

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA AMBIENTAL

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DA
DISPERSÃO DE METANO NO
RESERVATÓRIO DE SANTO
ANTÔNIO-RONDÔNIA**

EVANÍZIO MARINHO DE MENEZES JÚNIOR

ORIENTADOR: PROF.DR. GERALDO LÚCIO DINIZ

Cuiabá, MT
Julho de 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA AMBIENTAL

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DA DISPERSÃO DE
METANO NO RESERVATÓRIO DE SANTO
ANTÔNIO-RONDÔNIA**

EVANÍZIO MARINHO DE MENEZES JÚNIOR

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física Ambiental como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física Ambiental.

Orientador: PROF.DR. GERALDO LÚCIO DINIZ

Cuiabá, MT
Julho de 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

M543m Menezes, Evanizio Marinho de Menezes Júnior.
Modelagem e simulação da dispersão de metano sobre o reservatório da hidrelétrica de Santo Antônio-RO. : Modelagem e simulação de metano sobre o reservatório da hidrelétrica de Santo Antônio-RO / Evanizio Marinho de Menezes Júnior Menezes. -- 2017
xii, 48 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Geraldo Lúcio Diniz.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Física Ambiental, Cuiabá, 2017.
Inclui bibliografia.

1. Amazônia. 2. metano. 3. contaminação ambiental. 4. reservatório. 5. gases de efeito estufa. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.

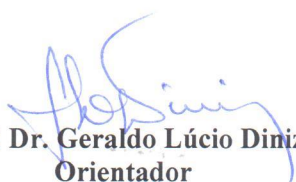
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física Ambiental

FOLHA DE APROVAÇÃO

**TÍTULO: MODELAGEM E SIMULAÇÃO DA DISPERSÃO DE METANO
NO RESERVATÓRIO DE SANTO ANTÔNIO – RONDÔNIA**

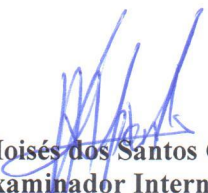
AUTOR: EVANÍZIO MARINHO DE MENEZES JÚNIOR

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 31 de julho de 2017, pela comissão julgadora:



Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz
Orientador

Instituto de Ciências Exatas e da Terra - UFMT



Prof. Dr. Moisés dos Santos Ceconello
Examinador Interno

Instituto de Ciências Exatas e da Terra - UFMT



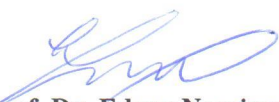
Prof. Dr. André Krindges
Examinador Interno

Instituto de Ciências Exatas e da Terra - UFMT



Prof. Dr. William de Souza Pereira
Examinador Externo

Instituto Federal de Educação, Ciência e
Tecnologia de Mato Grosso – IFMT



Prof. Dr. Edgar Nascimento
Examinador Externo

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso – IFMT

"Quanto a mim, eu já me ofereci em libação, e chegou o tempo de minha partida. Combati o bom combate, terminei a corrida, conservei a fé."

Agradecimentos

Agradeço ao Criador por tudo de significativo que tenho passado nessa minha caminhada.

Agradeço ao meu pai, Evanízio Marinho de Menezes, que na mais tenra idade ensinou o valor dos estudos e o significado do esforço contínuo.

Agradeço demais a minha mãe, Maria das Graças de Menezes, pela educação, pelos cuidados, puchões de orelhas, meu obrigado.

Especiais agradecimentos são também evocados aos meus irmãos, Hamilton Almeida de Menezes, Jorge Almeida de Menezes e Gianni Almeida de Menezes.

Minha esposa, Cristiane Cruz de Oliveira Menezes, que me passou a tranquilidade do lar e incentivos na hora e medida certa e a meus filhos, João Vítor, Samuel, e Mariane, grandes figuras.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-Graduação em Física Ambiental, Denilton, Marcelo, Sérgio Roberto, Iramaia, Marta Cristina, Nádia, Paulão, Carlos Ralph, ao professor Paraná, aos professores José Maurício da Cunha e Milton César Costa Campos, aos colegas de turma, e a todos aqueles que contribuíram na realização deste trabalho. Ao Prof. Dr. André Krindges, pela paciência em momentos delicados, meu obrigado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz, pela oportunidade, pelos ensinamentos, por toda a orientação nos momentos de dificuldades sem as quais teria tornado o trabalho mais arduo, meu obrigado.

Agradeço a CAPES, que forneceu todo o suporte financeiro para a realização do DINTER UFAM/UFMT, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

Resumo

JÚNIOR MENEZES, E. M.. Modelagem e simulação da dispersão de metano no Reservatório de Santo Antônio - Rondônia. Cuiabá, 2017, 48f. Tese (Doutorado em Física Ambiental) –Instituto de Física, Universidade Federal de Mato Grosso.

Neste trabalho foi investigada a dispersão de metano atmosférico oriundo do lago formado pelo represamento do Rio Madeira no estado de Rondônia. É proposto um modelo matemático para simular a dinâmica superficial de metano na região da Usina Hidrelétrica de Santo Antônio/RO. O modelo tem como objetivo simular cenários da dispersão de metano próximo à superfície do reservatório da hidrelétrica e foi elaborado a partir de uma equação geral de difusão-advecção-reação para o metano. A aproximação numérica foi obtida com o uso do método dos elementos finitos (MEF) para as aproximações espaciais e o método de Crank-Nicolson para as aproximações temporais. A abordagem proporcionou cenários para os campos direcionais dos fluxos de metano para diferentes períodos e os resultados sugerem relação com a localização no reservatório, com a biomassa alagada, com águas escuras e com componentes advectivas para a dispersão da gás.

Palavras-chave: Amazônia; metano; contaminação ambiental; gases de efeito estufa; represa hidrelétrica.

Abstract

JÚNIOR MENEZES, E. M. Modeling and simulation of the methane dispersion in the Santo Antônio Dam - Rondônia. Cuiabá, 2016, 48f. Thesis (Doctorate in Environmental Physics) -Institute of Physics, Federal University of Mato Grosso.

In this work, a mathematical model of the dispersion of atmospheric methane is proposed for the lake formed by the damming of the Madeira River in the state of Rondônia for the use of model is simulated the surface dynamics of methane in the region of the Santo Antônio Hydroelectric Dam at Rondônia. The model was elaborated from a general diffusion-advection-reaction for methane. The numerical approximation was obtained with the use of the finite element method (MEF) for the spatial approximations and the Crank-Nicolson method for temporal approximations. The approach provided scenarios for the directional fields of methane fluxes for different time periods and the results suggest a relation to the location in the reservoir, with flooded biomass, with dark waters and with advective components for the dispersion of the gas.

Keywords: Amazon; Environmental contamination; greenhouse gases; Dam.

Sumário

	Sumário	ix
	Lista de ilustrações	xi
	Lista de tabelas	xii
	Introdução	1
1	O GÁS METANO EM RESERVATÓRIOS TROPICAIS	3
1.1	Justificativa	5
1.2	O reservatório da Hidrelétrica de Santo Antônio	6
1.3	Objetivos	7
2	O PROBLEMA E A FORMULAÇÃO DO MODELO	8
2.1	O problema	8
2.2	A formulação do modelo proposto	9
2.2.1	A região 1	10
2.2.2	A região 2	12
3	FORMULAÇÃO VARIACIONAL PARA A EQUAÇÃO CLÁSSICA	13
3.0.1	Existência e unicidade da solução	15
3.0.2	Discretização espacial e temporal	19
3.0.3	Estabilidade numérica	22
4	CONCEITOS FUZZY APLICADOS A PROBLEMAS AMBIENTAIS	24
4.1	Abordagem fuzzy para o coeficiente de difusão	25
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	29
5.1	Introdução	29
5.2	A região 1	29
5.3	A região 2	36
6	CONCLUSÃO	44
	REFERÊNCIAS	45
	APÊNDICE A – CÓDIGO USADO PARA AS SIMULAÇÕES DA REGIÃO 1	49

APÊNDICE B – CÓDIGO USADO PARA AS SIMULAÇÕES DA REGIÃO 2	55
---	----

Lista de ilustrações

Figura 1 – Emissões de Metano. Fonte: Adaptado de (NOOA, 2017).	3
Figura 2 – Alagamento do reservatório de Santo Antônio em fevereiro de 2012.	4
Figura 3 – Reservatório da Hidrelétrica de Santo Antônio/RO.	6
Figura 4 – Regiões do reservatório da Hidrelétrica de Santo Antônio/RO.	10
Figura 5 – Região 1 do reservatório da Hidrelétrica de Santo Antônio/RO.	11
Figura 6 – Região 2 do reservatório da Hidrelétrica de Santo Antônio/RO.	12
Figura 7 – Discretização da região 1 de Ω .	20
Figura 8 – Discretização da região 2 de Ω .	20
Figura 9 – Funções de pertinência da variável temperatura.	26
Figura 10 – Funções de pertinência da variável altitude.	26
Figura 11 – Funções de pertinência para a coeficiente de difusão.	26
Figura 12 – Gráficos difusão $\times$ altitude.	27
Figura 13 – Gráficos difusão $\times$ temperatura.	27
Figura 14 – Gráfico difusão em função da temperatura e da altitude.	28
Figura 15 – Condição inicial para a região 1.	30
Figura 16 – Condição para a região 1 com 5 iterações (0,12 h).	31
Figura 17 – Condição para a região 1 com 10 iterações (0,24 h).	31
Figura 18 – Condição para a região 1 com 15 iterações (0,36 h).	32
Figura 19 – Condição para a região 1 com 20 iterações (0,48 h).	33
Figura 20 – Condição para a região 1 com 25 iterações (0,50 h).	34
Figura 21 – Condição para a região 1 com 4 períodos de tempo.	34
Figura 22 – Localização dos nós para a regioao 1.	35
Figura 23 – Concentração de 4 nós para a regioao 1.	36
Figura 24 – Condição inicial para a região 2.	37
Figura 25 – Cenário de dispersão para a região 2 com 5 iterações (0,12 h).	37
Figura 26 – Cenário de dispersão para a região 2 com 10 iterações (0,24 h).	38
Figura 27 – Cenário de dispersão para a região 2 com 15 iterações (0,36 h).	39
Figura 28 – Cenário de dispersão para a região 2 com 20 iterações (0,48 h).	39
Figura 29 – Cenário de dispersão para a região 2 com 25 iterações (0,50 h).	40
Figura 30 – Cenário para a região 2 com $t=0$ h, $t=8$ h, $t=16$ h e $t=24$ h.	41
Figura 31 – Região 2 com a localização dos nós escolhidos.	42
Figura 32 – Concentração dos nós para região 2.	42

Lista de tabelas

Tabela 1 – Parâmetros utilizados nas simulações para a região 1.	30
Tabela 2 – Parâmetros utilizados nas simulações para a região 2.	36

Lista de símbolos

Γ	Gama
ζ	zeta
∞	Infinito
$\in$	Pertence
H^1	Espaço de Sobolev de ordem 1
L^2	Espaço de Banach (funções de quadrado integrável)
∇	Operador nabla
σ	Sigma
α	Alfa
Δ	Delta
η	Eta
Ω	Omega
ν	Nu
Σ	Sigma
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\forall$	Para todo
∂	partial

Introdução

A dinâmica de ecossistemas tropicais tem recebido destacada relevância considerando os efeitos que o aquecimento global pode ter na Amazônia, assim como a necessidade de compreender efeitos da mudança da cobertura terrestre, nos ciclos biogeoquímicos regionais e o papel dos ecossistemas terrestres tropicais no balanço de carbono. Atividades baseadas em explorações de recursos naturais podem alterar significativamente paisagens e ecossistemas, como os fluxos de energia entre os sistemas naturais. As características climáticas de uma região podem sofrer alterações pelo desenvolvimento local da mesma, como as alterações do ciclo hidrológico em um empreendimento hidrelétrico.

As melhores alternativas hidroenergéticas disponíveis encontram-se na região Amazônica, onde se concentram 51% de todo o potencial hidrelétrico brasileiro sendo que, até 2000, apenas 5% do potencial hidrelétrico regional encontrava-se em exploração. Sob o aspecto energético, o rio Madeira é extremamente atrativo devido às significativas variações de nível d'água entre os períodos seco e úmido, associadas a uma das melhores curvas de permanência de vazões da Amazônia. Esse regime hidrológico particular do Madeira viabiliza soluções de engenharia, com reservatórios reduzidos que, associados ao baixo tempo de residência hidráulica, contribuem para a redução de alguns efeitos ambientais, constituindo-se em fator positivo determinante no aspecto ambiental.

A região a ser inundada em um reservatório hidrelétrico tem como característica a destruição de parte da floresta nativa, tendo como consequência o aumento da temperatura do ar, ocasionando alterações na capacidade deste em reter vapor d'água. Além do potencial para geração elétrica, o rio Madeira possui, historicamente, uma vocação natural para a navegação que remonta a um passado pré-histórico, ampliado desde as primeiras bandeiras portuguesas que se aventuraram pela região e que representa hoje uma importante via de integração regional, no transporte de pessoas e cargas.

Dessa forma, deve-se ainda considerar que as potencialidades hidrelétricas dos aproveitamentos de Jirau (3.300 MW) e Santo Antônio (3.150 MW) poderão agregar-se a outros aproveitamentos hidrelétricos e todo um sistema hidroviário conjugado, que permitirá a integração sul-americana, em função da proximidade com a Bolívia e com o Peru, abrindo espaços para projetos de infra-estrutura energética e de transportes entre os três países, impulsionando o desenvolvimento regional.

Assim, avalia-se que um empreendimento hidrelétrico pode produzir a alteração de características climáticas regionais. A emissão de gases de efeito estufa na Amazônia podem gerar desequilíbrio em ecossistemas naturais, alterando ciclos hidrológicos e proporcionar, entre outros fatores, aumento de absorção da chamada janela atmosférica. A importância

do gás metano na atmosfera está relacionada com o efeito estufa, contribuindo com cerca de 20% do efeito observado, além de ser um dos principais sumidouros do radical hidroxila (OH), influenciando assim a capacidade oxidante da atmosfera.

As condições determinantes para a produção e liberação desse gás para a atmosfera dependem de muitos fatores, como a matéria orgânica em decomposição, temperatura, pH, entre outros. A capacidade de monitoramento de fatores ambientais que podem gerar desequilíbrio para a região torna-se um desafio, considerando-se as dimensões envolvidas e as possíveis logísticas necessárias para implementação. Considerando este contexto, a implementação de metodologias que possam contribuir para entendimento da dinâmica de gases de efeito estufa para a região torna-se relevante.

O capítulo 1 apresenta a questão de emissões de gases de efeito estufa (GEE) em reservatórios de usinas hidrelétricas. O capítulo 2 apresenta a modelagem na sua formulação clássica com o modelo variacional, juntamente com as condições de contorno para as regiões analisadas no reservatório. O capítulo 3 apresenta a formulação clássica do problema, juntamente com a formulação variacional, com as discretizações espaciais e temporais. O capítulo 4 apresenta os conceitos e aplicações da teoria fuzzy aplicados para a obtenção do coeficiente de difusão. No capítulo 5 são apresentados resultados e discussões das simulações para as duas regiões analisadas no reservatório. No capítulo 6 são apresentadas as conclusões sobre o trabalhos e propostas para trabalhos futuros.

1 O gás metano em reservatórios tropicais

Apesar do aumento dos estudos referentes às medições, as emissões naturais de gases de efeito estufa em ambientes aquáticos na Amazônia ainda são pouco estudados (BASTVIKEN, 2009). A emissão de gás metano tem crescido ao longo dos anos, em uma proporção que desperta preocupação na comunidade científica. Dados da evolução de metano na atmosfera podem ser observados na figura 1.

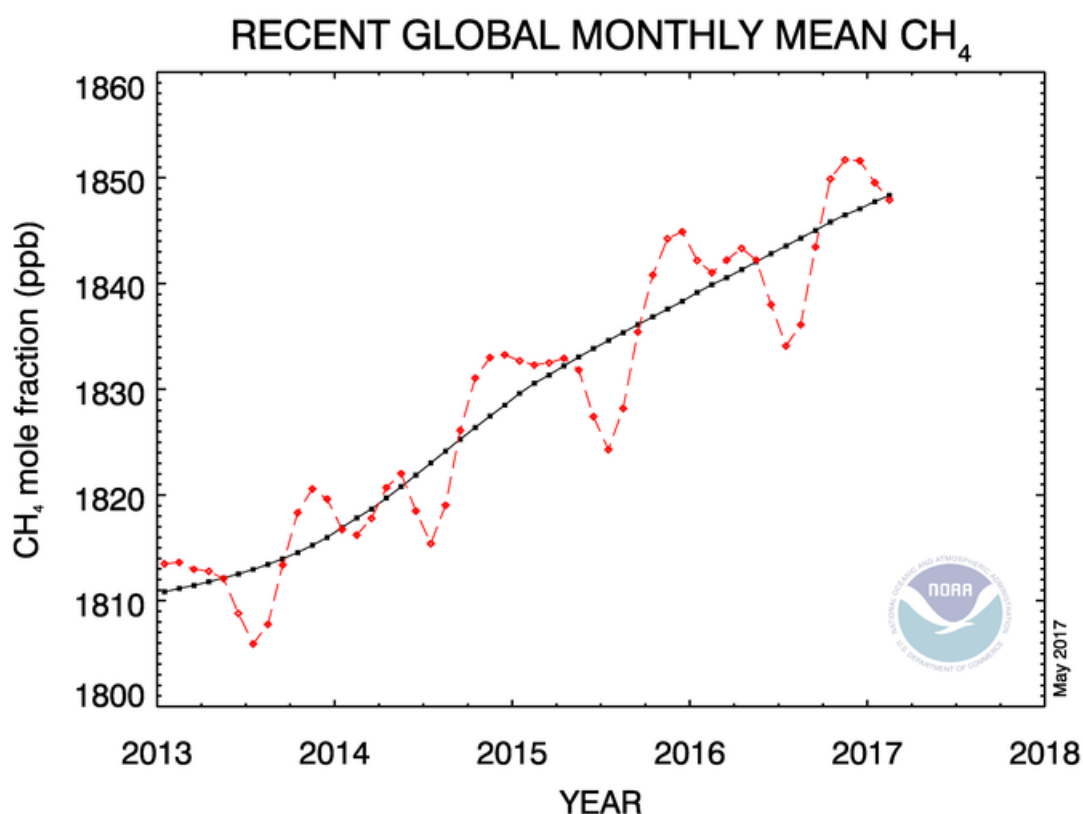


Figura 1 – Emissões de Metano. Fonte: Adaptado de (NOOA, 2017).

Nos últimos 20 anos, os reservatórios de hidrelétricas foram identificados como importantes fontes de gases de efeito estufa (DEMARTY; BASTIEN; TREMBLAY, 2011). A liberação de metano para a atmosfera ocorre devido a ação de metanobacterias (*Archaea*), responsáveis pela decomposição de matéria orgânica para a obtenção de energia (KEPPLER et al., 2006; WUEBBLES; HAYHOE, 2002).

