
t = 0;
%
```



```

% montagem do grafico para a condição inicial e dos nós separados
%
fig=figure;
    subplot(2,2,1)
        trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 0'), set(gca,
'CLim', [-0.001, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
for it = 1:itmax
    p1(it)=u(160);
    p2(it)=u(300);
    p3(it)=u(1000);
    p4(it)=u(2100);
%
% montando a fonte em d para os nós do solo
%
    for ii=1:ntr
        if malha_3455(ii,1)==147
            ig1 = malha_3455(ii,2);
            ig2 = malha_3455(ii,3);
            ig3 = malha_3455(ii,4);
            d(ig1) = dt*(c_m+(Ap/2)*cos(w*t));
            d(ig2) = d(ig1);
            d(ig3) = d(ig1);
        end
    end
%
% Entrada/Saida nas fronteiras Gama 1 e 2
%
    ntf = length(front2);
    for itr1f=front2(1):front2(ntf);
        for ilocal=1:2;
            ig = front2(itr1f);
            x(ilocal)=nos_3455(ig,1);
            y(ilocal)=nos_3455(ig,2);
        end
        jac2 = sqrt((x(2)-x(1))*(x(2)-x(1))+(y(2)-y(1))*(y(2)-y(1)));
        for ilocal=1:2;
            ig = front2(itr1f);
            for jlocal=1:2;
                s0 = mdt*jac2*b*mfo(ilocal,jlocal);
            end
            d(ig) = d(ig)+s0;
        end
    end
%
% Efetuando as operações do lado direito
%
    dir=B*u0 + d;
%
% Resolvendo o sistema linear e atualizando valores
%

```

```

u=A\dir;
u0=u;
t = t + dt;
%
% construção dos gráficos para os instantes de tempos selecionados
%
if it==10000
    subplot(2,2,2)
    trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 1098
horas'),set(gca,'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
end
if it==20000
    subplot(2,2,3)
    trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 2196 horas'),
set(gca, 'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
end
if it==40000
    subplot(2,2,4)
    trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 4392 horas'),
set(gca, 'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
end
end
figure(2)
subplot(2,2,1)
plot(tt,p3),title('nó 160'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
subplot(2,2,2)
plot(tt,p2),title('nó 300'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
subplot(2,2,3)
plot(tt,p1),title('nó 1000'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
subplot(2,2,4)
plot(tt,p4),title('nó 2100'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
e=cputime-t0;
disp('tempo');
disp(e);

%
% Simulação do cenário 4 para dispersão de CO2 no pantanal
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%          PARAMETROS          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all; t0=cputime; %format long;
%
%      parâmetros do modelo

```

```

%
a = 0.012;           % coeficiente difusivo
s = 1.5e-2;          % coeficiente de degradação
V = 3.6;             % velocidade do vento
tet= 3*pi/4;         % direção do vento
c_m= 0.5;            % fonte de CO_2 media
Ap = (0.9-0.35);     % amplitude da fonte de CO_2
w = pi/4392;         % período do ciclo anual
b = 0.0;             % permeabilidade em Gama 1 e 2
%
%      malha do dominio (gerada pelo gmsh)
%
load malha_3455.mat;   % matriz malha dos elementos finitos indicando a
superficie
load nos_3455.mat;    % matriz de coordenadas dos nós
load front2.mat;      % vetor de nós nas fronteiras Gama 1 e 2
load malha_3455a.mat; % matriz malha - só os nós
ntr = length(malha_3455a); % calculo do nº de elementos da malha
ntn = length(nos_3455); % calculo do nº de nós da malha
tfinal=4392;          % atribuição do instante final
itmax =40000;         % nº máximo de iterações no tempo
xmax = max(nos_3455(:,1)); % cálculo do valor máximo em no eixo x
ymax = max(nos_3455(:,2)); % cálculo do valor máximo no eixo y
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% calculo dos parametros da discretizacao
%
dt = tfinal/itmax;
mdt = dt/2;
%
%      preparacao dos parametros que independem das coordenadas
%
tt = [dt:dt:tfinal]; % vetor tempo (horas)
c1 = mdt*s;          % coef. aux (fi-j | fi-i)
c2 = mdt*a;          % coef. (grad fi-j | grad fi-i)
Vx = mdt*V*cos(tet); % coef. (d fi-j/dx | fi-i)
Vy = mdt*V*sin(tet); % coef. (d fi-j/dy | fi-i)
stm=(1+c1);          % coef. a esq (fi-j | fi-i)
stn=(1-c1);          % coef. a dir (fi-j | fi-i)
%
%      submatrizes de rigidez
%
%      (fi-j)*(fi-i)
%
mfi=[1/12 1/24 1/24; 1/24 1/12 1/24; 1/24 1/24 1/12];
%
%      submatrizes nas fronteiras Gama 1 e Gama 2
%
mfo=[1/3 1/6; 1/6 1/3];

```

