

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA AMBIENTAL**

**MODELAGEM DA DISPERSÃO DE BIOMASSA DE
CAMBARÁ (*VOCHYSIA DIVERGENS* POHL) NO
PANTANAL DE POCONÉ/MT**

THIAGO EMMANUEL MOREIRA ROSA

Orientador: Prof. Dr. GERALDO LÚCIO DINIZ

Cuiabá, MT
Dezembro de 2010

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA AMBIENTAL**

**MODELAGEM DA DISPERSÃO DE BIOMASSA DE
CAMBARÁ (*VOCHYSIA DIVERGENS* POHL) NO
PANTANAL DE POCONÉ/MT**

THIAGO EMMANUEL MOREIRA ROSA

*Dissertação apresentada junto ao
Programa de Pós-Graduação em Física
Ambiental da Universidade Federal de
Mato Grosso, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em
Física Ambiental.*

Orientador: Prof. Dr. GERALDO LÚCIO DINIZ

Cuiabá, MT
Dezembro de 2010

FICHA CATALOGRÁFICA

R788m Rosa, Thiago Emmanuel Moreira
Modelagem da dispersão de biomassa de cambará (*Vochysia
divergens* Pohl) no Pantanal de Poconé/MT / Thiago Emmanuel
Moreira Rosa. – 2010.
xii, 43 f. : il. ; color. ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Mato
Grosso, Instituto de Física, Pós-graduação em Física Ambiental,
2010.

Bibliografia: f. 29-34.

1. Cambará – Pantanal mato-grossense. 2. Cambará –
dispersão de biomassa. 3. Plantas invasoras. 4. Cambará –
Dispersão – Modelos matemáticos. 5. Modelagem ambiental. 6.
Física matemática – Meio ambiente. I. Título.

CDU – 51-7:53:504(043.3)

Ficha elaborada por: Rosângela Aparecida Vicente Söhn – CRB-1/931

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
Programa de Pós-Graduação em Física Ambiental

FOLHA DE APROVAÇÃO

**TÍTULO: MODELAGEM DA DISPERSÃO DE BIOMASSA DE
CAMBARÁ (*Vochysia divergens* Pohl) NO PANTANAL DE
POCONÉ/MT.**

AUTOR: THIAGO EMMANUEL MOREIRA ROSA

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada em 16 de dezembro de 2010, pela comissão julgadora:



Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz - Orientador
Instituto de Ciências Exatas e da Terra - UFMT



Prof. Dr. Roberto de Moraes Lima Silveira - Examinador Externo
Instituto de Biociências - UFMT



Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer - Examinador Externo
Instituto de Matemática Estatística e Ciência da Computação – UNICAMP

DEDICATÓRIA

Dedico a Deus, por esse momento impar da minha vida, a minha namorada, a minha família e a todos que de alguma forma ajudaram e apoiaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Dr. Geraldo Lúcio Diniz, pela orientação, paciência (que foi muita), que foram fundamentais para todas as etapas deste trabalho.

À minha namorada, Vanessa Mattos, pelo apoio em todos os momentos, incentivo com palavras mágicas e auxílio nas horas mais difíceis.

Aos meus pais, Elso e Elena, por me apoiarem em todas as minhas escolhas.

Aos meus irmãos, Fernando e Leonardo, além de minhas cunhadas.

Ao professor Roberto Silveira, do Instituto de Biociências da Universidade Federal de Mato Grosso e ao professor Joni, do Instituto de Matemática, Estatística e Ciências Computacionais da Universidade de Campinas, pelas contribuições apresentadas a esse trabalho.

À secretaria e a coordenação do programa de pós-graduação em física ambiental (Cezário, Soilce, Flair, Prof. Paraná).

Aos colegas de curso, em especial aos amigos Mima, Fran e Lúcio.

À CAPES pelo apoio financeiro.

E a todos, que de alguma forma ajudaram neste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS -----	viii
LISTA DE TABELAS -----	ix
LISTA DE SÍMBOLOS -----	x
RESUMO -----	xi
ABSTRACT -----	xii
INTRODUÇÃO -----	1
CAPÍTULO 1 -----	3
1. EMBASAMENTO TEÓRICO -----	3
1.1. PANTANAL MATOGROSSENSE -----	3
1.2. CAMBARAZAL -----	5
1.3. MODELAGEM MATEMÁTICA -----	6
1.4. ÁREA DE ESTUDO -----	11
CAPÍTULO 2 -----	13
2. FORMULAÇÃO DO MODELO -----	13
2.1. MODELAGEM DO FENÔMENO -----	13
2.2. ANÁLISE E DISCRETIZAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO -----	14
2.2.1 – FORMULAÇÃO CLÁSSICA -----	14
2.2.2 FORMULAÇÃO VARIACIONAL -----	15
2.3. DISCRETIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO VARIACIONAL -----	17
2.4. DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA -----	18
CAPÍTULO 3 -----	21
3. RESULTADOS E ANÁLISE -----	21
3.1. SIMULAÇÕES DE CENÁRIOS -----	22
SIMULAÇÃO 1 -----	23
SIMULAÇÃO 2 -----	24
SIMULAÇÃO 3 -----	26