A decomposição de matéria orgânica envolve processos complexos, onde, segundo Cicerone e Oremland (1988), fatores externos como temperatura, pH, e concentração de oxigênio existente no meio podem influenciar no processo tendo no fim a produção de

metano. As emissões de gases podem ser maior em cerca de 400% em lagos tropicais, de acordo com Bastviken et al. (2004), em relação às emissões em lagos temperados e boreais.



Figura 2 – Alagamento do reservatório de Santo Antônio em fevereiro de 2012.

Podemos observar matéria orgânica sendo inundada em fevereiro de 2012 no reservatório da hidrelétrica de Santo Antônio na figura 2. Em ambientes aquáticos sujeitos à sazonalidade das inundações, a emissão de CH_4 por ebulição pode ser uma importante fonte para a atmosfera, podendo corresponder a até 90% da emissão total deste gás (MARANI; ALVALA, 2007).

O metano é, após o CO_2 , o gás que mais impacta no efeito estufa, tendo uma banda de absorção de radiação infravermelha entre 7 e $8\mu m$ da chamada janela atmosférica. Nessa região do espectro, gases com capacidade de absorção podem ter alguma relação com o balanço de radiação no sistema Terra-atmosfera, contribuindo para o seu desequilíbrio.

A produção de gás metano pode ocorrer de duas formas, sendo a primeira por fontes naturais, como áreas alagadas, ou por matéria orgânica em decomposição, ou ainda por bactérias em meios livres de oxigênio, tais como sedimentos aquáticos ou esgotos; a segunda forma ocorre através de atividades antrópicas como a pecuária, o cultivo de arroz, queima de combustíveis fósseis e aterros sanitários.

A liberação para a atmosfera de metano ocorre aproximadamente na relação de 2/3 para os processos antrópicos e 1/3 para os processos naturais, não havendo precisão

na participação de cada fonte nesse processo (KIRSCHKE et al., 2013; CRESSOT et al., 2014). Não há uma relação de proporcionalidade entre o número de fontes de gás metano e a quantidade de sumidouro. A maior parte de metano emitido é retirada por reação química com o radical OH na troposfera, principal sumidouro desse gás (BOUSQUET et al., 2006). Apesar de termos sumidouros naturais, tem-se observado um excedente de emissão de gás metano em relação ao removido anualmente, ocasionando aumento da concentração na atmosfera (HEIN; CRUTZEN; HEIMANN, 1997; HOUWELING et al., 1999). Por molécula, o metano é um gás de efeito estufa 20 vezes mais efetivo que o CO_2 .

1.1 Justificativa

O aumento das emissões de gases de efeito estufa com origem antrópica tem se mostrado uma área de grande interesse por parte de pesquisadores em anos recentes (TRAVINK et al., 2009; BARROS et al., 2011). Há cerca de duas décadas, Rudd et al. (1993) abordou o problema das emissões de gases de efeito estufa (GEE) em reservatórios ao afirmar que os mesmos são potenciais emissores de GEE em comparação com as usinas termoeletricas convencionais por unidade de energia produzida e impulsionou vários trabalhos neste sentido (ROSA; SCHAFFER, 1994; GAGNON; CHAMBERLAND, 1993; SVENSSON; ERICSON, 1993).

Mesmo com os avanços alcançados nos últimos anos, há espaços para áreas de pesquisa como a distribuição espaço temporal das emissões de GEE em locais de difícil monitoramento, como os reservatórios das hidrelétricas do bioma amazônico, caracterizado por suas dificuldades de acesso e atualização das informações disponíveis no sentido de tomada de decisões. Diferentes regiões em termos de fluxos de CH_4 podem ser observadas nos reservatórios devido a dependência de biomassa afundada, alterações nos níveis dos rios, entrada de matéria orgânica e o regime de operações nas barragens. A região encontra-se sub-representada no cenário de emissões de gases de efeito estufa, levando em conta fluxos de lagos de climas frios e temperados.

Em uma análise mais ampla de emissões de ~ 5000 lagos apenas 2% representam lagos tropicais com a maioria dos estudos voltados à emissão de CO_2 (SOBEK; TRAVIK; COLE, 2005), negligenciando o efeito da emissão de CH_4 . Considerando o contexto colocado acima e levando em consideração as dimensões dos reservatórios e as variações nos níveis de água ao longo do ano, amostras realizadas em lugares específicos dos reservatórios não tem o poder de mensurar o fluxo de gases de efeito estufa, como o metano. Desta forma, justifica-se o uso da modelagem matemática e conceitos de lógica fuzzy para uma melhor compreensão dos fenômenos aqui descritos por terem demonstrado grande potencial para estudos em modelagem de biomas em ecologia.

1.2 O reservatório da Hidrelétrica de Santo Antônio

A Usina Hidroelétrica de Santo Antônio encontra-se instalada no rio Madeira, distante 7 km de Porto Velho, estado de Rondônia, nas coordenadas geográficas $08^{\circ}48'04''$ S e $63^{\circ}56'59,8''$ W. A UHE Santo Antônio tem uma área de 546 km^2 , e uma área de drenagem de $41.988.873 \text{ km}^2$. O rio Madeira tem vazão que varia de 4 mil m^3 por segundo na época de seca e 45 mil m^3 por segundo na cheia. As áreas inundadas serão praticamente as mesmas que ocorrem durante as cheias anuais do rio Madeira. A potência instalada é de 3.150 MW com 50 turbinas de tipo bulbo.

Por transportar uma quantidade enorme de sedimentos como argila, silte e areia, as águas do Rio Madeira são turvas o ano todo, depositando estes sedimentos em suas várzeas.

De acordo com a classificação de Köppen, a região possui um clima tropical chuvoso tipo “Am”, as temperaturas médias são próximas a 25°C , mas pode atingir os 35°C em alguns dias entre setembro e novembro, período tipicamente quente. No inverno podem ser registrados valores inferiores a 9°C entre junho e julho, período com menor precipitação.

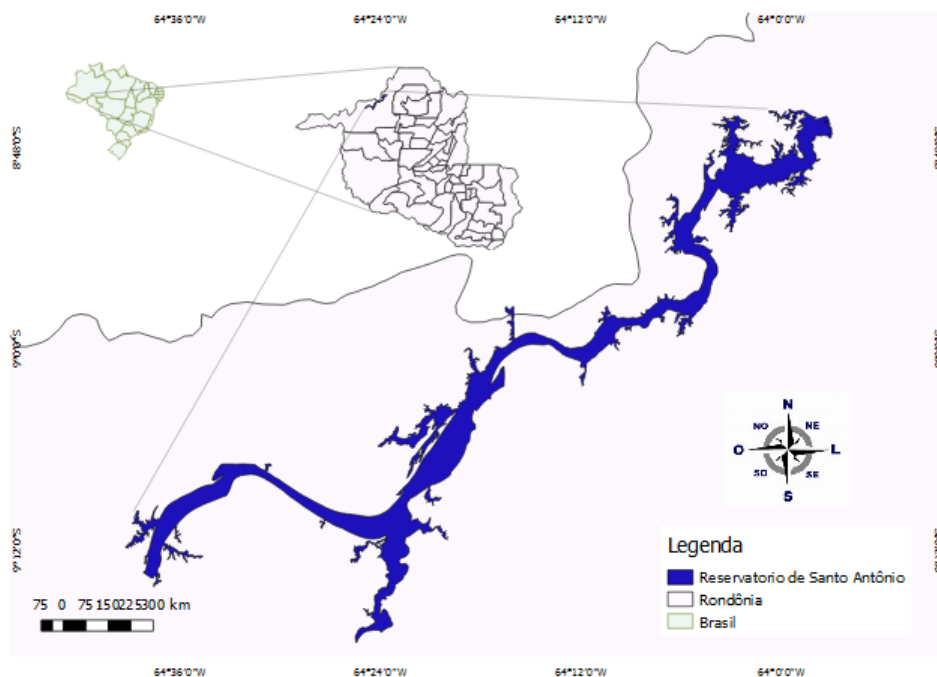


Figura 3 – Reservatório da Hidrelétrica de Santo Antônio/RO.

Na região de Santo Antônio, especialmente às margens do rio Madeira, se observam formações florestais conhecidas localmente como florestas de terra firme que se caracterizam pela presença de árvores espaçadas, formando um dossel aberto, com altura média de 40 m, de onde emergem árvores maiores, dentre as quais a castanha-do-pará, o tauari, a muiracatiara e o angelim, com até 55 m de altura.

Em meio a essas formações florestais, se encontram agrupamentos de palmeiras, em especial de babaçu, inajá e tucumã, formando mosaicos. A umidade do ar é alta, variando entre 81%, em julho, e 89%, em dezembro. O clima quente e úmido, a qualidade dos solos e outras condições geográficas proporcionam a toda a região amazônica uma cobertura vegetal notoriamente densa, abundante e diversificada.

O ciclo hidrológico, marcado por cheias e secas característico da região, influenciam a composição físico-química e biológica das águas do Madeira pela fonte diferenciada da água e pelo volume que causa o alagamento das várzeas incorporando enorme volume de material alóctone no rio.

O clima equatorial tropical da bacia Amazônica e a baixa altitude na região estudada influenciam a estrutura térmica das águas. A temperatura das águas é, durante todo o ano, bastante homogênea, não havendo uma variação sazonal marcada nem estratificação vertical na coluna d'água.

1.3 Objetivos

Levando em consideração as emissões de gases de efeito estufa e as incertezas quanto à contribuição dos reservatórios de hidrelétricas neste processo, é que se propõe o presente estudo. Assim, o objetivo do trabalho é analisar a dispersão de metano na região da hidrelétrica de Santo Antônio, através da modelagem matemática incorporando características fuzzy na equação diferencial parcial de difusão-advecção-reação.

2 O problema e a formulação do modelo

2.1 O problema

A modelagem de substâncias como o metano apresenta o desafio de obter-se conhecimento relevante do comportamento desse gás no ambiente e usar este conhecimento para fazer as simplificações necessárias na implementação do modelo. As dificuldades na obtenção de medidas de metano em regiões amazônicas constituem ainda um desafio, ou pelas dimensões envolvidas ou pelos processos pelos quais o gás é produzido e emitido para a superfície.

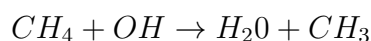
A emissão de metano para a atmosfera depende de vários fatores que interagem, como a matéria orgânica, que segundo [Meybeck \(1993\)](#), clima, textura dos solos circundantes, fauna e flora, uso da terra e também processos geoquímicos refletem a diferença de emissões entre lagos e rios; os nutrientes, onde uma maior quantidade de matéria orgânica decomposta, fixada pela fotossíntese, é reciclada como CO_2 em águas óxicas e CH_4 em condições anóxicas.

A alta produção primária pode, durante o verão, reduzir a emissão de CO_2 para a atmosfera funcionando como um coletor; segundo [Barros et al. \(2011\)](#) alguns dos maiores fluxos de metano foram obtidos em ambientes eutróficos.

A presença ou não de oxigênio é considerada crucial para a metanogênese ocorrer, pois na presença de CH_4 e oxigênio, bactérias metanotróficas oxidam CH_4 em CO_2 .

Desta forma, segundo [Rosa et al. \(2004\)](#), [Bastviken \(2009\)](#), os níveis de oxigênio em um reservatório decidem se CH_4 ou CO_2 devem ser produzidos ou emitidos quando a matéria orgânica é produzida; trabalhos desenvolvidos por [Kelly et al. \(1994\)](#), [Louis et al. \(2000\)](#), indicam que a idade dos reservatórios afeta os fluxos de emissão de gases de efeito estufa, com maior emissão de reservatórios mais jovens em comparação com os antigos, isto devido a matéria orgânica recém inundada, como folhas e lixos, que decompõe-se mais rapidamente que carbono mais velhos e robustos, como a turfa e o carbono em solos.

A temperatura alta tem o potencial de aumentar os processos biológicos, incluindo decomposição da matéria orgânica por bactérias, que permite a libertação de CH_4 e CO_2 para a atmosfera. A concentração atmosférica de CH_4 é controlada pela reação com radicais hidroxila na troposfera via reação



Esta reação é em grande parte responsável pelo vapor de água na atmosfera; as

medidas de fluxos de CH_4 podem variar com alta frequência e são influenciados de forma intensa por fatores externos como as condições climáticas. Ventos e chuvas misturados a água podem intensificar as emissões de gases de efeito estufa (UNESCO, 2009).

Trabalhos de campo (HALLQVIST, 2012) sugerem emissões significativas em afluentes, regiões de águas pretas e rio abaixo da barragem de Santo Antônio, oscilando de 0 a $39,6 \mu \text{ mol/km}^2/\text{dia}$.

A variação indica associação com a localização no reservatório.

2.2 A formulação do modelo proposto

A equação utilizada neste trabalho é conhecida por equação de difusão-advecção-reação, que modela fenômenos relacionados a dispersão de poluentes em sistema lacustres e está associada a análises em ecologia matemática e situações gerais (POLETTI; MEYER, 2009). Levando em consideração os modelos propostos por Marchuck (1986), Okubo e Levin (1980), Edelstein-Keshet (1988), será apresentada uma equação adaptada para a situação aqui tratada. Designando por $c(x, y, t)$ a concentração de metano em uma determinada posição do domínio Ω em um instante $t \in (0, T)$, o problema proposto pode ser apresentado na forma genérica por $c(x, y, t) = - \text{difusão} - \text{transporte} - \text{decaimento} + \text{fonte}$, conforme Prestes, Meyer e Poletti (2013).

De forma simbólica temos

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div}(\alpha \nabla c) - \text{div}(V.c) - \sigma c + f, \text{ para todo } t \in (0, T] \text{ e } (x, y) \in \Omega \quad (2.1)$$

Na equação (2.1) o termo $\text{div}(\alpha \nabla c)$ está representando a difusão para o meio, ou seja, o espalhamento natural devido a movimentos moleculares ou movimentos relacionados à turbulência, depende do próprio gás neste caso, da posição, do tempo, da temperatura; o termo $\text{div}(V.c)$ modela o transporte advectivo, relacionado a agentes externos, neste caso o transporte de metano seguindo a direção dada pelo vetor das correntes de ventos dominantes, considerando $\text{div}(\vec{V}) = 0$; o termo σc está ligado fenômenos relacionados a alterações sofridas pelo gás ao reagir com o meio externo com o passar do tempo, perdendo massa e excluindo-se do meio, estando relacionado linearmente com a fonte (DANCONI; ANGELIS; POLETTI, 2013).

Vamos supor que a difusão seja variável em relação a altura da fonte poluidora e com a temperatura, comportamento esperado devido às reações químicas que podem ocorrer na atmosfera e a variação de densidade do ar por exemplo.

Nossa região de análise será feita para um domínio bidimensional de um retângulo Ω sobre duas regiões do reservatório da hidrelétrica de Santo Antônio a ser detalhada

a seguir. Vamos considerar um domínio bidimensional, supondo que o metano não irá atingir grandes altitudes e analisar o processo de dispersão no plano horizontal acima da superfície.

Consideraremos que o processo difusivo é homogêneo para uma faixa de 100 m de altitude, as regiões podem ser observadas na figura 3.



Figura 4 – Regiões do reservatório da Hidrelétrica de Santo Antônio/RO.

2.2.1 A região 1

O plano bidimensional trabalhado para cada região terá considerações sobre o processo difusivo (movimentos aleatórios e microscópicos) e advectivos (correntes de ventos para as faixas de alturas a serem analisadas), as fontes para cada região serão aproximadas por uma função constante, considerando as possíveis perdas no processo ascendente do gás, como reação com CO_2 e forças como ventos. Na figura 5 temos um mapa digitalizado da região 1.

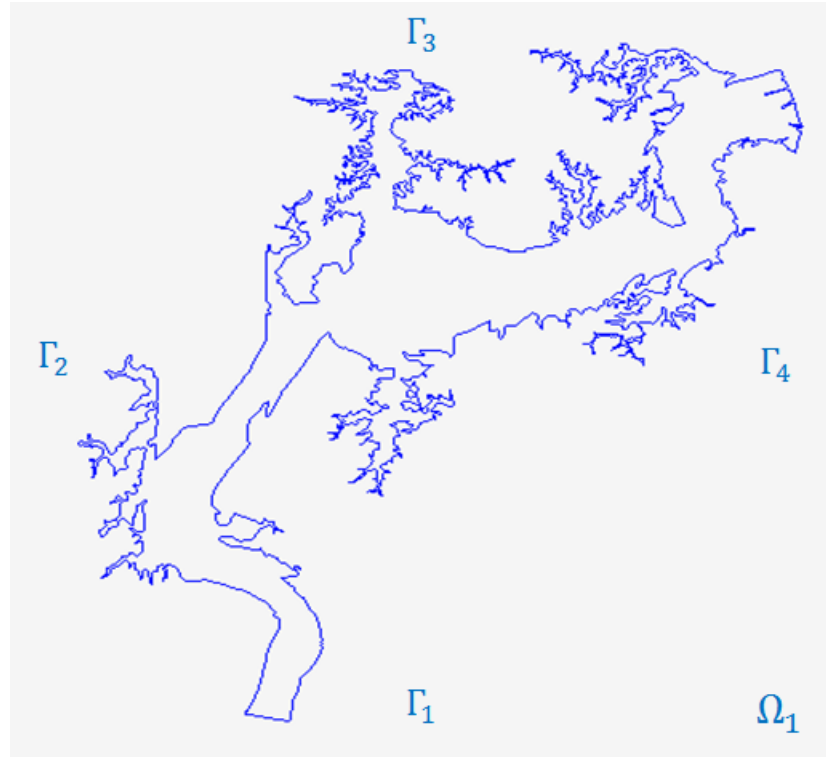


Figura 5 – Região 1 do reservatório da Hidrelétrica de Santo Antônio/RO.

Matematicamente esta região Ω_1 será abordada como sendo uma região de $\mathbb{R}^2$, limitada e com bordo dado por $\partial\Omega$. As fronteiras adotadas serão Γ_1 sobre o eixo x e Γ_3 na direção do eixo x e paralelo a este a uma distância de aproximadamente 47 km, Γ_2 sobre o eixo y e Γ_4 na direção do eixo y e distante aproximadamente 44 km do mesmo. Para os fluxos na região 1 será considerado no sentido de Γ_3 para Γ_1 e de Γ_2 para Γ_4 .

As condições de contorno neste caso serão consideradas como as de Robin (BASSANEZI R. C. ; FERREIRA, 1988), em função da passagem de gás pela fronteira, dadas por

$$-\alpha \frac{\partial c}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = k(c - c_e), \forall t \in (0, T] \quad (2.2)$$

onde temos que:

- 1 : $-\alpha$ representa o coeficiente de difusibilidade;
- 2 : η é a normal exterior unitária à fronteira;
- 3 : k é a taxa de passagem do gás pela fronteira devido a diferença de concentração entre os meios.
- 4 : c é a concentração de metano nos pontos da fronteira.