```

%
%      montagem das matrizes do sistema
%
A = sparse(ntn,ntn);
B = sparse(ntn,ntn);
d = zeros(ntn,1);
u = zeros(ntn,1);
x=zeros(3);
y=x;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for itr=1:ntr
    for il=1:3
        ig = malha_3455a(itr,il);
        x(il)=nos_3455(ig,1);
        y(il)=nos_3455(ig,2);
    end
    jac = det([(x(2)-x(1)) (x(3)-x(1));(y(2)-y(1)) (y(3)-y(1))]);
    s = abs(jac);
%
%  calculo das entradas p\ submatrizes restantes
%
    dfdx(1)=y(2)-y(3); dfdy(1)=x(3)-x(2);
    dfdx(2)=y(3)-y(1); dfdy(2)=x(1)-x(3);
    dfdx(3)=y(1)-y(2); dfdy(3)=x(2)-x(1);
%
%  Obtendo a submatriz de rigidez para (grad fi_i | grad fi_j)
%
    gra1 = [(dfdx(1)^2) (dfdx(1)*dfdx(2)) (dfdx(1)*dfdx(3));(dfdx(2)*dfdx(1)) (dfdx(2)^2)
    (dfdx(2)*dfdx(3));(dfdx(3)*dfdx(1)) (dfdx(3)*dfdx(2)) (dfdx(3)^2)];
    gra2 = [(dfdy(1)^2) (dfdy(1)*dfdy(2)) (dfdy(1)*dfdy(3));(dfdy(2)*dfdy(1)) (dfdy(2)^2)
    (dfdy(2)*dfdy(3));(dfdy(3)*dfdy(1)) (dfdy(3)*dfdy(2)) (dfdy(3)^2)];
    mgf = gra1 + gra2;
%
%  Obtendo a submatriz de rigidez para (d fi-j/dx | fi-i)
%
    mdx = [dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3)];
%
%  Obtendo a submatriz de rigidez para (d fi-j/dy | fi-i)
%
    mdy = [dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)];
%
%
    for il=1:3
        ig = malha_3455a(itr,il);
        for jl=1:3
            jg = malha_3455a(itr,jl);
            soma =(c2/s)*mgf(il,jl) + (Vx*mdx(il,jl) + Vy*mdy(il,jl))*s*mdt/(6*jac);
            A(ig,jg) = A(ig,jg)+stm*s*mfi(il,jl)+soma;
            B(ig,jg) = B(ig,jg)+stn*s*mfi(il,jl)-soma;
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
u0 = zeros(ntr,1);
%
%  Condicao inicial (distribuição de CO_2 sobre o domínio em t = 0)
%
    for ii=1:ntr
        if malha_3455(ii,1)==147
            ig1 = malha_3455(ii,2);
            ig2 = malha_3455(ii,3);
            ig3 = malha_3455(ii,4);
            u0(ig1) = 0.01;
            u0(ig2) = u0(ig1);
            u0(ig3) = u0(ig1);
        end
    end
%
%  Resolucao iterativa do sistema
%
p1=zeros(itmax,1);
p2=zeros(itmax,1);
p3=zeros(itmax,1);
p4=zeros(itmax,1);
t = 0;
%
%  montagem do grafico para a condição inicial e dos nós separados
%
fig=figure;
    subplot(2,2,1)
        trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 0'), set(gca,
'CLim', [-0.001, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
    for it = 1:itmax
        p1(it)=u(160);
        p2(it)=u(300);
        p3(it)=u(1000);
        p4(it)=u(2100);
    end
%
%  montando a fonte em d para os nós do solo
%
    for ii=1:ntr
        if malha_3455(ii,1)==147
            ig1 = malha_3455(ii,2);
            ig2 = malha_3455(ii,3);
            ig3 = malha_3455(ii,4);
            d(ig1) = dt*(c_m+(Ap/2)*cos(w*t));
            d(ig2) = d(ig1);
            d(ig3) = d(ig1);
        end
    end
end

```