3.2. ANÁLISES DOS RESULTADOS	27
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	28
5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	29
CÓDIGOS PARA O MATHEMATICA[®]	35
CÓDIGOS PARA O MATLAB[®]	39

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Imagem de satélite do Pantanal (Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro: Pantanal_55.76W_15.40S.jpg)	4
Figura 2 – Área de Estudo (Fonte: SESC PANTANAL. Imagem do satélite Landsat 7 ETM+. Orbits 226/071. Data: 20/05/2001. Adaptado por Marcos A. Figueiredo. Utilizado por: Julia Arieira Couto (Dissertação – 2005)	11
Figura 3 – Escolha do domínio para estudo (Fonte: SESC PANTANAL. Imagem do satélite Landsat 7 ETM+. Orbits 226/071. Data: 20/05/2001. Adaptado por Marcos A. Figueiredo. Utilizado por: Julia Arieira Couto – Dissertação/2005)	14
Figura 4 – Componentes advectivas de expansão	21
Figura 5 – Malha gerada pelo programa GMSH [®] a partir da figura 3, com 7168 elementos e 3689 nós, com 04(quatro) pontos de referencia	22
Figura 6 – Simulação do cenário 1 – Processo evolutivo da concentração de biomassa de cambará para os nós 707, 7, 15 e 556	23
Figura 7 – Simulação do cenário 1 – Processo evolutivo da distribuição espacial de biomassa de cambará	24
Figura 8 – Simulação do cenário 2 – Processo evolutivo da concentração de biomassa de cambará para os nós 707, 7, 15 e 556	25
Figura 9 – Simulação do cenário 2 – Processo evolutivo da distribuição espacial de biomassa de cambará	25
Figura 10 – Simulação do cenário 3 – Processo evolutivo da concentração de biomassa de cambará para os nós 707, 7, 15 e 556	26
Figura 11 – Simulação do cenário 3 – Processo evolutivo da distribuição espacial de biomassa de cambará	27

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros utilizados na simulação do cenário 1	23
Tabela 2 – Parâmetros utilizados na simulação do cenário 2	24
Tabela 3 – Parâmetros utilizados na simulação do cenário 3	26

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω (Ômega)	Domínio bidimensional fechado
Γ (Gama – maiúsculo)	Fronteira do domínio
η (ETA)	Vetor normal exterior unitário
α (Alfa)	Coefficiente de difusão efetiva
σ (Sigma)	Coefficiente de degradação
∇ (Nabla)	Operador nabla
\vec{V} (vetor velocidade)	Campo de velocidades
f	Termo para a fonte de biomassa
t	variável temporal
v	função teste
\mathcal{V}	Espaço vetorial
\mathcal{V}_h	Sub-espaço de V
L^2 (funções de quadrado integrável)	(Espaço de Banach)
H^1	(Espaço de Sobolev)

RESUMO

ROSA, T. E. M. **MODELAGEM DA DISPERSÃO DE BIOMASSA DE CAMBARÁ (*Vochysia divergens* POHL) NO PANTANAL DE POCONÉ/MT.** 2010. 55f. Dissertação (Mestrado em Física Ambiental), Instituto de Física, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2010.

Este trabalho teve como objetivo simular a dispersão da biomassa de cambará (*Vochysia divergens* Pohl) na região do Pantanal de Poconé Brasil, para posteriormente aplicar o modelo de crescimento para outras espécies com características semelhantes. O modelo usou equações clássicas (difusão efetivo, o transporte advectivo, decaimento e de origem) para simular a propagação da biomassa de cambará e os resultados de uma paisagem ou um processo específico em um lugar (no caso do Pantanal) para ajudar a compreender as formas e processo em outro lugar. A partir das equações clássicas foi obtido a formulação variacional, usou-se subespaços de dimensão finita em que, utilizou-se a integração de Lebesgue para a forma variacional, além de condições de contorno von Neumann e forma geral de aproximação é definida, utilizando o método dos elementos finitos (pelo método de Galerkin) nas variáveis de espaço e de Crank-Nicolson no tempo. O esquema numérico resultante foi programado em ambiente MATLAB[®] e os resultados numéricos foram analisados, obtendo uma boa descrição da dispersão na área de estudo que permitiu a simulação adequada de cenas naturais.