Considerando a direção predominante do vento para as regiões de fronteira $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$ temos as condições de Von Neuman, ou seja

$$\left. \frac{\partial c}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0, \forall t \in (0, T] \quad (2.3)$$

2.2.2 A região 2

A região 2 será considerada como um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, onde as condições de fronteira serão as de Von Neuman para $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$, ou seja

$$\left. \frac{\partial c}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} = 0, \forall t \in (0, T] \quad (2.4)$$

e de Robin para as fronteiras $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, onde admitimos a diferença de concentração de gases, segue que

$$-\alpha \left. \frac{\partial c}{\partial \eta} \right|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} = k(c - c_e), \forall t \in (0, T] \quad (2.5)$$

onde novamente $-\alpha$ representa a difusibilidade, η é vetor unitário normal exterior, k representa a taxa de passagem do gás de um meio a outro e c_e é uma constante da concentração exterior que poderá ser zero.

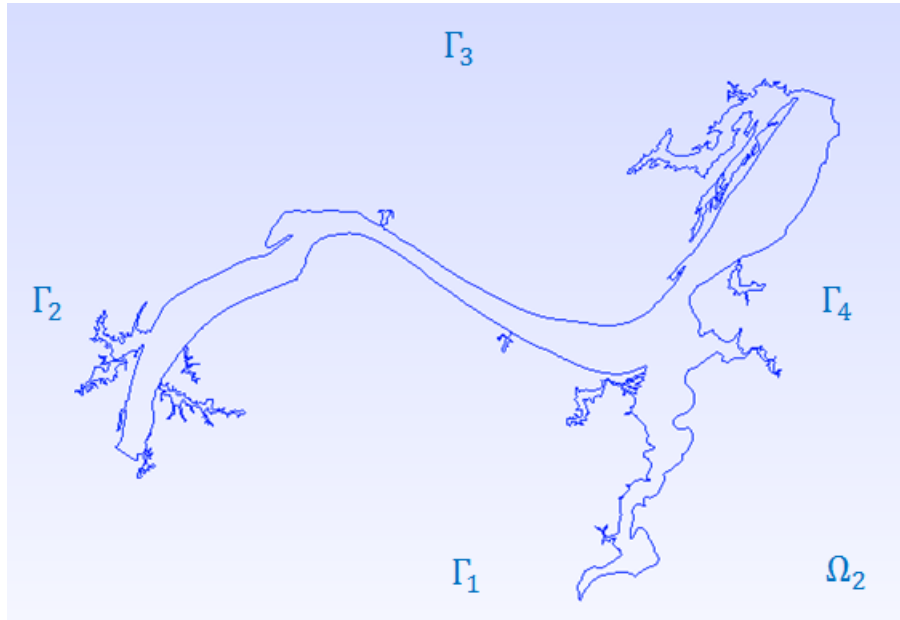


Figura 6 – Região 2 do reservatório da Hidrelétrica de Santo Antônio/RO.

A equação (2.1) juntamente com as condições de contorno para cada região, dadas pelas equações (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) constituem a chamada formulação clássica do problema, ou formulação forte.

3 Formulação variacional para a equação clássica

Na apresentação da formulação clássica do problema de difusão-advecção-reação é imperativo que a solução $C(x, y, t)$ seja de classe $C^2(\Omega)$, além de termos que a função f pode ser descontínua, como uma fonte que deixa de emitir poluente ou que interage com outra substância e tem a sua emissão cessada.

Daí, a importância de adotar princípios variacionais, para enfraquecer as condições de regularidade. O Método de Elementos Finitos será usado para aproximar numericamente a solução do modelo. Permitindo desta forma eliminar as exigências de regularidade necessárias da formulação forte, justificando a opção pelo uso das derivadas no sentido das distribuições e de integrais de Lebesgue (BARTLE, 1995).

A difícil geometria de alguns domínios juntamente com suas condições de fronteira tornam inviável soluções analíticas de equações diferenciais parciais em alguns casos. A função f na prática não é contínua no tempo e nas variáveis espaciais, pois as emissões de metano aqui consideradas serão em regiões específicas do reservatório.

Neste contexto, o método de Galerkin, junto com uma resolução temporal são muito importantes.

A formulação fraca ou variacional introduz uma discretização no domínio do problema, aproximando a solução contínua por uma apropriada função contínua por partes fazendo, com isto, um problema de EDP reduzir-se à resolução de sucessivos sistemas de equações lineares algébricas.

Para a sequência exige-se que as derivadas parciais também sejam fracas, fato este que ocorre em um sub-espaço de Sobolev, denotado por $\mathcal{V}$ (BRENNER; SCOTT, 2007). Segue então que

$$H^1(\Omega) = \{\nu(x, y) \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial \nu}{\partial x}, \frac{\partial \nu}{\partial y} \in L^2(\Omega)\} \quad (3.1)$$

No sub-espaço $\mathcal{V}$ de $H^1(\Omega)$ será utilizado o produto interno de duas funções dadas por

$$(f|g)_{\Omega;0} := \iint_{\Omega} fg d\mu \quad (3.2)$$

$$\langle f|g \rangle_{\Omega;0} = \int_{\Gamma} fg d\gamma \quad (3.3)$$

Consideremos o espaço das funções de quadrado integrável e alguns espaços definidos a seguir, necessários para a formulação da discretização espacial e temporal feitas na seção seguinte. Temos então que

$$L^2(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } \iint_{\Omega} [\vartheta(x, y)]^2 d\mu < \infty\}$$

é chamado de espaço das funções de quadrado integrável no sentido de Lebesgue e que

1. $\vartheta = \{v \in L^2[H^1(\Omega), J], \text{ com } \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\Omega), \forall t \in J\}$, para $J = (0, T]$
2. ϑ é um subconjunto de $H^1(\Omega)$, ou seja $\vartheta \subset H^1(\Omega)$
3. Seja $\vartheta_h \subset H^1(\Omega)$ uma base de dimensão finita dada por $\mathcal{B}(\vartheta_h) = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$, onde aproximaremos a concentração $c(x, y, t)$ nesse subespaço $\vartheta_h \subset \vartheta$.

Para a obtenção da forma variacional do problema multiplicamos cada termo da equação obtida por v e integramos a equação resultante no sentido de Lebesgue sobre o domínio Ω , levando em consideração as condições dadas para cada caso, segue que

$$\iint_{\Omega;0} \frac{\partial c}{\partial t} v d\mu - \alpha \iint_{\Omega;0} \Delta c v d\mu + \iint_{\Omega;0} \nabla(Vc) v d\mu + \iint_{\Omega;0} \sigma c v d\mu = \iint_{\Omega;0} f v d\mu \quad (3.4)$$

Considerando que as componentes advectivas sejam V_x e V_y temos

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega;0} \frac{\partial c}{\partial t} v d\mu - \alpha \iint_{\Omega;0} \Delta c v d\mu + V_x \iint_{\Omega;0} \frac{\partial c}{\partial x} v d\mu + V_y \iint_{\Omega;0} \frac{\partial c}{\partial y} v d\mu + \iint_{\Omega;0} \sigma c v d\mu \\ = \iint_{\Omega;0} f v d\mu \end{aligned} \quad (3.5)$$

Considerando o produto interno dado pelas equações (3.2) e (3.3) obtemos

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} \middle| v\right)_{\Omega;0} - \alpha \left(\nabla c \middle| \nabla v\right)_{\Omega;0} + V_x \left(\frac{\partial c}{\partial x} \middle| v\right)_{\Omega;0} + V_y \left(\frac{\partial c}{\partial y} \middle| v\right)_{\Omega;0} + \sigma \left(c \middle| v\right)_{\Omega;0} = \left(f \middle| v\right)_{\Omega;0} \quad (3.6)$$

Ao considerarmos as Identidades de Green (IÓRIO; IÓRIO, 1988) para os operadores aqui analisados temos

$$-\alpha (\Delta c | v)_{\Omega;0} = \alpha (\nabla c | \nabla v)_{\Omega;0} - \alpha \langle c | v \rangle_{\Gamma}$$

que substituída em (3.6) nos fornece a expressão

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \middle| v\right)_{\Omega;0} + \alpha (\nabla c | \nabla v)_{\Omega;0} + V_x \left(\frac{\partial c}{\partial x} \middle| v\right)_{\Omega;0} + V_y \left(\frac{\partial c}{\partial y} \middle| v\right)_{\Omega;0} + k \langle c | v \rangle_{\Gamma} \\ + \sigma (c | v)_{\Omega;0} = (f | v)_{\Omega;0} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Se nós considerarmos que as componentes advectivas sejam dadas por $V_x = V \cos \theta$ e $V_y = V \sin \theta$, sendo V a velocidade média do vento dominante e θ a direção do ângulo considerando no sentido anti-horário partindo do eixo leste, teremos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \Big| v \right)_{\Omega;0} + \alpha (\nabla c | \nabla v)_{\Omega;0} + V \cos \theta \left(\frac{\partial c}{\partial x} \Big| v \right)_{\Omega;0} + V \sin \theta \left(\frac{\partial c}{\partial y} \Big| v \right)_{\Omega;0} \\ + k \langle c | v \rangle_{\Gamma} + \sigma (c | v)_{\Omega;0} = (f | v)_{\Omega;0} \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.0.1 Existência e unicidade da solução

A formulação (3.8) acima é conhecida como formulação variacional ou formulação fraca do problema (2.1) com as condições (2.2)–(2.5). Esta maneira de expressar a formulação fraca tem a vantagem de possuir derivadas de primeira ordem e facilitar a prova de sua existência e unicidade.

Para poder utilizar métodos de aproximação para a solução da equação (3.8), devemos antes mostrar a existência e unicidade de solução da equação variacional encontrada. Para tanto, será utilizado o teorema de (LIONS, 1961), numa versão condensada da equação anterior e procedimentos adotados por Diniz (2003), Oliveira (2003), Castro (1993), Mistro (1992). Inicialmente agrupamos os termos de (3.8) abaixo e adotaremos a notação usada por Lions (1961):

$$\hat{A}(t, u) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x, t) + a_0$$

o que em uma notação compacta nos oferece

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} \right) + \hat{A}(t; c, v) = L_f(v), \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (3.9)$$

e temos que

$$\begin{aligned} \hat{A}(t; c, v) = \alpha (\nabla c | \nabla v)_{\Omega;0} + V \cos \theta \left(\frac{\partial c}{\partial x} \Big| v \right)_{\Omega;0} + V \sin \theta \left(\frac{\partial c}{\partial y} \Big| v \right)_{\Omega;0} \\ + k \langle c | v \rangle_{\Gamma} + \sigma (c | v)_{\Omega;0} \\ \text{e } L_f(v) = (f | v)_{\Omega;0}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Devido a (3.10) temos que

$$\begin{cases} a_{ij} = \alpha \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \end{cases},$$

$$a_i = \begin{cases} V \cos \theta \text{ para } i = 1 \\ V \sin \theta \text{ para } i = 2 \end{cases}$$

sendo $a_0 = \sigma$

Agora vamos verificar se (3.8) satisfaz as hipóteses do Teorema de Lions, com a redação a seguir.

Teorema 1 (*Lions*) Dado um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}$, considere os espaços $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ e ϑ , tal que $H_0^1(\Omega) \subset \vartheta \subset H^1(\Omega)$ para $w = w(x, t)$ e $v = v(x, t)$, seja o operador A dado por:

$$A(t, w, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i(x, t) \frac{\partial w}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} a_0(x, t) w v dx$$

Se

- i) a_{ij}, a_i e $a_o \in \vartheta(\Omega \times (0, T])$;
- ii) $\forall w, v \in \vartheta$, a função $\chi : t \rightarrow A(t; w, v)$ é mensurável ;
- iii) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|A(t, w, w)|^2 + \lambda \|w\|_{L^2}^2 \geq \delta \|w\|_{H^1(\Omega)}^2, \delta > 0, w \in \vartheta$;
- iv) $|A(t, w, v)| \leq M \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$
- v) $L_f(v) = \int_{\Omega} f v dx + \left(\int_{\Omega} w v dx \right) \delta_o(t)$ é contínuo ;
- vi) $f \in L^2((-\infty, T); L^2(\Omega))$;

então existe uma única função $w \in \vartheta$ que é solução do problema (3.4).

Devemos verificar que a equação (3.4) satisfaz as hipóteses do teorema dado. Assim,

- a) Levando em consideração a escolha dos a_{ij} , a_i , e a_o , vemos que A satisfaz a hipótese i);
- b) Como as funções envolvidas pertencem a $H^1(\Omega)$, sendo de quadrado integráveis, a mensurabilidade do operador $A(t, c, v)$ está garantida;
- c) Para o item iii), denominado de coercitividade, temos

$$\begin{aligned} A(t, v, v) + \lambda \|v\|_{L^2}^2 &= \iint_{\Omega} A(t; v) v d\mu + \lambda \|v\|_{L^2}^2 = \iint_{\Omega} \alpha \nabla v \cdot \nabla v d\mu \\ &+ V \cos \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} v d\mu + V \sin \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} v d\mu + \sigma \iint_{\Omega} v^2 d\mu + \lambda \|v\|_{L^2}^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

de outra forma temos

$$\begin{aligned} A(t, v, v) + \lambda \|v\|_{L^2}^2 &= \iint_{\Omega} \alpha \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] d\mu + V \cos \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} v d\mu \\ &\quad + V \sin \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} v d\mu + (\lambda + \sigma) \|v\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \left| V \cos \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} v d\mu \right| &\leq |V \cos \theta| \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x} v \right| d\mu \leq |V| \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \right| |v| d\mu \\ &\leq |V| \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2} \|v\|_{L^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| V \sin \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} v d\mu \right| &\leq |V \sin \theta| \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial y} v \right| d\mu \leq |V| \iint_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial y} \right| |v| d\mu \\ &\leq |V| \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \end{aligned}$$

segue que

$$\left| V \cos \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} v d\mu \right| + \left| V \sin \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} v d\mu \right| \leq |V| \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2} \right) \|v\|_{L^2}$$

ou

$$\left| V \cos \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} v d\mu \right| + \left| V \sin \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial y} v d\mu \right| \geq -|V| \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2} \right) \|v\|_{L^2}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder ao 2º e 3º membro da desigualdade (3.12) e usando as desigualdades obtidas acima temos

$$\begin{aligned} A(t, v, v) + \lambda \|v\|_{L^2}^2 &\geq \alpha \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] d\mu + (\lambda + \sigma) \|v\|_{L^2}^2 \\ &\quad - V \left[\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

que leva a

$$\begin{aligned} A(t, v, v) + \lambda \|v\|_{L^2}^2 &\geq \alpha \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] d\mu + (\lambda + \sigma) \|v\|_{L^2}^2 - \\ &\quad - V \left[\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Como $-ab \geq -\frac{\epsilon}{2}a^2 - \frac{1}{2\epsilon}b^2$, onde a , b e ϵ são positivos quaisquer, tem-se

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|v\|_{L^2}^2,$$

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2} \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|v\|_{L^2}^2$$

Somando membro a membro temos

$$\left[\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2} \right] \|v\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{2} \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) + \frac{1}{2\epsilon} \|v\|_{L^2}^2$$

segue que

$$-V \left[\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2} \right] \|v\|_{L^2} \geq -\frac{V\epsilon}{2} \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) - \frac{V}{2\epsilon} \|v\|_{L^2}^2$$

levando à desigualdade (3.14) obtemos

$$\begin{aligned} A(t, v, v) + \lambda \|v\|_{L^2}^2 &\geq \left(\alpha - \frac{V\epsilon}{2} \right) \left[\left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right] \\ &\quad + \left(\lambda + \sigma - \frac{V}{2\epsilon} \right) \|v\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Tomando como $\delta = \min \left\{ \left(\alpha - \frac{V\epsilon}{2} \right), \left(\lambda + \sigma - \frac{V}{2\epsilon} \right) \right\}$ podemos escolher ϵ positivo de modo que $\delta > 0$, obtendo, portanto

$$A(t, v, v) + \lambda \|v\|_{L^2}^2 \geq \delta \left(\|v\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2}^2 \right) = \delta \|v\|_{H^1(\Omega)}^2, \delta > 0, v \in \vartheta, \text{ para cada } t \in (0, T)$$

d) A condição dada na hipótese **iv** pode ser obtida da seguinte forma:

Dado que

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} v d\mu + A(t, u, v) = L_f(v) \text{ onde } A(t, u, v) = \iint_{\Omega} \hat{A}(t, u) v d\mu$$

e

$$\hat{A}(t, u) v d\mu = \iint_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v d\mu + V \iint_{\Omega} \cos \theta \frac{\partial v}{\partial x} v d\mu + V \iint_{\Omega} \sin \theta \frac{\partial v}{\partial y} v d\mu + \sigma \iint_{\Omega} u v d\mu$$

$$\text{como } \iint_{\Omega} \alpha \nabla u \cdot \nabla v d\mu \leq |\alpha| \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mu$$

segue que, para cada $t \in (0, T)$, seja $\zeta = \max \{|\alpha|, |\sigma|\}$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$|\alpha| \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mu + \sigma \iint_{\Omega} u v d\mu \leq \zeta \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Como temos ainda que

$$|V| \cos \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v d\mu \leq |V| \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v d\mu$$

e

$$|V| \sin \theta \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v d\mu \leq |V| \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} v d\mu$$

Pela desigualdade de Hölder temos

$$|V| \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} v d\mu \leq |V| \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq |V| \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$|V| \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} v d\mu \leq |V| \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq |V| \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Logo, temos que

$$|A(t, u, v)| \leq \xi \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + |V| \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + |V| \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

bastando tomar $M = \xi + |V|$ temos

$$|A(t; u, v)| \leq M \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

e) Como temos que $L_f(v) = \iint_{\Omega;0} (f|v)$, sabendo que $\|v\|_{L^2} \leq \mu(\Omega) \|v\|_{H^1(\Omega)} \forall v \in \vartheta$, e sabendo que o termo fonte pertence a $L^2(\Omega \times (0, T])$, vem que

$$|L_f(v) = |(f|v)| \leq \|v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Existe, portanto, uma única solução do problema (3.8) formulado variacionalmente.

3.0.2 Discretização espacial e temporal

Será apresentado nesta seção a discretização espacial do modelo obtido através do Método dos Elementos Finitos (MEF) para a discretização espacial e Crank - Nicholson, Método das Diferenças Finitas, para a discretização temporal (CIARLET, 1978). Para tal discretização precisamos do subespaço $\vartheta_h \subset H^1(\Omega)$, gerado pelas N_h funções testes φ_i , com $i = 1, \dots, N$ (CAREY; ODEN, 1981).