```

%
%  Entrada/Saida nas fronteiras Gama 1 e 2
%
    ntf = length(front2);
    for itrlf=front2(1):front2(ntf);
        for ilocal=1:2;
            ig = front2(itrlf);
            x(ilocal)=nos_3455(ig,1);
            y(ilocal)=nos_3455(ig,2);
        end
        jac2 = sqrt((x(2)-x(1))*(x(2)-x(1))+(y(2)-y(1))*(y(2)-y(1)));
        for ilocal=1:2;
            ig = front2(itrlf);
            for jlocal=1:2;
                s0 = mdt*jac2*b*mfo(ilocal,jlocal);
            end
            d(ig) = d(ig)+s0;
        end
    end
%
%  Efetuando as operações do lado direito
%
    dir=B*u0 + d;
%
%  Resolvendo o sistema linear e atualizando valores
%
    u=A\dir;
    u0=u;
    t = t + dt;
%
%  construção dos gráficos para os instantes de tempos selecionados
%
    if it==10000
        subplot(2,2,2)
        trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 1098
horas'),set(gca,'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
    end
    if it==20000
        subplot(2,2,3)
        trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 2196 horas'),
set(gca, 'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
    end
    if it==40000
        subplot(2,2,4)
        trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 4392 horas'),
set(gca, 'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
    end
end
figure(2)
subplot(2,2,1)

```

```

plot(tt,p3),title('nó 160'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
subplot(2,2,2)
plot(tt,p2),title('nó 300'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
subplot(2,2,3)
plot(tt,p1),title('nó 1000'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
subplot(2,2,4)
plot(tt,p4),title('nó 2100'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
e=cputime-t0;
disp('tempo');
disp(e);

%
% Simulação do cenário 5 para dispersão de CO2 no pantanal
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%          PARAMETROS          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all; t0=cputime; %format long;
%
%      parâmetros do modelo
%
a = 0.012;          % coeficiente difusivo
s = 1.5e-2;        % coeficiente de degradação
V = 10;            % velocidade do vento (m/h)
tet= 0;            % direção do vento
c_m= 0.5;          % fonte de CO_2 media
Ap = (0.9-0.35);   % amplitude da fonte de CO_2
w = pi/4392;       % período do ciclo anual
b = 0.0;           % permeabilidade em Gama 1 e 2
%
%      malha do dominio (gerada pelo gmsh)
%
load malha_3455.mat;          % matriz malha dos elementos finitos indicando a
superficie
load nos_3455.mat;           % matriz de coordenadas dos nós
load front2.mat;             % vetor de nós nas froteiras Gama 1 e 2
load malha_3455a.mat;        % matriz malha - só os nós
ntr = length(malha_3455a);   % calculo do nº de elementos da malha
ntn = length(nos_3455);      % calculo do nº de nós da malha
tfinal=4392;                 % atribuição do instante final
itmax =40000;                % nº máximo de iterações no tempo
xmax = max(nos_3455(:,1));    % cálculo do valor máximo em no eixo x
ymax = max(nos_3455(:,2));    % cálculo do valor máximo no eixo y

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
% calculo dos parametros da discretizacao
%
dt = tfinal/itmax;
mdt = dt/2;
%
%      preparacao dos parametros que independem das coordenadas
%
tt = [dt:dt:tfinal];      % vetor tempo (horas)
c1 = mdt*s;               % coef. aux (fi-j | fi-i)
c2 = mdt*a;               % coef. (grad fi-j | grad fi-i)
Vx = mdt*V*cos(tet);      % coef. (d fi-j/dx | fi-i)
Vy = mdt*V*sin(tet);      % coef. (d fi-j/dy | fi-i)
stm=(1+c1);               % coef. a esq (fi-j | fi-i)
stn=(1-c1);               % coef. a dir (fi-j | fi-i)
%
%      submatrizes de rigidez
%
%      (fi-j)*(fi-i)
%
mfi=[1/12 1/24 1/24; 1/24 1/12 1/24; 1/24 1/24 1/12];
%
% submatrizes nas fronteiras Gama 1 e Gama 2
%
mfo=[1/3 1/6; 1/6 1/3];
%
%      montagem das matrizes do sistema
%
A = sparse(ntn,ntn);
B = sparse(ntn,ntn);
d = zeros(ntn,1);
u = zeros(ntn,1);
x=zeros(3);
y=x;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for itr=1:ntr
    for il=1:3
        ig = malha_3455a(itr,il);
        x(il)=nos_3455(ig,1);
        y(il)=nos_3455(ig,2);
    end
    jac = det([(x(2)-x(1)) (x(3)-x(1));(y(2)-y(1)) (y(3)-y(1))]);
    s = abs(jac);
%
% calculo das entradas p\ submatrizes restantes
%
dfdx(1)=y(2)-y(3); dfdy(1)=x(3)-x(2);

```