Palavras-chave: modelagem ambiental; dispersão do cambará; plantas invasoras; método dos elementos finitos.

ABSTRACT

ROSA, T. E. M. **DISPERSION MODELING OF BIOMASS CAMBARÁ (*Vochysia divergens* Pohl) IN THE PANTANAL POCONÉ/MT.** 2010. 55f. Dissertation (Masters in Environmental Physics), Institute of Physics, Federal University of Mato Grosso, Cuiabá, 2010.

This work aimed to simulate the dispersion of the biomass of cambará (*Vochysia divergens* Pohl) in the region of Poconé's Pantanal Brazil, so that we can later apply the model of growth for other species with similar characteristics. The model used classical equations (effective diffusion, advective transport, decay, and source) to simulate the spread of biomass of cambará and results of a landscape or a particular process in a place (in this case the pantanal) assisted us in understanding forms and process elsewhere. From the classical equations was obtained the variational formulation, we then used finite dimensional subspaces in which, used Lebesgue integration to the variational form, plus von Neumann boundary conditions and general form of approximation is defined, using the finite element method (by Galerkin method) in space variables and Crank-Nicolson in time. The resulting numerical scheme is programmed in a MATLAB[®] environment and numerical results are analyzed obtaining a good description of the dispersion in the study area allowing adequate simulation of natural scenes.

Keywords: environmental modelling; growth of cambará; invasive species; finite elements method.

INTRODUÇÃO

Problema

As mudanças climáticas vêm sendo provocadas pelo homem, através das inúmeras intervenções que ele vem fazendo em todo o planeta. Podemos verificar que houve alterações no bioma natural, cujas matérias que têm destaque e valor comercial são retiradas do meio sem qualquer preocupação. Com isso pode acontecer alterações na fauna e flora. Entretanto, é essencial que estas intervenções se dêem dentro de um equilíbrio ambiental e desenvolvimento sustentável, sendo este um princípio indispensável para o futuro de um país. Porém, como boa parte da sociedade, todos querem tomar o caminho mais rápido em busca de um resultado em curto prazo, que dentro de um mundo capitalista, é o retorno financeiro.

No Brasil, isto pode ser bem identificado na floresta amazônica e na mata atlântica, seu desmatamento é, em grande parte, obra conjunta de latifundiários, grandes empresários e empresas mineradoras.

Esse desmatamento só é realizado em sua grande parte, nos casos em que o material tem valor comercial e possa ter o retorno financeiro. Não é interessante para esses “depredadores” a coleta (corte) de árvores que não tenham retorno financeiro imediato, como no caso da espécie que será objeto de estudo, a espécie *Vochysia divergens* Pohl, conhecida como cambará.

Justificativa

Dentre os ecossistemas mais ricos do Brasil, o Pantanal, estende-se pelos territórios do Mato-Grosso (região sul), Mato-Grosso do Sul (noroeste), Paraguai (norte) e Bolívia (leste). Ao todo são aproximadamente 228 mil quilômetros quadrados. Em função de sua importância e diversidade ecológica, o Pantanal é considerado pela UNESCO como um Patrimônio Natural Mundial e Reserva da Biosfera.

O Cambará é uma árvore habitualmente encontrada no Pantanal possui relevância econômica e terapêutica para a população pantaneira, que utiliza os extratos das folhas e cascas contra distúrbios gástricos, asma e inflamações

respiratórias, além de ser uma planta de grande valor produtivo para apicultura (CORREA et al., 2007).

Sua alta taxa de crescimento sob intensa luminosidade, sua tolerância à condição de prolongado alagamento, a capacidade de suas plântulas para manter suas folhas intactas embaixo da superfície da água e a grande produção de sementes espalhadas pelo vento e água são algumas das características que favorecem a sua predominância sobre outras espécies invasoras. Apesar disso, essa espécie tem baixa tolerância ao estresse da seca, tendo suas populações reduzidas pelo efeito de períodos plurianuais de grandes secas (ARIEIRA & CUNHA, 2006).

Objetivo Geral

Fornecer informações adequadas sobre a dispersão de camarã, por meio de modelos matemáticos adequados no pantanal mato-grossense (região de Poconé/MT).

Objetivos Específicos

Encontrar a equação clássica da modelagem ambiental, fazer a formulação variacional da equação clássica, realizar discretização espacial (método elementos finitos) e temporal (via Crank-Nicolson) e simular a equação sobre uma malha refinada obtida com uso do programa GMSH[®] utilizando o programa MATLAB[®] variando o coeficiente difusivo da equação discretizada.