Assim, podemos escrever a concentração como combinação linear das funções base φ_i , ou seja,

$$c(x, y; t) \cong c_h(x, y; t) = \sum_1^N c_i(t) \varphi_i(x, y)$$

com a derivada expressa por

$$\frac{\partial c_h}{\partial t}(x, y; t) = \sum_1^N \frac{dc_j}{dt}(t) \varphi_j(x, y)$$

A escolha das funções da base $\{\varphi_1(x, y), \dots, \varphi_N(x, y)\}$, que são definidas globalmente sobre os Elementos Finitos, será do tipo linear por partes, satisfazendo a condição

:

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$
 onde (x_j, y_j) são as coordenadas de cada nó da malha.

Para a implementação do Método dos Elementos Finitos será necessário criar uma malha da região Ω , feita neste trabalho por elementos finitos triangulares. A ordem dos polinômios de aproximação sobre cada triângulo. Neste trabalho os elementos finitos são lineares. A discretização da região 1 pode ser observada na figura (7) com 257835 nós e 535454 elementos triangulares.

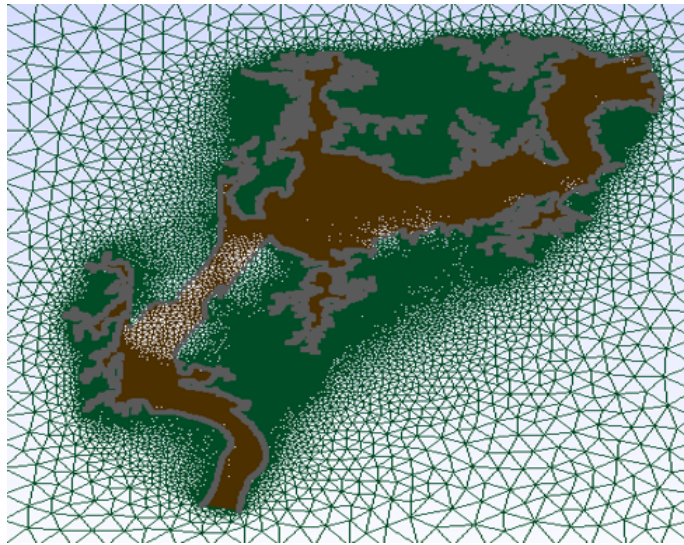


Figura 7 – Discretização da região 1 de Ω

A região 2 discretizada com 78440 nós e 166792 elementos triangulares pode ser visualizada na figura (8), onde foram novamente usados polinômios lineares para a aproximação. Para a obtenção das discretizações foi utilizado o programa Gmsh.

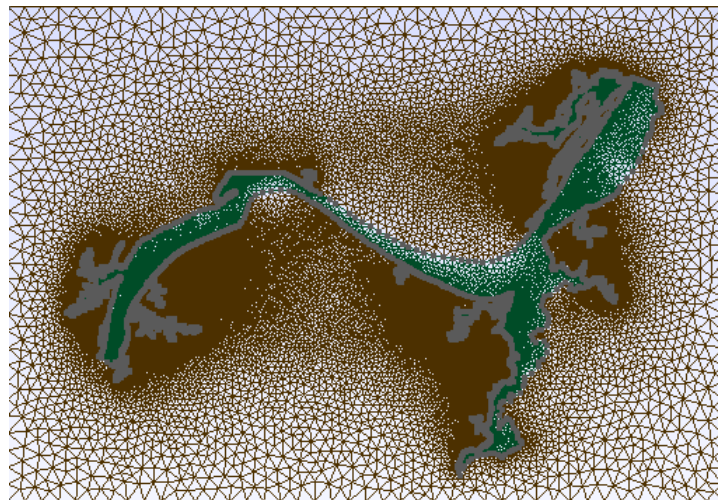


Figura 8 – Discretização da região 2 de Ω .

Retomando a formulação variacional do problema

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial c_h}{\partial t} \middle| v \right)_{\Omega;0} + \alpha (\nabla c_h | \nabla v)_{\Omega;0} + V \cos \theta \left(\frac{\partial c_h}{\partial x} \middle| v \right)_{\Omega;0} + V \sin \theta \left(\frac{\partial c_h}{\partial y} \middle| v \right)_{\Omega;0} \\ + k \langle c_h | v \rangle_{\Gamma} + \sigma (c_h v)_{\Omega;0} = (f | v)_{\Omega;0} \end{aligned} \quad (3.16)$$

temos que $\forall v \in \mathcal{V}_h$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial c_j}{\partial t} \varphi_j \middle| v \right)_{\Omega;0} + \alpha \sum_{j=1}^N c_j (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{\Omega;0} + V \cos \theta \sum_{j=1}^N c_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \middle| v \right)_{\Omega;0} \\ + V \sin \theta \sum_{j=1}^N c_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \middle| v \right)_{\Omega;0} + \sigma \sum_{j=1}^N c_j (\varphi_j | v)_{\Omega;0} - k \sum_{j=1}^N c_j \langle \varphi_j | v \rangle_{\Gamma} = (f | v)_{\Omega;0} \end{aligned} \quad (3.17)$$

como não há dependência espacial para os coeficientes $c_j(t)$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{\partial c_j}{\partial t} (\varphi_j | v)_{\Omega;0} + \alpha \sum_{j=1}^N c_j (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{\Omega;0} + V \cos \theta \sum_{j=1}^N c_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \middle| v \right)_{\Omega;0} \\ + V \sin \theta \sum_{j=1}^N c_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \middle| v \right)_{\Omega;0} + \sigma \sum_{j=1}^N c_j (\varphi_j | v)_{\Omega;0} - k \sum_{j=1}^N c_j \langle \varphi_j | v \rangle_{\Gamma} = (f | v)_{\Omega;0} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Como $v \in \mathcal{V}_h$ e que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ é uma base de $\mathcal{V}_h$, segue que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{\partial c_j}{\partial t} (\varphi_j | \varphi_i)_{\Omega;0} + \alpha \sum_{j=1}^N c_j (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{\Omega;0} + V \cos \theta \sum_{j=1}^N c_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \middle| \varphi_i \right)_{\Omega;0} \\ + V \sin \theta \sum_{j=1}^N c_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \middle| \varphi_i \right)_{\Omega;0} + \sigma \sum_{j=1}^N c_j (\varphi_j | \varphi_i)_{\Omega;0} - k \sum_{j=1}^N c_j \langle \varphi_j | \varphi_i \rangle_{\Gamma} = (f | \varphi_i)_{\Omega;0} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Reescrevendo a equação (3.19), tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \frac{\partial c_j}{\partial t} (\varphi_j | \varphi_i)_{\Omega;0} + \sum_{j=1}^N c_j \left[\alpha (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{\Omega;0} + \sigma (\varphi_j | \varphi_i)_{\Omega;0} - k \langle \varphi_j | \varphi_i \rangle_{\Gamma} \right. \\ \left. + V \cos \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \middle| \varphi_i \right)_{\Omega;0} + V \sin \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \middle| \varphi_i \right)_{\Omega;0} \right] = (f | \varphi_i)_{\Omega;0} \end{aligned} \quad (3.20)$$

As aproximações temporais consistirão em tomar a aproximação no tempo $(n + \frac{1}{2})$ como média de dois tempos subsequentes, aproximação esta chamada de Método de Crank-Nicolson. Temos, então, que

$$\frac{dc_j}{dt} \left(t_n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cong \frac{c_j^{(n+1)} - c_j^{(n)}}{\Delta t}$$

e

$$c_j \left(t_n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cong \frac{c_j^{(n+1)} + c_j^{(n)}}{2}$$

onde $c_j^{(n)}$ aproxima $c_j(t_n)$, sendo n o passo no tempo. A ordem de erro local é $(\Delta t)^2$.

$$\begin{aligned} & \sum_1^N c_j^{(n+1)} \left\{ \frac{1}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i)_{\Omega;0} + \frac{\alpha}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{\Omega;0} + \frac{\sigma}{2} (\varphi_j | \varphi_i)_{\Omega;0} - \frac{k}{2} \langle \varphi_j | \varphi_i \rangle_{\Gamma} \right. \\ & + \frac{V}{2} \cos \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \Big| \varphi_i \right)_{\Omega;0} + \frac{V}{2} \sin \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \Big| \varphi_i \right)_{\Omega;0} \Big\} = \sum_{j=1}^N c_j^{(n)} \left\{ \frac{1}{\Delta t} (\varphi_j | \varphi_i)_{\Omega;0} \right. \\ & + \frac{\alpha}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{\Omega;0} - \frac{\sigma}{2} (\varphi_j | \varphi_i)_{\Omega;0} + \frac{k}{2} \langle \varphi_j | \varphi_i \rangle_{\Gamma} - \frac{V}{2} \cos \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \Big| \varphi_i \right)_{\Omega;0} \\ & \left. - \frac{V}{2} \sin \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \Big| \varphi_i \right)_{\Omega;0} \right\} + \left(f^{(n+\frac{1}{2})} | \varphi_i \right)_{\Omega;0} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Multiplicando cada termo por Δt , reorganizando os termos obtemos para $i = 1, 2, \dots, N$:

$$Ac^{(n+1)} = Bc^{(n)} + d^{(n+\frac{1}{2})}$$

onde

$$\begin{aligned} a_{ij} = & \left[1 + \frac{\sigma \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i)_{\Omega;0} + \frac{\alpha \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{\Omega;0} + \frac{k \Delta t}{2} \langle \varphi_j | \varphi_i \rangle_{\Gamma} \\ & + \frac{V \Delta t}{2} \cos \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \Big| \varphi_i \right)_{\Omega;0} + \frac{V \Delta t}{2} \sin \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \Big| \varphi_i \right)_{\Omega;0} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} b_{ij} = & \left[1 - \frac{\sigma \Delta t}{2} \right] (\varphi_j | \varphi_i)_{\Omega;0} - \frac{\alpha \Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{\Omega;0} - \frac{k \Delta t}{2} \langle \varphi_j | \varphi_i \rangle_{\Gamma} \\ & - \frac{V \Delta t}{2} \cos \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \Big| \varphi_i \right)_{\Omega;0} - \frac{V \Delta t}{2} \sin \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \Big| \varphi_i \right)_{\Omega;0} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$d_i = \Delta t \left[\left(f^{n+\frac{1}{2}} | \varphi_i \right)_{\Omega;0} \right]$$

A matriz A é chamada matriz de rigidez.

3.0.3 Estabilidade numérica

Instabilidades numéricas podem ocorrer em uma aproximação como a apresentada neste trabalho, quando o termo advectivo torna-se preponderante na equação, isso pode ocorrer quando as dimensões da malha ultrapassarem um determinado valor ou quando o valor de V for muito maior que o de α para o caso constante (HEINRICH J. C; MITCHELL;

ZIENKIEWICZ, 1977). Segundo Moreira e Wrobel (1983), o sistema é mal condicionado devido a matriz associada ao termo advectivo ser assimétrica, podendo ser contornado com o uso de malhas refinadas, podendo ocorrer, neste caso, um alto custo computacional.

Um meio de verificar as oscilações que aparecem no sistema é conhecido como a condição de Peclet, que fornece uma condição sobre a discretização do domínio suprimindo o efeito das oscilações numéricas. O valor de Peclet é dado por

$$P_e = \frac{V_i \Delta x_i}{\alpha} \leq 2$$

As simulações obtidas neste trabalho respeitaram as condições de Peclet, obtendo assim confiabilidade nos resultados, numericamente.

4 Conceitos fuzzy aplicados a problemas ambientais

A precisão obtida nos parâmetros utilizados, segundo Bassanezi (2002) torna-se muito importante levando em conta a confiabilidade do modelo proposto. Considerando as variações dos fluxos devido as incertezas associadas aos processos de produção e emissão do gás, o coeficiente de difusão descrito na equação 2.1 será modelado por meio de Conjuntos Fuzzy.

Desta forma, o coeficiente α , que representa a taxa de difusibilidade do meio, dependerá da altitude e da temperatura (BARROS; BASSANEZI, 2006; CASTANHO, 2005; PEIXOTO, 2005; JAFELICE, 2003).

Os seres humanos conseguem lidar com informações e processos complexos baseados em aproximações e informações imprecisas. A Teoria dos Conjuntos Fuzzy juntamente com os Conceitos de Lógica Fuzzy concebidos por Zadeh (1965), podem ser utilizados para tratar, em termos matemáticos, informações imprecisas expressas por um conjunto de regras linguísticas (SILVA et al., 2007).

A aplicação de conceitos fuzzy na resolução de problemas ambientais vem aumentando nos últimos anos. Dentre os trabalhos relacionados a área ambiental temos Shao (1999), que mapeou características termicas da atmosfera, Silva et al. (2007) usou método fuzzy para obter um Índice Regional de Chuvas no semi-árido do nordeste do Brasil.

A incerteza quanto ao processo de emissão de gases de efeito estufa em reservatórios de hidrelétricas, como por exemplo o gás metano, serve de motivação para a utilização dos métodos fuzzy, pois podem facilitar a compreensão de medições ou imprecisões de variáveis.

Um subconjunto fuzzy A de U é caracterizado por uma função, chamada de pertinência $\mu(A) : U \rightarrow [0, 1]$, onde $\mu(A)$ é o grau de pertinência do elemento x ao conjunto A , ou seja, $\mu(A) \in [0, 1]$. A pertinência ou não de um elemento em A é indicada pela função característica indicada por $\mu(A) = 1$ e $\mu(A) = 0$, respectivamente (SUGENO; KANG, 1988).

Processos naturais em sua maioria não possuem limites rígidos, sendo expressos por equações complexas, que ainda agregam incertezas em seus resultados. Os gases de efeito estufa possuem vários possíveis sumidouros, como troca turbulenta para a atmosfera após a jusante das turbinas, por difusão ou ebulição, oxidação com a coluna de água e emissão na forma de CO_2 .

Os sistemas baseados em regras fuzzy são conceitos compostos basicamente de três etapas: a fuzificação, onde as entradas são modeladas por conjuntos fuzzy; o processamento, composto por base de regras e inferência, onde o processo de base de regras é formado por proposições fuzzy da forma Se "condição", então "ação" de acordo com as informações das variáveis analisadas, feitas por especialistas, que traduz estas informações por meio de conceitos da Lógica Fuzzy, gerando para cada regra uma saída, cuja combinação com outras regras geram outras saídas fuzzy do sistema; e, por fim, o processo de defuzificação, que está relacionado ao processo de resposta do sistema, transformando a variável fuzzy de saída em variável real (crisp).

O método de Centro de Massa ou Centro de Gravidade que será usado neste trabalho, nos informa a média das áreas formadas por todos os graus de pertinência de um subconjunto fuzzy, sendo expressa por

$$G(A) = \frac{\sum_{i=0}^n x_i A(x_i)}{\sum_{i=0}^n \mu_A(x_i)}$$

para o caso discreto e

$$G(A) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x u_A(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} u_A(x) dx}$$

para o caso contínuo.

Vamos usar um controlador para o coeficiente de difusão, que será usado para considerar as variáveis temperatura e altitude para variáveis de entrada e como saída o coeficiente de difusão. Ressalta-se ainda que não existe um fator isolado responsável pela totalidade das emissões; o gás metano ao ser gerado, sobe para as camadas mais altas por ser mais leve que a mistura de ar que compõe a atmosfera.

4.1 Abordagem fuzzy para o coeficiente de difusão

Segundo trabalhos de [Marchuck \(1986\)](#) e [Okubo e Levin \(1980\)](#), a difusão efetiva tem relação de dependência com o transporte, assim é proposto um modelo baseado em duas entradas, a altitude e a temperatura relacionadas a faixas da camada vertical da atmosfera. Consideraremos que a difusão cresce com o aumento da temperatura e com a altitude. As funções de pertinências para a difusão podem ser observadas na figura 9, as funções pertinências para a variável temperatura podem ser observadas na figura 10 e as funções de pertinências para a variável temperatura podem ser observadas na figura 11. As bases de regras utilizadas estão indicadas após a figura 11.

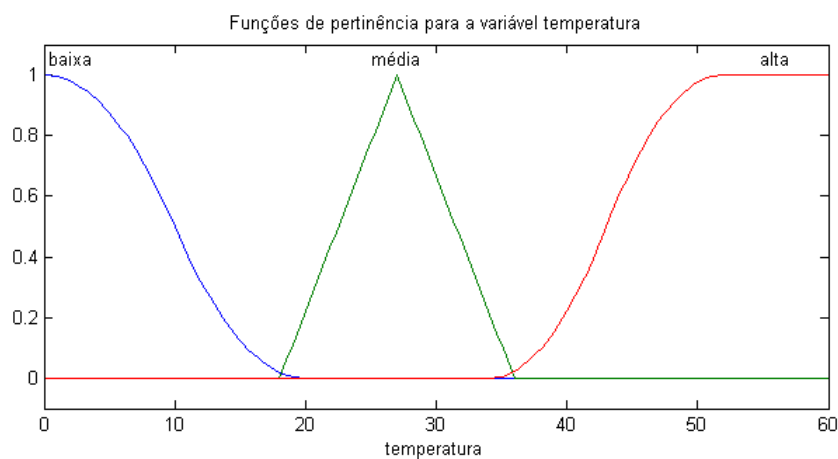


Figura 9 – Funções de pertinência da variável temperatura.

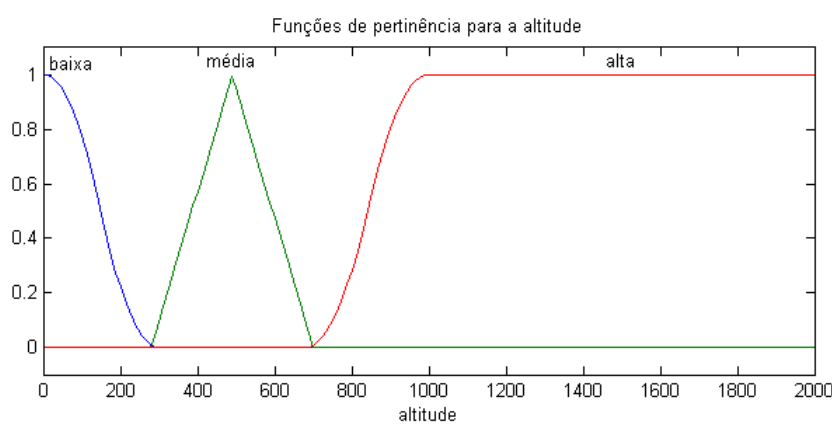


Figura 10 – Funções de pertinência da variável altitude.