```

dfdx(2)=y(3)-y(1); dfdy(2)=x(1)-x(3);
dfdx(3)=y(1)-y(2); dfdy(3)=x(2)-x(1);
%
% Obtendo a submatriz de rigidez para (grad fi_i | grad fi_j)
%
gra1 = [(dfdx(1)^2) (dfdx(1)*dfdx(2)) (dfdx(1)*dfdx(3));(dfdx(2)*dfdx(1)) (dfdx(2)^2)
(dfdx(2)*dfdx(3));(dfdx(3)*dfdx(1)) (dfdx(3)*dfdx(2)) (dfdx(3)^2)];
gra2 = [(dfdy(1)^2) (dfdy(1)*dfdy(2)) (dfdy(1)*dfdy(3));(dfdy(2)*dfdy(1)) (dfdy(2)^2)
(dfdy(2)*dfdy(3));(dfdy(3)*dfdy(1)) (dfdy(3)*dfdy(2)) (dfdy(3)^2)];
mgf = gra1 + gra2;
%
% Obtendo a submatriz de rigidez para (d fi-j/dx | fi-i)
%
mdx = [dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3)];
%
% Obtendo a submatriz de rigidez para (d fi-j/dy | fi-i)
%
mdy = [dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)];
%
%
for il=1:3
    ig = malha_3455a(itr,il);
    for jl=1:3
        jg = malha_3455a(itr,jl);
        soma =(c2/s)*mgf(il,jl) + (Vx*mdx(il,jl) + Vy*mdy(il,jl))*s*mdt/(6*jac);
        A(ig,jg) = A(ig,jg)+stm*s*mfi(il,jl)+soma;
        B(ig,jg) = B(ig,jg)+stn*s*mfi(il,jl)-soma;
    end
end
end
u0 = zeros(ntr,1);
%
% Condição inicial (distribuição de CO_2 sobre o domínio em t = 0)
%
for ii=1:ntr
    if malha_3455(ii,1)==147
        ig1 = malha_3455(ii,2);
        ig2 = malha_3455(ii,3);
        ig3 = malha_3455(ii,4);
        u0(ig1) = 0.01;
        u0(ig2) = u0(ig1);
        u0(ig3) = u0(ig1);
    end
end
%
% Resolução iterativa do sistema
%
p1=zeros(itmax,1);
p2=zeros(itmax,1);
p3=zeros(itmax,1);

```

```

p4=zeros(itmax,1);
t = 0;
%
% montagem do grafico para a condição inicial e dos nós separados
%
fig=figure;
    subplot(2,2,1)
        trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 0'), set(gca,
'CLim', [-0.001, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
for it = 1:itmax
    p1(it)=u(160);
    p2(it)=u(300);
    p3(it)=u(1000);
    p4(it)=u(2100);
%
% montando a fonte em d para os nós do solo
%
    for ii=1:ntr
        if malha_3455(ii,1)==147
            ig1 = malha_3455(ii,2);
            ig2 = malha_3455(ii,3);
            ig3 = malha_3455(ii,4);
            d(ig1) = dt*(c_m+(Ap/2)*cos(w*t));
            d(ig2) = d(ig1);
            d(ig3) = d(ig1);
        end
    end
%
% Entrada/Saida nas fronteiras Gama 1 e 2
%
    ntf = length(front2);
    for itr1f=front2(1):front2(ntf);
        for ilocal=1:2;
            ig = front2(itr1f);
            x(ilocal)=nos_3455(ig,1);
            y(ilocal)=nos_3455(ig,2);
        end
        jac2 = sqrt((x(2)-x(1))*(x(2)-x(1))+(y(2)-y(1))*(y(2)-y(1)));
        for ilocal=1:2;
            ig = front2(itr1f);
            for jlocal=1:2;
                s0 = mdt*jac2*b*mfo(ilocal,jlocal);
            end
            d(ig) = d(ig)+s0;
        end
    end
%
% Efetuando as operações do lado direito
%
    dir=B*u0 + d;

```

```

%
%   Resolvendo o sistema linear e atualizando valores
%
u=A\dir;
u0=u;
t = t + dt;
%
%   construção dos gráficos para os instantes de tempos selecionados
%
if it==10000
    subplot(2,2,2)
    trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 1098
horas'),set(gca,'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
end
if it==20000
    subplot(2,2,3)
    trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 2196 horas'),
set(gca, 'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
end
if it==40000
    subplot(2,2,4)
    trisurf(malha_3455a,nos_3455(:,1),nos_3455(:,2),u0),view(0,90),title('t = 4392 horas'),
set(gca, 'CLim', [0, 2]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
end
end
figure(2)
subplot(2,2,1)
plot(tt,p3),title('nó 160'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
subplot(2,2,2)
plot(tt,p2),title('nó 300'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
subplot(2,2,3)
plot(tt,p1),title('nó 1000'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
subplot(2,2,4)
plot(tt,p4),title('nó 2100'),ylabel('Concentração (g/m^2)'),xlabel('tempo (horas)'),grid on,
axis([0 tfinal 0 2.4]);
e=cputime-t0;
disp('tempo');
disp(e);

```