CAPÍTULO 1

1. EMBASAMENTO TEÓRICO

1.1. PANTANAL MATOGROSSENSE

O Pantanal está situado nos Estados de Mato Grosso e Mato Grosso do Sul. Os principais municípios no Estado de Mato Grosso com áreas situadas dentro dos limites do Pantanal são Poconé, Cáceres, Barão de Melgaço, Santo Antônio do Leverger e Nossa Senhora do Livramento (ALLEM & VALLS, 1987).

A área calculada do Pantanal brasileiro é de 138.183 km², situado entre os paralelos 16° e 21° S e os meridianos 55° e 58° W, dos quais 48.865 km² (35,36%) estão no MT e 89.318 km² (64,64%) no MS. É a maior planície inundável da Terra (SILVA & ABDON, 1998).

O Pantanal mato-grossense é caracterizado como Savana Hipersazonal por Eitten (1982) e Sarmiento (1983), apresentando um complexo de tipos de vegetação, onde grandes áreas são inundadas a cada ano. A principal força modeladora deste sistema é o pulso de inundação, do tipo monomodal e previsível, que promove uma alternância entre habitats aquáticos e terrestres (JUNK, 2002).

O bioma pantanal constitui um sistema de áreas alagáveis, formado pela coalescência dos cursos da Bacia do Alto Rio Paraguai que possui uma área estimada de 361.666 km² (SILVA & ABDON, 1998; SILVA et al., 2000; ALHO, 2008), sendo uma planície de inundação periódica.

Junk et al. (1989) definem planícies alagáveis como sendo áreas periodicamente alagadas por sobrefluxo lateral de rios e lagos, ou pela precipitação direta, ou pela água subterrânea, resultando num ambiente físico-químico, que leva a biota a responder com adaptações morfológicas, anatômicas, fisiológicas, fenológicas e/ou etológicas de forma a produzir estruturas de comunidades características para estes sistemas.

As planícies alagáveis são regiões complexas e com um funcionamento dinâmico característico, com condições hidrológicas específicas (ALHO, 2008; FANTIN CRUZ et al., 2008). Compreendem terras planas próximas ao fundo do vale

de um rio, áreas que são periodicamente inundadas por transbordamento lateral dos rios ou lagos e/ou por precipitação direta ou afloramento da água subterrânea, resultante num ambiente físico-químico que leva a biota a responder por adaptações morfológicas, anatômica, fisiológicas, fenológicos e produzindo uma estrutura de comunidade característica, ocorrendo uma diminuição gradual da quantidade de água durante o período de vazante. Desta forma, há um grande aporte de material orgânico, de origem alóctone, e nutrientes pelo pulso de inundação (JUNK et al., 1989; BARELLA et al., 2001).

Outra característica do pantanal é a ocorrência de uma estação seca (entre abril e setembro), que causa frequente estresse hídrico nas plantas locais, regulando seu período de brotação, floração e frutificação e produção de fitomassa (JUNK, 2002).

O Pantanal (Figura 1) é formado por um conjunto de grandes planícies deprimidas e leques aluviais na bacia do rio Paraguai (ADÁMOLI, 1982), para onde convergem as mais importantes províncias fitogeográficas do Continente, como a Floresta Amazônica, o Cerrado e o Chaco (AMADOR, 2006).