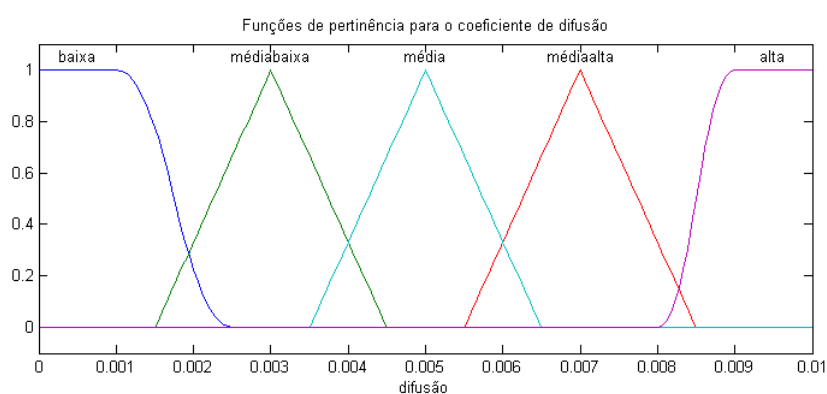
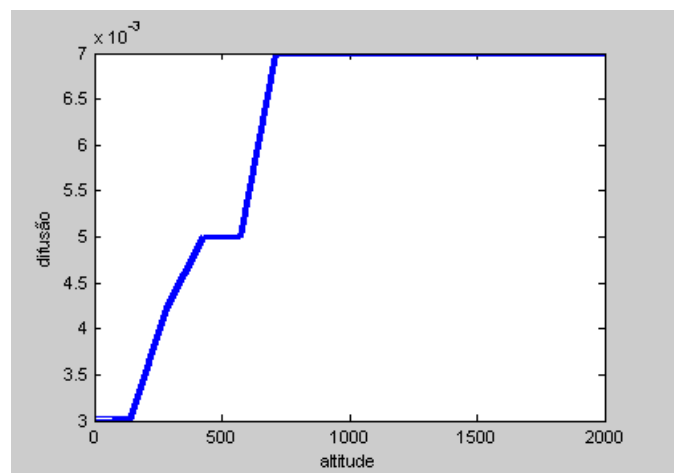
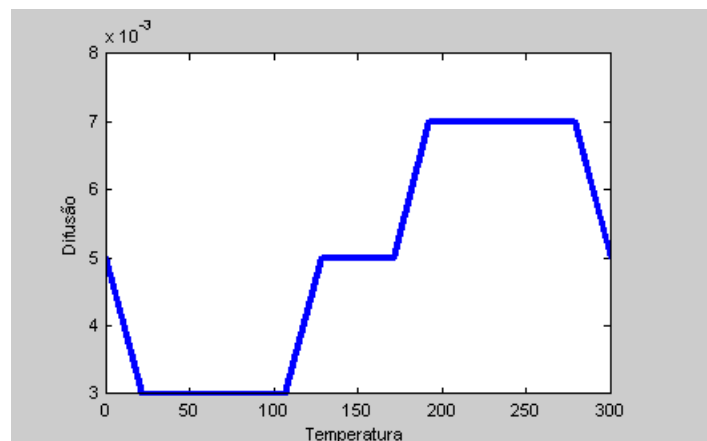


Figura 11 – Funções de pertinência para a coeficiente de difusão.

1. SE 'temperatura é baixa' e 'altitude é baixa', ENTÃO difusão é baixa.
2. SE 'temperatura é baixa' e 'altitude é média', ENTÃO difusão é média baixa.
3. SE 'temperatura é baixa' e 'altitude é alta', ENTÃO a difusão é média baixa.

4. SE 'temperatura é média' e 'altitude é baixa', ENTÃO a difusão é média baixa.
5. SE 'temperatura é média' e 'altitude é média', ENTÃO a difusão é média.
6. SE 'temperatura é média' e 'altitude é alta', ENTÃO a difusão é média alta.
7. SE 'temperatura é alta' e 'altitude é baixa', ENTÃO a difusão é média.
8. SE 'temperatura é alta' e 'altitude é média', ENTÃO a difusão é média alta.
9. SE 'temperatura é alta' e 'altitude é alta', ENTÃO a difusão é alta.

Figura 12 – Gráficos difusão $\times$ altitude.Figura 13 – Gráficos difusão $\times$ temperatura.

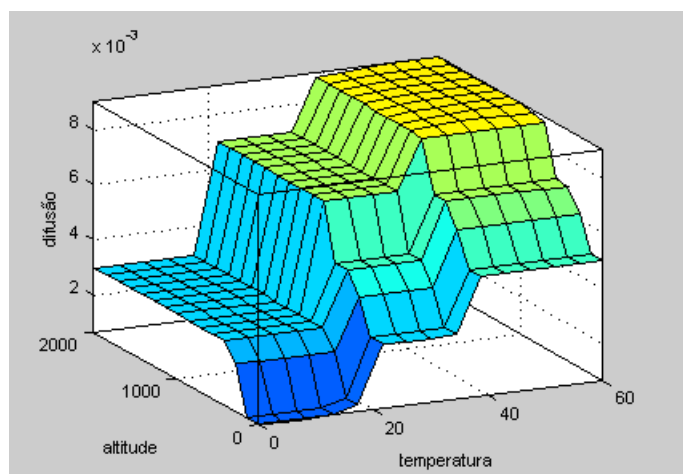


Figura 14 – Gráfico difusão em função da temperatura e da altitude.

Pelo método de inferência de Mandami e pelo método de defuzificação do centro de gravidade a solução do sistema fuzzy foi obtida e podemos observá-la na figura 9.

5 Resultados e discussões

5.1 Introdução

A análise da dispersão de poluentes no ambiente amazônico torna-se um desafio considerando suas dimensões e particularidades, desta forma, buscou-se trabalhar com abordagens alinhadas com estudos teóricos.

A busca por coeficientes adequados à realidade dos mais diferentes fenômenos ambientais ainda constitui um grande desafio para variados campos de pesquisas.

A difusão aqui abordada reflete apenas uma forma de procurar entender o complexo movimento de gases na atmosfera, pois há outras formas de modelar os coeficientes, considerando cada ambiente e outras variáveis.

Para os resultados foram utilizadas rotinas em ambiente computacional, cuja interface gráfica permite facilidades na análise dos fenômenos tratados, além de uso de conceitos e características fuzzy.

A região do reservatório da hidrelétrica de Santo Antônio foi dividida em duas partes, a saber, região 1 e região 2.

A região 1 constitui a parte mais próxima da barragem do reservatório, onde temos impacto ambiental devido à inundação de regiões próximas, sendo portanto, um local com potencial para emissões acentuadas.

Para a região 2, próxima a barragem da hidrelétrica de Jirau, também são feitas simulações de dispersão de gás em locais alagados em função da criação do reservatório juntamente com a barragem de Jirau.

5.2 A região 1

Para a obtenção da simulação sobre a região 1 do reservatório foram utilizados os parâmetros constantes na tabela 1, com 2000 iterações, para um intervalo de 48 horas.

Tabela 1 – Parâmetros utilizados nas simulações para a região 1.

Parâmetros	Valores	Unidades
V(vento)	3.6	km/h
θ (direção)	$-3\pi/4$	radianos
met(metano)	0.018	$\mu\text{mol}/\text{km}^2/\text{h}$
k(permeabilidade)	0.01	m/s
σ (degradação)	$1.2\text{e-}5$	km^2/h
α (difusão)	0.0012	km^2/h

As emissões de reservatórios devem variar de forma ampla de acordo com a localização geográfica, com a profundidade, tipo de vegetação, temperatura, dentre outros (SBRISSIA, 2008; SANTOS et al., 2005; FEARNSIDE, 2002).

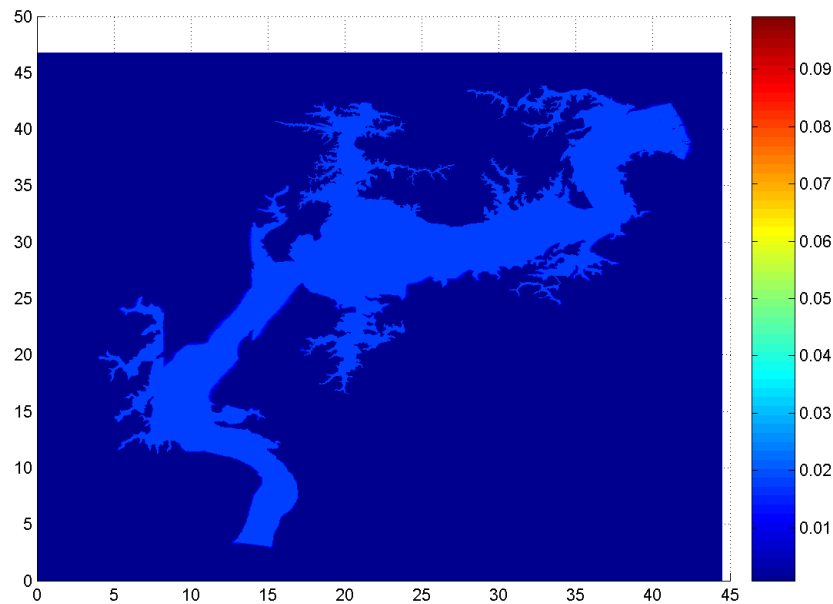


Figura 15 – Condição inicial para a região 1.

Todos esses fenômenos influenciam na dinâmica de matéria orgânica presente no reservatório, influenciando os padrões das emissões. O cenário apresentado na figura (15) representa a condição inicial da região do reservatório estudado com fonte apenas na região da superfície do lago, e nenhuma concentração na região externa ao mesmo.

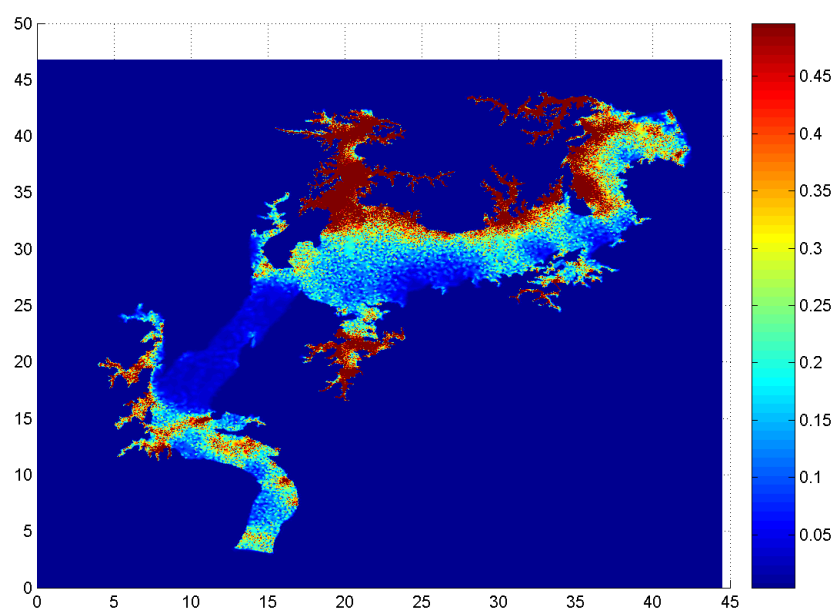


Figura 16 – Condição para a região 1 com 5 iterações (0,12 h).

Os cenários apresentados nas figuras (16) e (17) representam a difusão do metano das regiões periféricas do rio, apresentando um gradiente de concentração entre essas regiões possivelmente devido a fatores advectivos e quantidade de biomassa como fonte associado à baixa profundidade do local em comparação com o canal do rio.

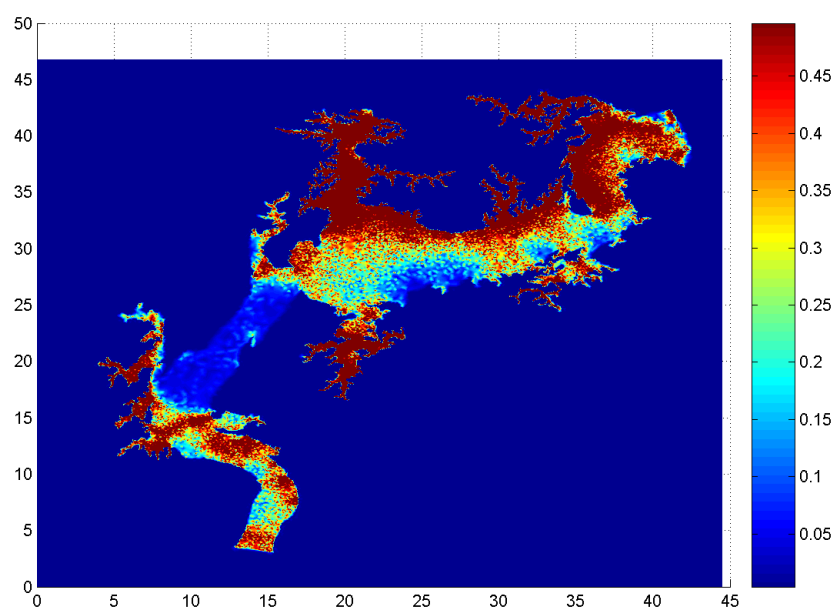


Figura 17 – Condição para a região 1 com 10 iterações (0,24 h).

Segundo [Abril et al. \(2005\)](#), a decomposição da biomassa alagada é considerada a principal fonte de gases em reservatórios nos três primeiros anos após o alagamento.

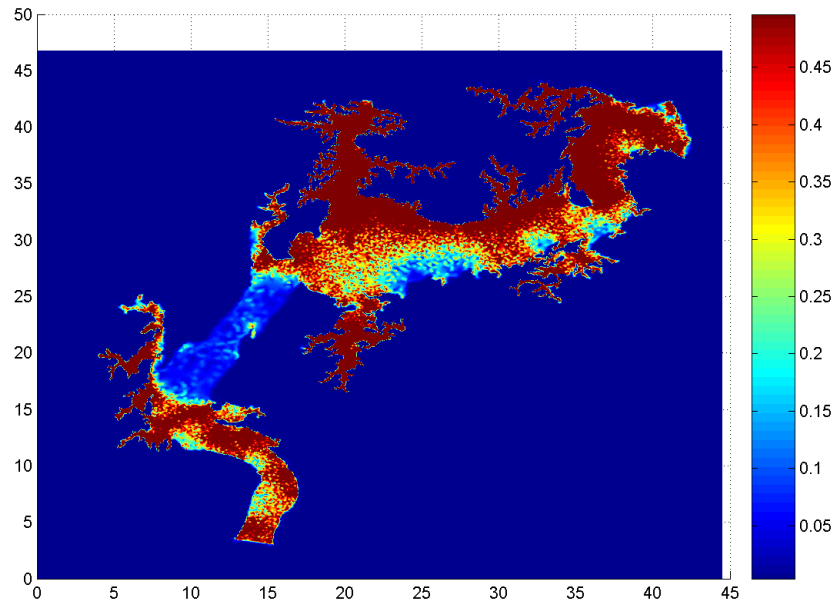


Figura 18 – Condição para a região 1 com 15 iterações (0,36 h).

Segundo [Fearnside \(2008\)](#) a profundidade de 0-3 m possui emissão maior que a de 7-8 m de profundidade, o que pode ser atribuído a menor temperatura da camada de 7-8 m afetando a pressão e a solubilidade do CH_4 , o que pode justificar o espalhamento do gás das regiões periféricas para a calha central.

Ao ser gerado em condições anóxicas e entrar em contato com a atmosfera, o metano possui a característica de elevar-se rapidamente para camadas superiores da mesma. Para o cenário apresentado na figura (18) temos o aumento da dispersão com o aumento das iterações, evidenciando o caráter dispersivo que o gás sofre ao liberar-se para a atmosfera.

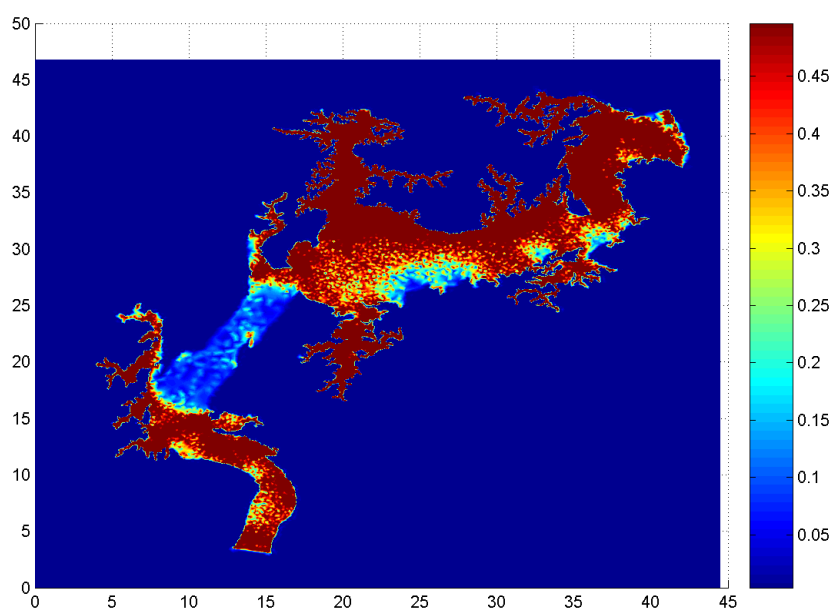


Figura 19 – Condição para a região 1 com 20 iterações (0,48 h).

A dispersão observada nas figuras (19) e (20) indicam um espalhamento acentuado sobre toda a parte central da região, com excessão de uma pequena parte do rio, onde não há concentração de lagos próximos e igarapés, em que possivelmente forças como correntezas dificultam a concentração de matéria orgânica tais como madeira, galhos e folhas de árvores, para depositar-se sobre as margens, dificultando a possibilidade de decomposição e de reações químicas, o que pode alterar a quantidade de emissões nesta região.

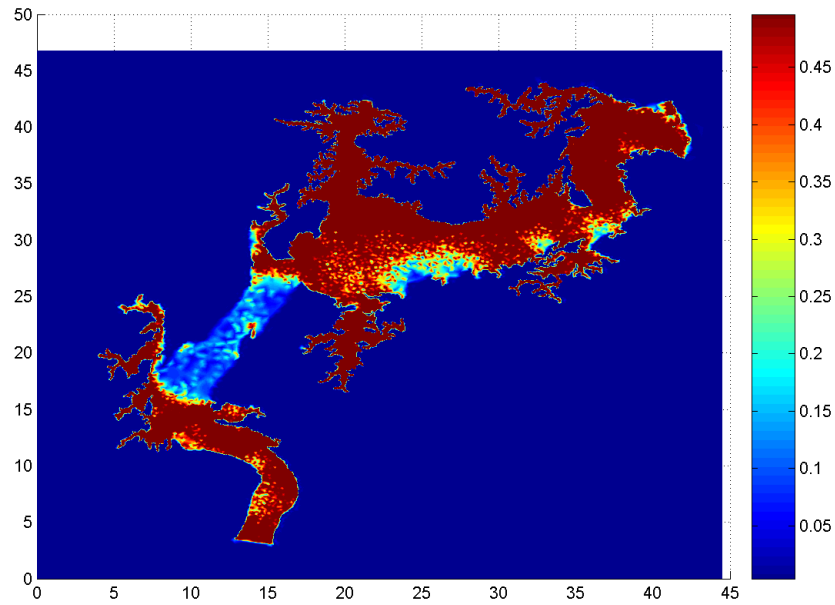


Figura 20 – Condição para a região 1 com 25 iterações (0,50 h).

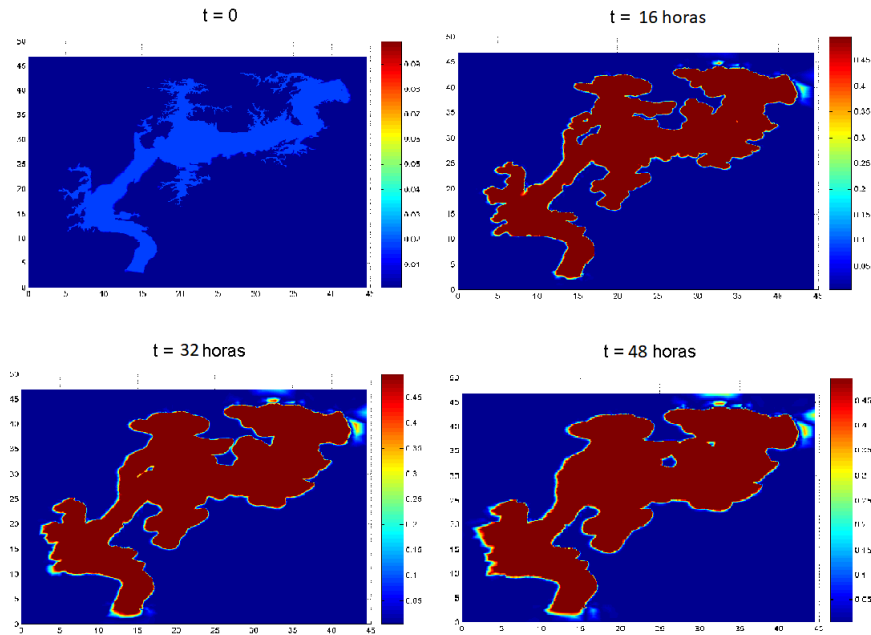


Figura 21 – Condição para a região 1 com 4 períodos de tempo.

As dispersões estão associadas ao coeficiente de difusão e forças advectivas para a região, cujas componentes para a região tratada são no sentido nordeste para sudoeste, influenciando com o passar das iterações o sentido da nuvem de gás para o meio exterior ao reservatório, como podemos observar na figura (21) para os cenários de 0, 8, 16 e 24 horas.

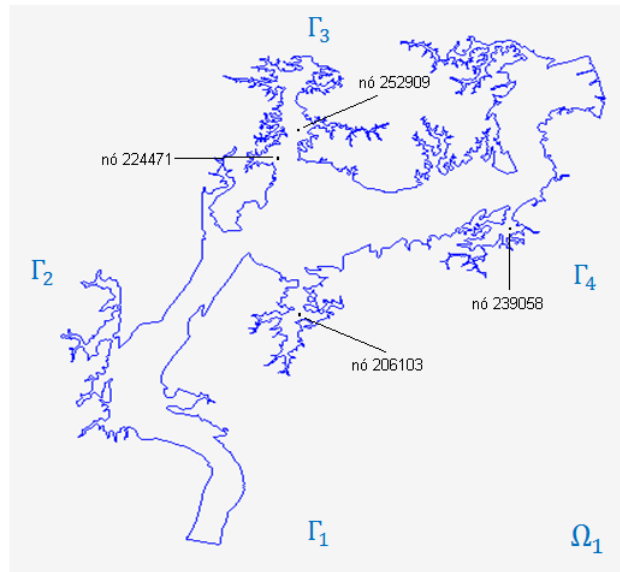


Figura 22 – Localização dos nós para a região 1.

Como pode ser observado na figura (22), a localização destes nós sobre regiões periféricas em relação à calha principal do rio sugerem novamente relação com biomassa afundada e águas escuras. Observamos que a medida que o tempo evolui, aumentam as concentrações nestes pontos, alguns de forma mais acentuada como os nós 252909 e 206103, enquanto que os nós 224471 e 239058 apresentam aumento gradativo.

Na figura (23) são apresentadas concentrações para quatro diferentes nós no domínio em função das iterações. As concentrações referentes aos nós analisados apresentam concentração essencialmente rápida devido à característica que o gás metano possui de elevar-se rapidamente para as camadas superiores da atmosfera.

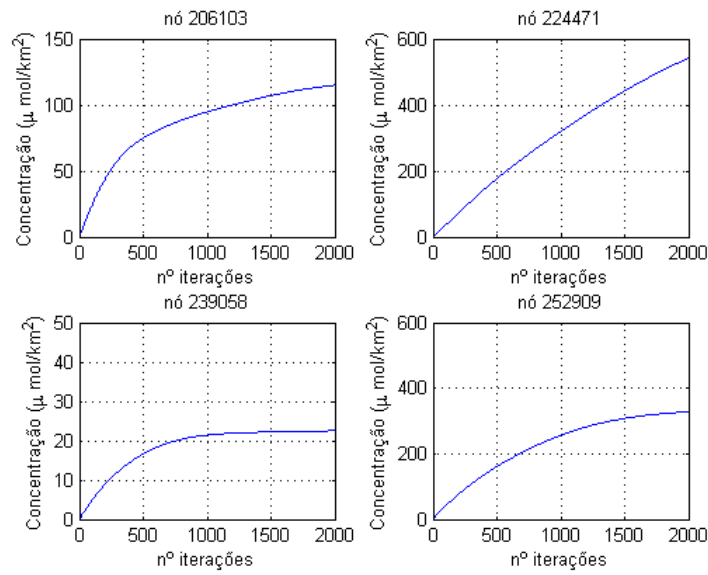


Figura 23 – Concentração de 4 nós para a região 1.

5.3 A região 2

Para a região 2 do reservatório da hidrelétrica de Santo Antônio temos os parâmetros mostrados na tabela 2 para as simulações. Esta parte do reservatório caracteriza-se por estar aproximadamente 50 km da barragem, apresentando à sua margem esquerda parte da vegetal natural, sendo que à direita temos registros de atividade voltada para a agropecuária.

O regime sazonal do nível de água para a região, inundando de outubro a abril e expondo grandes áreas de terra ao redor da margem de maio a setembro, são potenciais fontes que lançam na atmosfera grandes quantidades de metano.

Tabela 2 – Parâmetros utilizados nas simulações para a região 2.

Parâmetros	Valores	Unidades
V (vel.vento)	3.6	km/h
θ (direção vento)	$-3\pi/4$	radianos
f (fonte de metano)	0.018	$\mu\text{mol}/(\text{km}^2 \text{ h})$
k (permeabilidade)	0.01	m/s
σ (degradação)	$1,2 \times 10^{-5}$	km^2/h
α (difusão)	0.0012	km^2/h

A região encontra-se à jusante da hidrelétrica de Jirau. O cenário apresentado na figura (24) apresenta a condição inicial para a superfície do rio e do entorno onde temos partes alagadas, não há valores nesta parte inicial para regiões fora da superfície da água.

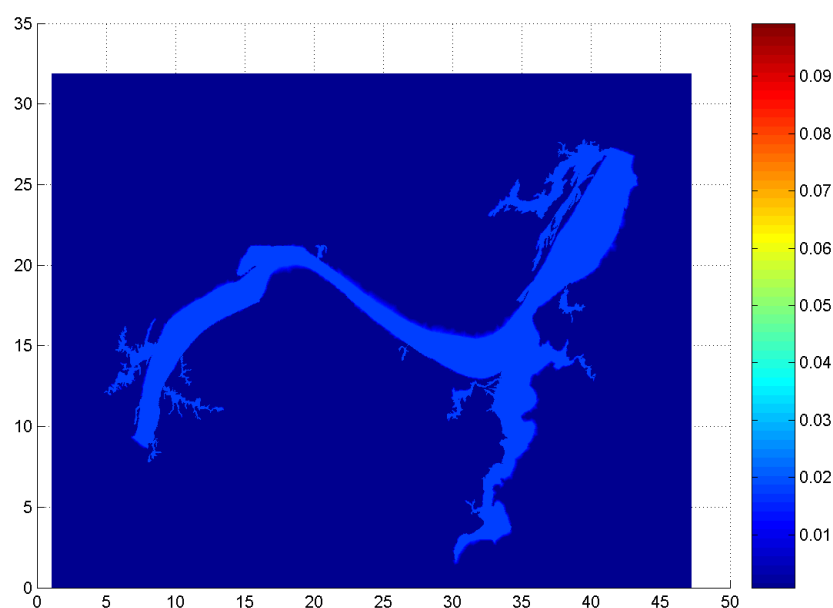


Figura 24 – Condição inicial para a região 2.

Encontramos para os cenários apresentados nas figuras (25) e (26) condições onde a dispersão do gás ocorre inicialmente nas regiões periféricas em relação à parte central do rio, devido possivelmente a fatores como os citados para a região 1. De acordo com Kelly et al. (1994), após a inundação do reservatório, o sistema antes neutro passa a ser emissor de gases de efeito estufa, como o metano.

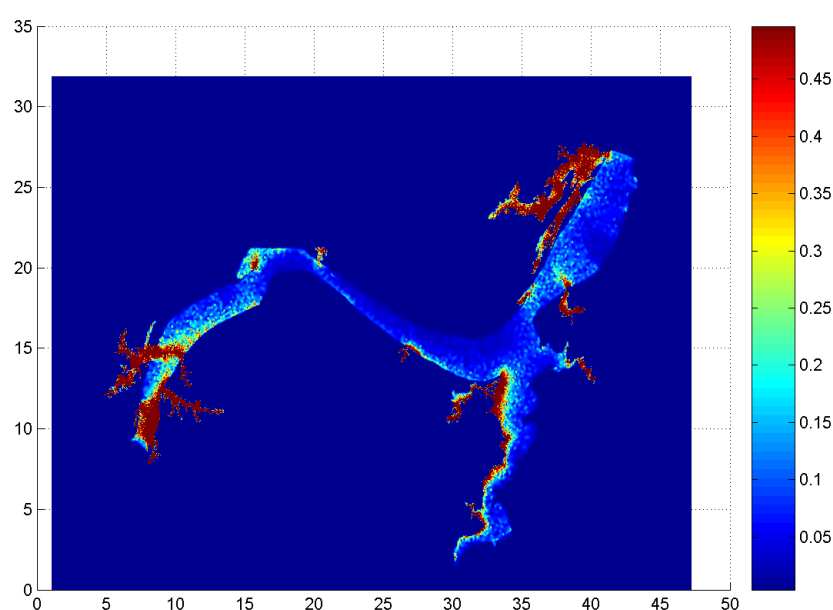


Figura 25 – Cenário de dispersão para a região 2 com 5 iterações (0,12 h).

Desta forma, regiões com águas escuras, que podem acelerar o processo emissivo, maior quantidade de matéria orgânica, como galhos, árvores e folhas, somado a águas com pouca mobilidade, podem ser responsáveis por uma parcela importante nas emissões à montante da barragem, onde o fluxo é maior. Há o entendimento que a quantidade a matéria orgânica inundada seria gradualmente reduzida, tendo como consequência baixas nas quantidades emitidas com o passar dos anos.

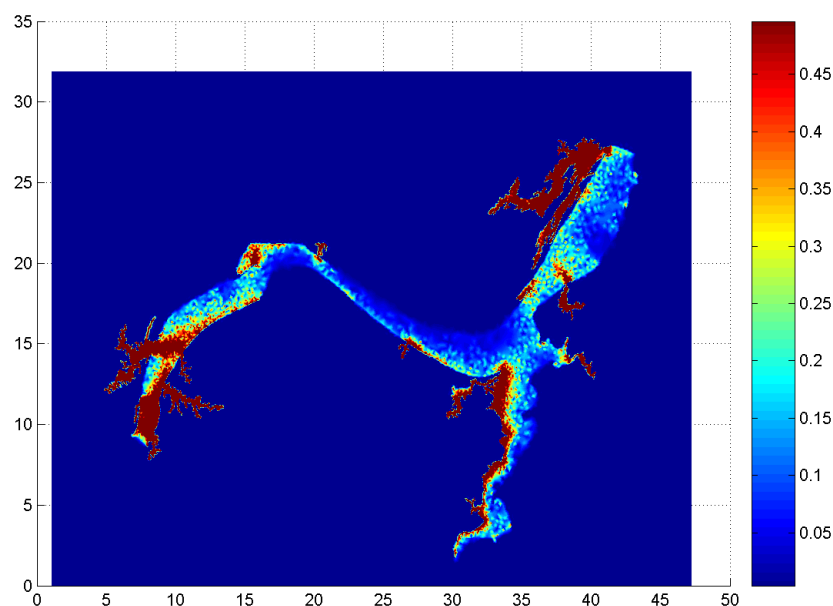


Figura 26 – Cenário de dispersão para a região 2 com 10 iterações (0,24 h).

A região próxima à barragem de Jirau pode ter influência do movimento turbulento das turbinas, segundo [UNESCO \(2009\)](#) devido à turbulência que as turbinas causam na água transportada a jusante do reservatório, quantidades prolongadas de metano podem ser emitidas para a atmosfera logo após a barragem.

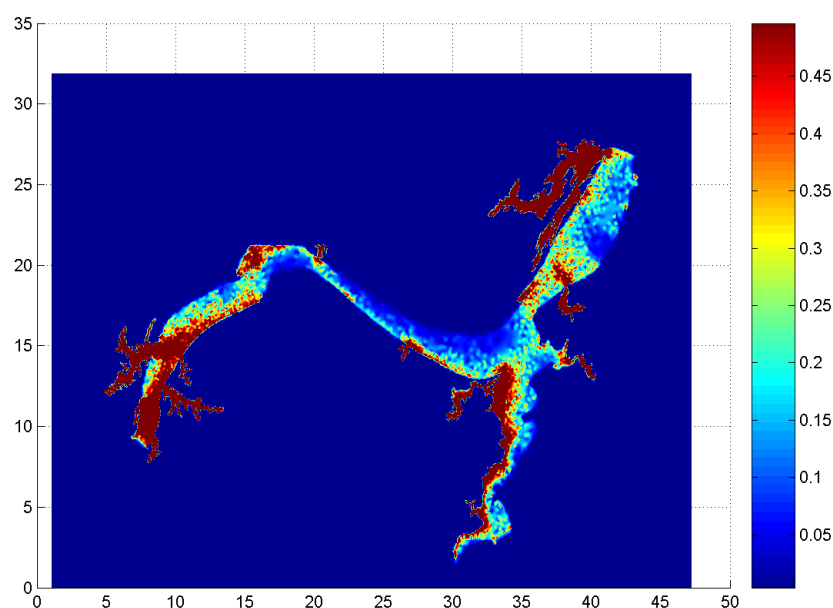


Figura 27 – Cenário de dispersão para a região 2 com 15 iterações (0,36 h).

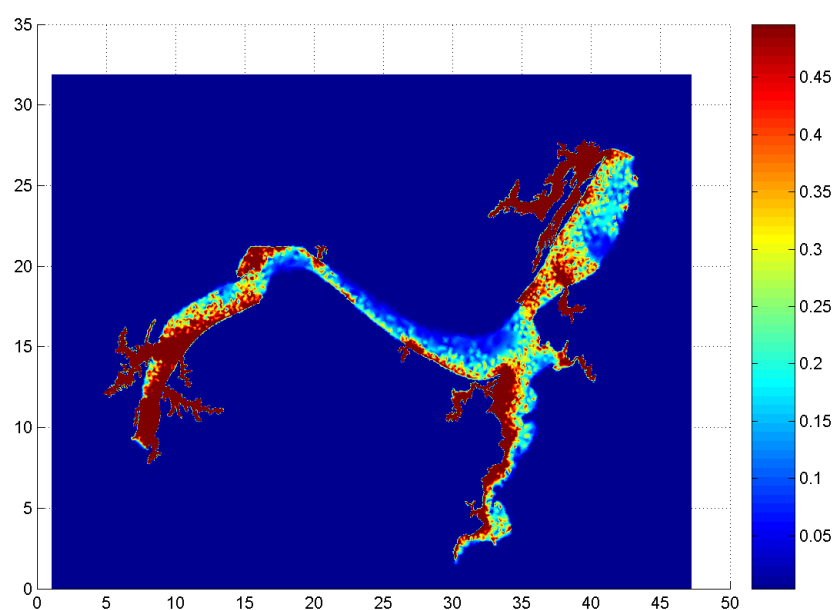


Figura 28 – Cenário de dispersão para a região 2 com 20 iterações (0,48 h).

Para os cenários observados nas figuras (27) e (28) e (29) observamos uma tendência do gás em sobrepor a região estudada possivelmente devido à rápida ascensão para camadas superiores da atmosfera e a ação advectiva da região, possuindo sentido de nordeste para sudoeste.

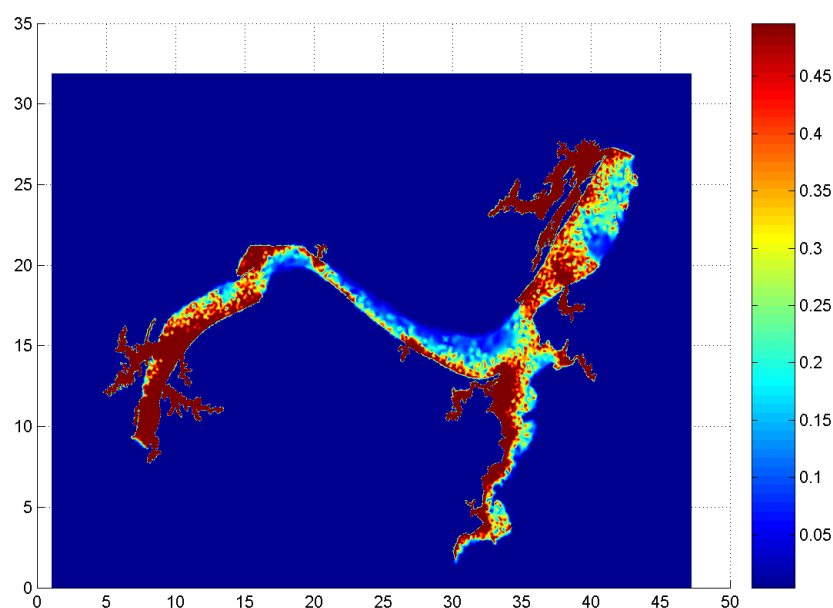


Figura 29 – Cenário de dispersão para a região 2 com 25 iterações (0,50 h).

Para o cenário observado na figura (30) temos a representação da concentração para diferentes períodos horários, onde percebemos que a concentração torna-se efetiva sobre todo o reservatório, com espalhamento sobre a região do entorno com o aumento das iterações, as correntes advetivas possivelmente interferem na dinâmica de espalhamento consideradas para a região, considerando que a mesma participa do chamando corredor de humidade da Amazônia.

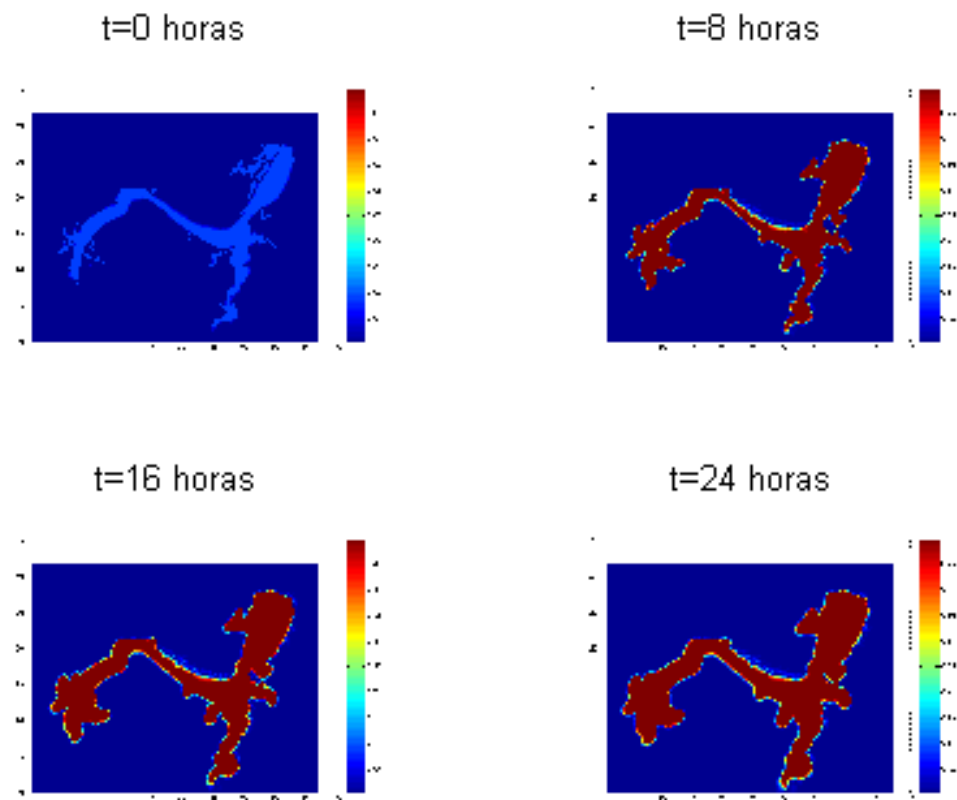


Figura 30 – Cenário para a região 2 com $t=0$ h, $t=8$ h, $t=16$ h e $t=24$ h.

As concentrações de quatro nós escolhidos no domínio (ver figura (31)) podem ser observadas na figura (32), onde podemos notar para 2000 iterações uma rápida concentração com uma posterior estabilização da mesma, onde possivelmente a fonte para esta parte do reservatório atingiu seu valor máximo juntamente com os processos advectivos.

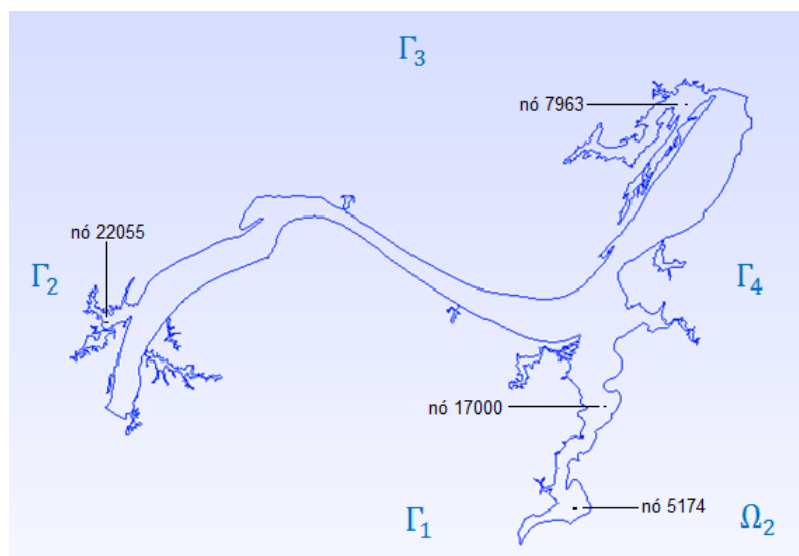


Figura 31 – Região 2 com a localização dos nós escolhidos.

A concentração alta para o nó 22055 pode estar associada a localização do mesmo próximo a barragem de Jirau e em regiões com alta concentração de águas escuras com madeira em decomposição.

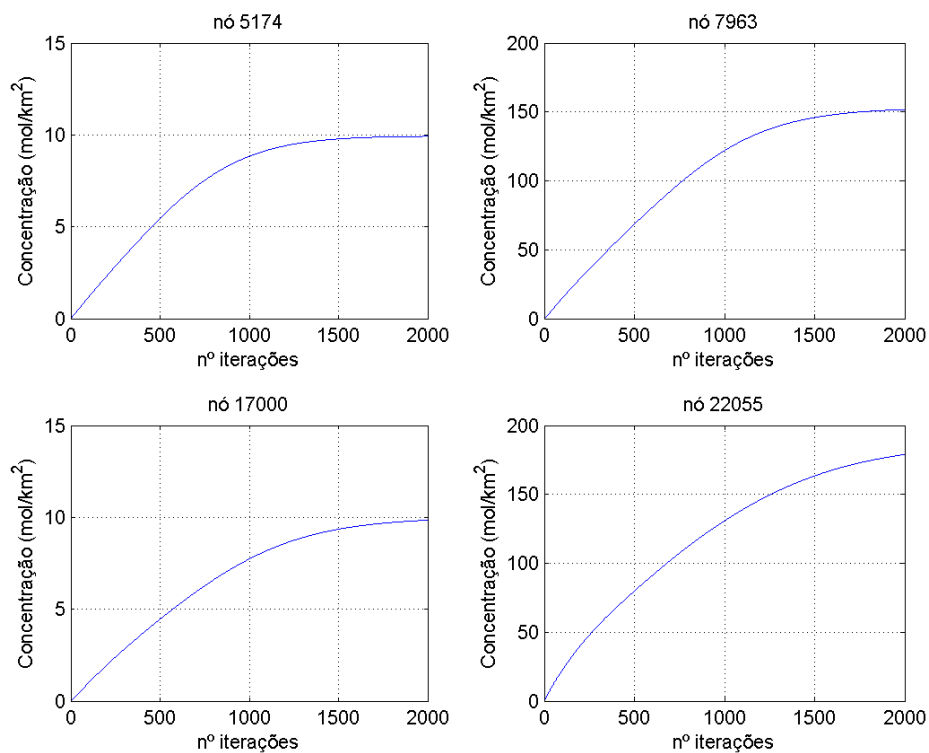


Figura 32 – Concentração dos nós para região 2.

O reservatório possui cerca de 90 km de extensão em linha reta, cobrindo uma área

de aproximadamente 546 km²; somente esta região analisada possui cerca de 39 km de extensão com várias possíveis fontes em igarapés e lagos próximos ao leito principal do rio, de maneira que a precisão na obtenção de medidas para fontes torna-se de difícil obtenção.

6 Conclusão

Os cenários expostos procuram retratar a dispersão de gás metano na atmosfera, num domínio bidimensional sobre a região do reservatório da hidrelétrica de Santo Antônio, fenômeno bastante complexo devido a dificuldades encontradas na dinâmica advectiva, como reações químicas e processos naturais, ação antropogênica, em particular sobre a região amazônica.

Desta forma, os cenários apresentados mostraram-se coerentes com estudos teóricos sobre o processo de emissão de gases, o coeficiente difusivo foi estimado levando em consideração conceitos e procedimentos fuzzy para fatores como temperatura e perfil vertical, onde espera-se que um aumento da altitude e da temperatura possibilite uma maior difusão.

As regiões analisadas apresentaram resultados para as simulações de acordo o esperado, sendo observada a nuvem de gás da região periférica para a central; no caso da região 2.

Considerando que o presente trabalho constiui uma abordagem em um problema amplo sobre a região amazônica, como sugestão para trabalhos futuros pode ser dado a abordagem tridimensional para o problema de dispersão e com a inserção de mais variáveis para a obtenção do coeficiente de difusão, como a humidade relativa, por exemplo.

Referências

- ABRIL, G.; GUÉRIN, F.; RICHARD, S.; DELMAS, R.; GALY-LACAUX, C.; GOSSE, P.; TREMBLAY, A.; VARFALVY, L.; SANTOS, M. A.; MATVIENKO, B. Carbon dioxide and methane emissions and the carbon budget of a 10-year old tropical reservoir (petit saut, french guiana). *Global Biogeochemical Cycles*, v. 19, p. 1–16, 2005.
- BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Campinas-SP: UNICAMP–IMECC, 2006. (Coleção Imecc, v. 5).
- BARROS, N.; COLE, J.; TRAVINK, L.; PRAIRIE, Y.; BASTVIKEN, D.; HUSZAR, V.; GIORGIO, P. D.; RORLAND, F. Carbon emission from hydroelectric reservoirs linked to reservoir age and latitude. *Nature Geoscience*, n. 4, p. 593–596, 2011.
- BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. 1. ed. N.York: Wiley Interscience, 1995.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino e aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.
- BASSANEZI R. C. ; FERREIRA, J. W. C. *Equações diferenciais com aplicações*. S.Paulo: Harbra, 1988.
- BASTVIKEN, D. Organic compounds-methane. *Elsevier*, p. 782–805, 2009.
- BASTVIKEN, D.; COLE, J.; PACE, M.; TRANVIK, L. Methane emissions from lakes: Dependence of lake characteristics, two regional assessments, and a global estimate. *Global Biogeochemical Cycles*, v. 18, n. 4, 2004.
- BOUSQUET, P.; CIAIS, P.; MILLER, J.; DLUGOKENCKY, E.; HAUGLUSTAIN, D.; PRIGENT, C. Contribution of anthropogenic and natural sources to atmospheric methane variability. *Nature*, v. 443, p. 439–443, 2006.
- BRENNER, S.; SCOTT, L. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. N.York: Springer, 2007.
- CAREY, G. F.; ODEN, J. T. *Finite Elements: mathematical aspects*. N.York: John Wiley & Sons, 1981. v. 4.
- CASTANHO, M. J. P. *Construção e avaliação de um modelo matemático para prever a evolução do câncer de próstata e descrever seu crescimento utilizando a teoria dos conjuntos fuzzy*. Tese (Doutorado) — FEEC–UNICAMP, Campinas-SP, 2005.
- CASTRO, S. E. P. *Modelagem e aproximação numérica do estudo de poluente no ar*. Dissertação (Mestrado) — IMECC–UNICAMP, Campinas-SP, 1993.
- CIARLET, P. G. *The nite element method for elliptic problems*. Amsterdam: North Holand, 1978.
- CICERONE, R.; OREMLAND, R. Biogeochemical aspects of atmospheric methane. *Global Biogeochem Cycles*, v. 2, p. 299–327, 1988.

- CRESSOT, C.; CHEVALLIER, F.; BOUSQUET, P.; CREVOISIER, C.; DLUGOKENCKY, E. J.; FORTEMS-CHEINEY, A. On the consistency between global and regional methane emissions inferred from sciamachy, tanso-fts, iasi and surface measurements. *Atmospheric Chemistry and Physics*, n. 14, p. 577–592, 2014.
- DANCONI, L. A.; ANGELIS, A. F.; POLETTI, E. Modelagem e simulação numérica da dispersão de poluentes via equação de difusão-advecção. In: CONGRESSO DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL - CMAC, SUDESTE. Bauru-SP: SBMAC, 2013.
- DEMARTY, M.; BASTIEN, J.; TREMBLAY, A. Annual follow-up of gross diffusive carbon dioxide and methane emissions from a boreal reservoir and two nearby lakes in québec, canada. *Biogeosciences*, v. 8, p. 41–53, 2011.
- DINIZ, G. L. *Dispersão de poluentes num sistema ar-água: modelagem, aproximação e aplicações*. Tese (Doutorado) — FEEC–UNICAMP, Campinas-SP, 2003.
- EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical Models in Biolog.* 1. ed. N.York: Random House, 1988. 608 p.
- FEARNSIDE, P. Greenhouse gas emissions from a hydroelectric reservoir (brazil's tucuruí dam) and energy policy implication. *Water and Soil Pollution*, 2002.
- FEARNSIDE, P. M. Hidrelétricas como “fábricas de metano”: O papel dos reservatórios em áreas de floresta tropical na emissão de gases de efeito estufa. *O Ecologia Brasiliensis*, v. 12, p. 100–115, 2008.
- GAGNON, L.; CHAMBERLAND, A. Emissions from hydroelectric reservoirs and comparison of hydroelectric, natural gas, and oil. *Ambio*, v. 22, n. 8, p. 568–569, 1993.
- HALLQVIST, E. *Methane emissions from three tropical hydroelectrical reservoirs*. Dissertação (Mestrado) — Uppsala University, Sweden, 2012.
- HEIN, R.; CRUTZEN, P.; HEIMANN, M. An inverse modeling approach to investigate the global atmospheric methane cycle. *Global Biogeochemical cycles*, v. 11, n. 1, p. 43–76, 1997.
- HEINRICH, J. C.; MITCHELL, A. R.; ZIENKIEWICZ, O. C. An upwind finite elements scheme for two-dimensional convective transport equation. *Int. J. Num. Meth. In Eng.*, v. 11, p. 131–143, 1977.
- HOUWELING, S.; KAMINSKI, T.; DENTENER, F.; LELIEVELD, J.; HEIMANN, M. Inverse modeling of methane sources and sinks using the adjoint of a global transport model. *Journal Geophysical Research*, v. 104, p. 137–160, 1999.
- IÓRIO, R. J.; IÓRIO, V. *Equações diferenciais parciais: Uma introdução*. R.Janeiro: IMPA, 1988.
- JAFELICE, R. S. M. *Modelagem Fuzzy para dinâmica de transferência de soropositivos para HIV em doença plenamente manifesta*. Tese (Doutorado) — FEEC–UNICAMP, Campinas-SP, 2003.
- KELLY, C.; RUDD, J.; LOUIS, V. S.; MOORE, T. Turning attention to reservoir surfaces, a neglected area in greenhouse studies. *Eos Trans. AGU*, v. 75, n. 29, p. 332, 1994.

- KEPPLER, F.; HAMILTON, J.; BRAB, M.; RÖCKMANN, T. Methane emissions from terrestrial plants under aerobic conditions. *Nature*, v. 439, p. 187–191, 2006.
- KIRSCHKE, S.; BOUSQUET, P.; CIAIS, P.; SAUNOIS, M.; CANADELL, J. G.; DLUGOKENCKY, E. J. Three decades of global methane sources and sinks. *Nature Geoscience*, v. 4, p. 813–823, 2013.
- LIONS, J. L. *Equations Differentielles Operationnelles et Problèmes aux Limites*. Berlin: Springer, 1961.
- LOUIS, V. S.; KELLY, C.; DUCHEMIN, E.; RUDD, J.; ROSENBERG, D. Reservoir surfaces as sources of greenhouse gases to the atmosphere: A global estimate. *BioScience*, n. 50, p. 766–775, 2000.
- MARANI, L.; ALVALA, P. C. Methane emissions from lakes and floodplains in pantanal, brazil. *Atmospheric Environment*, v. 41, n. 8, p. 1627–1633, 2007.
- MARCHUCK, G. *Mathematical Models in Environmental Problems, Studies in Mathematics and its Applications*. North Holland: Elsevier Science Publishers, 1986. v. 16. 216 p.
- MEYBECK, M. Riverine transport of atmospheric carbon sources, global typology and budget. *Water Air Soil pollut*, v. 70, p. 443–463, 1993.
- MISTRO, D. C. *O problema em rios por mercúrio metálico: Modelagem e simulação numérica*. Dissertação (Mestrado) — IMEEC–UNICAMP, Campinas-SP, 1992.
- MOREIRA, J. C.; WROBEL, L. C. Um modelo de elementos finites para análise de dispersão. *Relatório interno COPPE-UFRJ*, 1983.
- NOAA. *Methane measurements*. https://esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends_ch4/, 2017.
- OKUBO, A.; LEVIN, S. *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*. 2. ed. Berlin: Springer, 1980. v. 14.
- OLIVEIRA, R. F. *Comportamento evolutivo de uma mancha de óleo na Baía de Ilha Grande, RJ: Modelagem, análise numérica e simulações*. Tese (Doutorado) — IMEEC–UNICAMP, Campinas-SP, 2003.
- PEIXOTO, M. *Sistemas dinâmicos e controladores fuzzy: um estudo da dispersão da morte súbita dos citros em São Paulo*. Tese (Doutorado) — FEEC–UNICAMP, Campinas-SP, 2005.
- POLETTI, E. C. C.; MEYER, J. F. C. A. Dispersão de poluentes em sistema de reservatório: Modelagem matemática via lógica fuzzy e aproximação numérica. *Biomatemática*, v. 19, p. 57–68, 2009.
- PRESTES, M. F. B.; MEYER, J. F. C. A.; POLETTI, E. C. C. Dispersão de material impactante em meio aquático: modelo matemático, aproximação numérica e simulação computacional - reservatório do salto grande, americana-sp. *Biomatemática*, v. 23, p. 43–56, 2013.
- ROSA, L.; SANTOS, M.; MATIVIENKO, B.; SANTOS, E.; SIKAR, E. Green house gas emissions from hydroelectric reservoirs in tropical regions. *Climatic Change*, v. 66, p. 9–21, 2004.

- ROSA, L. P.; SCHAFFER, R. Greenhouse gas emissions from hydroelectric reservoirs. *Ambio*, v. 23, n. 2, p. 164–165, 1994.
- RUDD, J. W. M.; HARRIS, R.; KELLY, C. A.; HECKY, R. E. Are hydroelectric reservoirs significant sources of greenhouse gases? *Ambio*, v. 22, n. 4, p. 246–248, 1993.
- SANTOS, M. A.; MATVIENKO, B.; ROSA, L. P.; SIKAR, E. *Carbon dioxide and methane emissions from hydroelectric reservoirs in Brasil*. Rio de Janeiro-RJ, 2005.
- SBRISSIA, R. *Modelagem das espécies de carbono na coluna de água e predição de gases de efeito estufa em reservatórios. Estudo de caso: PCH Salto Natal, Campo Mourão-PR*. Dissertação (Mestrado) — UFPR, Curitiba-PR, 2008.
- SHAO, J. Fuzzy categorization of weather conditions for thermal mapping. *Journal of Applied Meteorology*, n. 39, p. 1784–1790, 1999.
- SILVA, E. M.; BRABO, J. M. A.; CASTRO, M. A. H.; VIEIRA, V. P. P. B.; CAMPOS, J. N. B. Uma aplicação de conjuntos difusos na otimização do prognóstico de consenso sazonal de chuva no nordeste do brasil. *Revista Brasileira de Meteorologia*, v. 22, p. 83–93, 2007.
- SOBEK, S.; TRAVIK, L.; COLE, J. Temperature independence of carbon dioxide supersaturation in global lakes. *Global Biogeochem*, v. 19, 2005.
- SUGENO, M.; KANG, G. T. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, v. 28, p. 15–33, 1988.
- SVENSSON, B. S.; ERICSON, S. Does hydroelectric power increase global warming? *Ambio*, v. 22, n. 8, p. 569–570, 1993.
- TRAVINK, L.; DOWNING, J. A.; COTNER, J. B.; LOISELLE, S. A.; STRIEGL, R. G.; BALLATORE, T. J.; KORTELAINE, P. L. Lakes and reservoirs as regulators of carbon cycling and climate. *Limnol Oceanography*, n. 54, p. 2298–2314, 2009.
- UNESCO. *The unesco/IHA measurement specification guidance for evaluating the GHG status of man-made freshwater reservoirs*. 1. ed. [S.l.], 2009.
- WUEBBLES, D.; HAYHOE, K. Atmospheric methane and global change. *Earth-Science Reviews*, v. 57, p. 177–210, 2002.
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Journal Information and Control*, n. 8, p. p.338–353, 1965.

APÊNDICE A – Código usado para as simulações da região 1

```

clear all;

t0=cputime;

format long;

parametros do modelo

a = 0.0012; coeficiente difusivo

sig = 1.5e-2; coeficiente de degradacao

d = 1.10; distancia real em km

r = 0.00494; distancia em coordenadas geograficas

V = 3.6; velocidade do vento (km/h)

tet= -3*pi/4; direcao do vento

met= 0.018; fonte de metano media

k = 0.01; permeabilidade em Gama 1 e 2

malha do dominio (gerada pelo gmsh)

load dados_regiao1.mat;

dados da regioa 1(malharegioa1, malhasregiao1, coordregiao1,
elemfrontregiao1)

ntr = length(malharegioa1); calculo do n° de elementos da malha

ntn = length(coordregiao1); calculo do n° de nos da malha

tfinal=48; atribuicao do instante final (horas)

itmax =2000; n° maximo de iteracoes no tempo

coordregiao1(:,1) = (d/r)*(64.14+coordregiao1(:,1)); mudanca para coordenadas
cartesianas

coordregiao1(:,2) = (d/r)*(8.98+coordregiao1(:,2)); mudanca para coordenadas
cartesianas

xmax = max(coordregiao1(:,1)); calculo do valor máximo no eixo x

ymax = max(coordregiao1(:,2)); calculo do valor máximo no eixo y

```

```

calculo dos parametros da discretizacao temporal
dt = tfinal/itmax;
mdt = dt/2;
preparacao dos parametros que independem das coordenadas
c1 = mdt*sig; coef. aux (fi-j | fi-i)
c2 = mdt*a; coef. (grad fi-j | grad fi-i)
Vx = mdt*V*cos(tet); coef. (d fi-j/dx | fi-i)
Vy = mdt*V*sin(tet); coef. (d fi-j/dy | fi-i)
stm=(1+c1); coef. a esq (fi-j | fi-i)
stn=(1-c1); coef. a dir (fi-j | fi-i)
submatrizes de rigidez
(fi-j)*(fi-i)
mfi=[1/12 1/24 1/24; 1/24 1/12 1/24; 1/24 1/24 1/12];
submatrizes nas fronteiras Gama 1 e Gama 2
mfo=[1/3 1/6; 1/6 1/3];
montagem das matrizes do sistema
A = sparse(ntn,ntn);
B = sparse(ntn,ntn);
d = zeros(ntn,1);
c = zeros(ntn,1);
x=zeros(3);
y=x;
Estabelecendo a contagem de tempo para execucao do codigo
tt=cputime;
Inicio da rotina de calculos
for itr=1:ntr
for il=1:3
ig = malhasregiao1(itr,il);
x(il)=coordregiao1(ig,1);
y(il)=coordregiao1(ig,2);

```

```

end

jac = det([(x(2)-x(1)) (x(3)-x(1));(y(2)-y(1)) (y(3)-y(1))]);
s = abs(jac);

calculo das entradas para as submatrizes restantes

dfdx(1)=y(2)-y(3); dfdy(1)=x(3)-x(2);
dfdx(2)=y(3)-y(1); dfdy(2)=x(1)-x(3);
dfdx(3)=y(1)-y(2); dfdy(3)=x(2)-x(1);

Obtendo a submatriz de rigidez para (grad fi_i | grad fi_j)
gra1 = [(dfdx(1)2) (dfdx(1)*dfdx(2)) (dfdx(1)*dfdx(3));
(dfdx(2)*dfdx(1)) (dfdx(2)2) (dfdx(2)*dfdx(3));
(dfdx(3)*dfdx(1)) (dfdx(3)*dfdx(2)) (dfdx(3)2)];
gra2 = [(dfdy(1)2) (dfdy(1)*dfdy(2)) (dfdy(1)*dfdy(3));
(dfdy(2)*dfdy(1)) (dfdy(2)2) (dfdy(2)*dfdy(3));
(dfdy(3)*dfdy(1)) (dfdy(3)*dfdy(2)) (dfdy(3)2)];
mgf = gra1 + gra2;

Obtendo a submatriz de rigidez para (d fi-j/dx | fi-i)
mdx = [dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);
dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3);
dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3)];

Obtendo a submatriz de rigidez para (d fi-j/dy | fi-i)
mdy = [dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);
dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3);
dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3)];

for il=1:3
ig = malhasregiao1(itr,il);
for jl=1:3
jg = malhasregiao1(itr,jl);
soma =(c2/s)*mgf(il,jl) + (Vx*mdx(il,jl) + Vy*mdy(il,jl))*s*mdt/(6*jac);
A(ig,jg) = A(ig,jg)+stm*s*mfi(il,jl)+soma;
B(ig,jg) = B(ig,jg)+stn*s*mfi(il,jl)-soma;

```

end

end

end

montando a fonte no vetor d para os nos do reservatorio

for ii=1:ntr

if malharegiao1(ii,4)==2

ig1 = malharegiao1(ii,1);

ig2 = malharegiao1(ii,2);

ig3 = malharegiao1(ii,3);

d(ig1) = dt*met;

d(ig2) = d(ig1);

d(ig3) = d(ig1);

end

end

Condicao inicial (distribuicao de metano sobre o dominio em $t = 0$)

for ii=1:ntr

if malharegiao1(ii,4)==2

ig1 = malharegiao1(ii,1);

ig2 = malharegiao1(ii,2);

ig3 = malharegiao1(ii,3);

c(ig1) = met;

c(ig2) = c(ig1);

c(ig3) = c(ig1);

end

end

Designando pontos para figura de 4 nos separados

p1=zeros(itmax);

p2=zeros(itmax);

p3=zeros(itmax);

p4=zeros(itmax);

Estabelecendo os arquivos para as animacoes

```
num=num2str(it);
trisurf(malhasregiao1,coordregiao1(:,1),coordregiao1(:, 2),c),view(0,90),
set(gca,'CLim',[0,.1]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
nome=strcat('img',num2str(it));
saveas(gcf,nome,'png');
```

Resolucao iterativa do sistema

```
it = 0;
```

```
for it = 1:itmax
```

```
p1(it)=c(206103);
```

```
p2(it)=c(224471);
```

```
p3(it)=c(239058);
```

```
p4(it)=c(252909);
```

Entrada/Saida nas fronteiras Gama 1 e 2

```
nnf = length(elemfrontregiao1);
```

```
for ii=1:nnf;
```

```
for il=1:2;
```

```
ig = elemfrontregiao1(ii,1);
```

```
x(il)=coordregiao1(ig,1);
```

```
y(il)=coordregiao1(ig,2);
```

```
end
```

```
jac2 = sqrt((x(2)-x(1))*(x(2)-x(1))+(y(2)-y(1))*(y(2)-y(1)));
```

```
for il=1:2;
```

```
ig = elemfrontregiao1(ii,1);
```

```
for jl=1:2;
```

```
s0 = mdt*jac2*k*mfo(il,jl);
```

```
end
```

```
c(ig) = c(ig)+s0;
```

```
end
```

```
end
```

Efetutando as operacoes do lado direito do sistema de equacoes

```
dir=B*c + d;
```

Resolvendo o sistema linear e atualizando valores

```
c=A\dir;
```

```
if mod(it,5)==0
```

```
num=num2str(it);
```

```
trisurf(malhasregiao1,coordregiao1(:,1),coordregiao1(:,2),c),view(0,90),set(gca,'CLim',[0,0.5]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
```

```
nome=strcat('result1\img',num2str(it));
```

```
saveas(gcf,nome,'png');
```

```
end
```

```
end
```

```
figure(2)
```

```
subplot(2,2,1) plot(p1),title('nó 206103'),ylabel('Concentração ( $\mu\text{mol}/\text{km}^2$ )'),  
xlabel('nº iterações'),grid on, axis([0 2000 0.0 150]);
```

```
subplot(2,2,2) plot(p2),title('nó 224471'),ylabel('Concentração ( $\mu\text{mol}/\text{km}^2$ )'),  
xlabel('nº iterações'),grid on, axis([0 2000 0.0 600]);
```

```
subplot(2,2,3) plot(p3),title('nó 239058'),ylabel('Concentração ( $\mu\text{mol}/\text{km}^2$ )'),  
xlabel('nº iterações'),grid on, axis([0 2000 0.0 50]);
```

```
subplot(2,2,4) plot(p4),title('nó 252909'),ylabel('Concentração ( $\mu\text{mol}/\text{km}^2$ )'),  
xlabel('nº iterações'),grid on, axis([0 2000 0.0 600]);
```

```
nome=strcat('result1\fig4nos');
```

```
saveas(gcf,nome,'png');
```

Cálculo do tempo de execucao do codigo

```
e=cputime-tt;
```

```
disp('tempo = ', e)
```

APÊNDICE B – Código usado para as simulações da região 2

```

clear all;

t0=cputime;

format long;

parametros do modelo

a=1.2e-3; coeficiente difusivo

sig=1.5e-2; coeficiente de degradacao

d=1.68; distancia real em km

r=1.529e-2; distancia em coordenadas geograficas

V=3.6; velocidade do vento (km/h)

tet=-3*pi/4; direcao do vento

met=0.018; fonte de metano media

k=0.01; permeabilidade em Gama 1 e 2

malha do dominio (gerada pelo gmsh)

load dados_regiao2.mat; dados da regio 2 (malha, malha_s, coord, frontregi3)

ntr=length(malha); calculo do n° de elementos da malha

ntn = length(coord); calculo do n° de nos da malha

tfinal=48; atribuicao do instante final (horas)

itmax =2000; n° maximo de iteracoes no tempo

coord(:,1) = (d/r)*(64.7+coord(:,1)); mudanca para coordenadas cartesianas

coord(:,2) = (d/r)*(9.33+coord(:,2)); mudanca para coordenadas cartesianas

xmax = max(coord(:,1)); calculo do valor maximo no eixo x

ymax = max(coord(:,2)); calculo do valor maximo no eixo y

calculo dos parametros da discretizacao

dt = tfinal/itmax;

mdt = dt/2;

```

preparacao dos parametros que independem das coordenadas

$c1 = mdt * sig$; coef. aux ($f_{i-j} \mid f_{i-i}$)

$c2 = mdt * a$; coef. ($\text{grad } f_{i-j} \mid \text{grad } f_{i-i}$)

$Vx = mdt * V * \cos(tet)$; coef. ($d f_{i-j}/dx \mid f_{i-i}$)

$Vy = mdt * V * \sin(tet)$; coef. ($d f_{i-j}/dy \mid f_{i-i}$)

$stm = (1 + c1)$; coef. a esq ($f_{i-j} \mid f_{i-i}$)

$stn = (1 - c1)$; coef. a dir ($f_{i-j} \mid f_{i-i}$)

submatrizes de rigidez

$(f_{i-j}) * (f_{i-i})$

$mfi = [1/12 \ 1/24 \ 1/24; 1/24 \ 1/12 \ 1/24; 1/24 \ 1/24 \ 1/12]$;

submatrizes nas fronteiras Gama 1 e Gama 2

$mfo = [1/3 \ 1/6; 1/6 \ 1/3]$;

montagem das matrizes do sistema

$A = \text{sparse}(ntn, ntn)$;

$B = \text{sparse}(ntn, ntn)$;

$d = \text{zeros}(ntn, 1)$;

$c = \text{zeros}(ntn, 1)$;

$x = \text{zeros}(3)$;

$y = x$;

Estabelecendo a contagem de tempo para execucao do codigo

$tt = \text{cputime}$;

Inicio da rotina de calculos

for $itr = 1:ntr$

for $il = 1:3$

$ig = \text{malha}_s(itr, il)$;

$x(il) = \text{coord}(ig, 1)$;

$y(il) = \text{coord}(ig, 2)$;

end

$jac = \det([(x(2)-x(1)) \ (x(3)-x(1)); (y(2)-y(1)) \ (y(3)-y(1))])$;

$s = \text{abs}(jac)$;

calculo das entradas para as submatrizes restantes

$dfdx(1)=y(2)-y(3)$; $dfdy(1)=x(3)-x(2)$;

$dfdx(2)=y(3)-y(1)$; $dfdy(2)=x(1)-x(3)$;

$dfdx(3)=y(1)-y(2)$; $dfdy(3)=x(2)-x(1)$;

Obtendo a submatriz de rigidez para $(grad\ f_{i-1} \mid grad\ f_{i-2})$

$gra1 = [(dfdx(1)\hat{2})\ (dfdx(1)*dfdx(2))\ (dfdx(1)*dfdx(3))$;

$(dfdx(2)*dfdx(1))\ (dfdx(2)\hat{2})\ (dfdx(2)*dfdx(3))$;

$(dfdx(3)*dfdx(1))\ (dfdx(3)*dfdx(2))\ (dfdx(3)\hat{2})]$;

$gra2 = [(dfdy(1)\hat{2})\ (dfdy(1)*dfdy(2))\ (dfdy(1)*dfdy(3))$;

$(dfdy(2)*dfdy(1))\ (dfdy(2)\hat{2})\ (dfdy(2)*dfdy(3))$;

$(dfdy(3)*dfdy(1))\ (dfdy(3)*dfdy(2))\ (dfdy(3)\hat{2})]$;

$mgf=gra1 + gra2$;

Obtendo a submatriz de rigidez para $(d\ f_{i-1}/dx \mid f_{i-1})$

$mdx = [dfdx(1)\ dfdx(2)\ dfdx(3)$;

$dfdx(1)\ dfdx(2)\ dfdx(3)$;

$dfdx(1)\ dfdx(2)\ dfdx(3)]$;

Obtendo a submatriz de rigidez para $(d\ f_{i-1}/dy \mid f_{i-1})$

$mdy = [dfdy(1)\ dfdy(2)\ dfdy(3)$;

$dfdy(1)\ dfdy(2)\ dfdy(3)$;

$dfdy(1)\ dfdy(2)\ dfdy(3)]$;

Montagem das matrizes A e B do sistema

for $il=1:3$

$ig = malha_s(itr,il)$;

for $jl=1:3$

$jg = malha_s(itr,jl)$;

$soma =(c2/s)*mgf(il,jl) + (Vx*mdx(il,jl) + Vy*mdy(il,jl))*s*mdt/(6*jac)$;

$A(ig,jg) = A(ig,jg)+stm*s*mfi(il,jl)+soma$;

$B(ig,jg) = B(ig,jg)+stn*s*mfi(il,jl)-soma$;

end

end

end

montando a fonte no vetor d para os nos do reservatorio

for ii=1:ntr

if malha(ii,4)==1

ig1 = malha(ii,1);

ig2 = malha(ii,2);

ig3 = malha(ii,3);

d(ig1) = dt*met;

d(ig2) = d(ig1);

d(ig3) = d(ig1);

end

end

Condicao inicial (distribuicao de metano sobre o dominio em $t = 0$)

for ii=1:ntr

if malha(ii,4)==1

ig1 = malha(ii,1);

ig2 = malha(ii,2);

ig3 = malha(ii,3);

c(ig1) = met;

c(ig2) = c(ig1);

c(ig3) = c(ig1);

end

end

Estabelecendo os pontos para a figura com 4 nos separados

p1=zeros(itmax);

p2=zeros(itmax);

p3=zeros(itmax);

p4=zeros(itmax);

Resolucao iterativa do sistema

it = 0;

criando os arquivos para as animacoes

```
num=num2str(it);
```

```
trisurf(malha_s,coord(:,1),coord(:,2),c),view(0,90),set(gca,'CLim',  
[0,.1]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
```

```
nome=strcat('result\img',num2str(it));
```

```
saveas(gcf,nome,'png');
```

```
for it = 1:itmax
```

```
p1(it)=c(5174);
```

```
p2(it)=c(7963);
```

```
p3(it)=c(17000);
```

```
p4(it)=c(22055);
```

Entrada/Saida nas fronteiras Gama 1 e 2

```
nnf = length(frontregi3);
```

```
for ii=1:nnf;
```

```
for il=1:2;
```

```
ig = frontregi3(ii,1);
```

```
x(il)=coord(ig,1);
```

```
y(il)=coord(ig,2);
```

```
end
```

```
jac2 = sqrt((x(2)-x(1))*(x(2)-x(1))+(y(2)-y(1))*(y(2)-y(1)));
```

```
for il=1:2;
```

```
ig = frontregi3(ii,1);
```

```
for jl=1:2;
```

```
s0 = mdt*jac2*k*mfo(il,jl);
```

```
end
```

```
c(ig) = c(ig)+s0;
```

```
end
```

```
end
```

Efetutando as operacoes do lado direito

```
dir=B*c + d;
```

Resolvendo o sistema linear e atualizando valores

```

c=A\dir;
if mod(it,5)==0
num=num2str(it);
trisurf(malha_s,coord(:,1),coord(:,2),c),view(0,90), set(gca, 'CLim', [0,
1]),colorbar,shading interp,set(gcf,'renderer','painters');
nome=strcat('result\img',num2str(it));
saveas(gcf,nome,'png');
end
end
figure(2)
subplot(2,2,1)
plot(p1),title('nó 5174'),ylabel('Concentração ( $\mu\text{mol}/\text{km}^2$ )'),
xlabel('nº iterações'),grid on, axis([0 2000 0.0 15]);
subplot(2,2,2)
plot(p2),title('nó 7963'),ylabel('Concentração ( $\mu\text{mol}/\text{km}^2$ )'),
xlabel('nº iterações'),grid on, axis([0 2000 0.0 200]);
subplot(2,2,3)
plot(p3),title('nó 17000'),ylabel('Concentração ( $\mu\text{mol}/\text{km}^2$ )'),
xlabel('nº iterações'),grid on, axis([0 2000 0.0 15]);
subplot(2,2,4)
plot(p4),title('nó 22055'),ylabel('Concentração ( $\mu\text{mol}/\text{km}^2$ )'),
xlabel('nº iterações'),grid on, axis([0 2000 0.0 200]);
nome=strcat('result/4nos');
saveas(gcf,nome,'png');
Calculando o tempo de execucao do codigo para uma simulacao de cenario
e=cputime-tt;
disp('tempo = ', e)

```