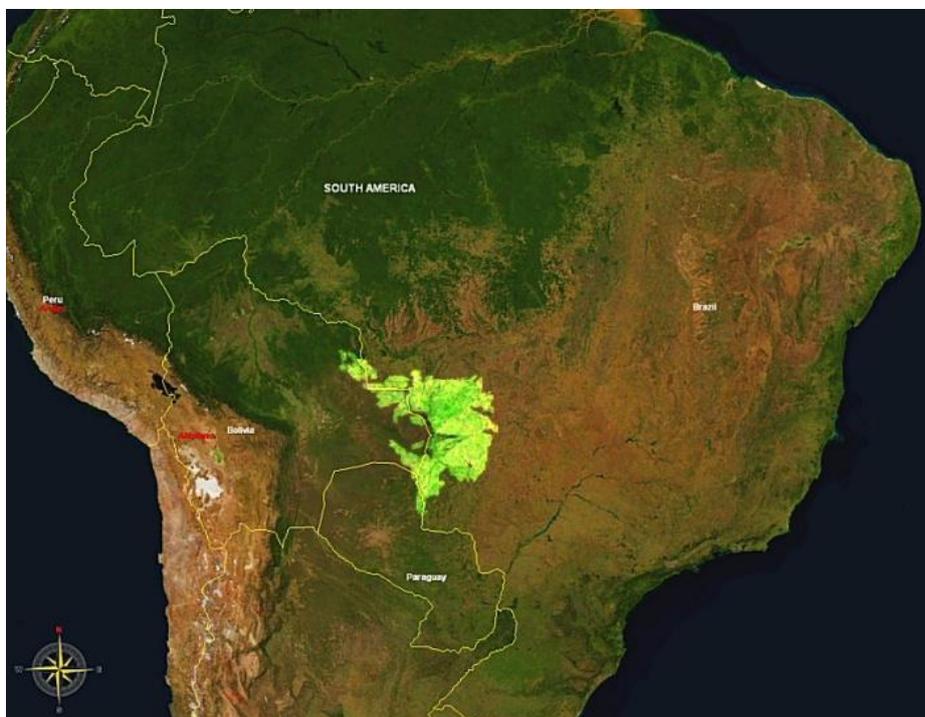


Figura 1: Imagem de satélite do Pantanal.

(Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Pantanal_55.76W_15.40S.jpg)

A monodominância, frequentemente, ocorre em formações florestais, tanto nas regiões tropicais, quanto nas regiões temperadas (CONNEL & LOWMAN, 1989;

HART et al., 1989). A origem e a manutenção destas formações têm sido ocasionadas por diferentes fatores que regulam as populações de plantas, tais como: mudanças na qualidade do substrato, gradiente de mortalidade, sazonalidade climática e regime de distúrbio (HART et al., 1989).

1.2. CAMBARAZAL

Cambarazal é o nome dado àquelas formações vegetais onde há dominância de *Vochysia divergens* Pohl. Espécie característica de matas ciliares do Pantanal e rio Araguaia e de áreas abertas de terrenos aluviais inundáveis (LORENZI, 2002).

A *V. divergens* é uma espécie cuja distribuição está justamente relacionada às áreas periodicamente inundáveis do pantanal (STAFLEU, 1948; PRANCE & SCHALLER, 1982; CUNHA & JUNK, 1999) e que, nos últimos anos, tem se espalhado rapidamente pelos campos naturais e manejados, formando extensos estandes de cambarazal (CUNHA & OLIVEIRA, 2001; CUNHA & JUNK, 2004).

A importância ecológica de cambarazais, como local de abrigo e alimentação para a vida silvestre, tem sido citada por alguns autores (FABNACHT, 1998; POTT & POTT, 1994; LORENZI, 2002). Apesar disso, em decorrência de seu rápido espalhamento nos últimos anos, *V. divergens* foi considerada uma espécie invasora de pastagens do sul de Poconé e partes da planície do rio Paraguai (POTT & POTT, 1994; LORENZI, 2002).

Esse rápido espalhamento sobre as pastagens tem relação ao pulso de inundação que, segundo Junk e Da Silva (1996), é determinante dos processos ecológicos, proporcionando alterações ambientais, exigindo dos organismos a capacidade de desenvolver adaptações (plasticidade) nos períodos de severos estresses hídricos, ao qual o cambará se adaptou. Tais adaptações podem propiciar aos organismos variação no comportamento migratório, formas anatômicas e até mesmo no ciclo de vida, variando a densidade das colônias de acordo com a disponibilidade alimentar (HÖLLDOBLER & WILSON, 1990). Com isso muitos autores incluindo Pott & Pott (2000) chamam a atenção para as flutuações populacionais, explicadas pelos diferentes níveis de inundação, ou seja, o tempo de permanência da água nos ambientes alagáveis. Outro fator de stress adicional é ocasionado pelos incêndios que afetam o Pantanal durante o período da seca (JUNK & DA SILVA, 2003).

No pantanal, proprietários de fazenda de gado foram os primeiros a alertar sobre a “invasão” do cambará, visto que seus campos estavam sendo essencialmente cobertos por *V. divergens* e, assim, tornando-se indisponíveis para pastagem (CUNHA et al., 2000), por ser considerado pela UNESCO (Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e Cultura) Patrimônio Natural Mundial e Reserva da Biosfera, em que essa classificação visa catalogar e preservar locais de excepcional importância cultural ou natural, localizado na região o Parque Nacional do Pantanal.

A causa de seu espalhamento parece estar relacionada à presença de ciclos plurianuais de inundação, nos quais períodos de grandes cheias e secas que ocorrem no pantanal, em intervalos plurianuais, acarretam a retração e o aumento das populações do cambará, dando à vegetação um caráter irregular no tempo e no espaço (JUNK & DA SILVA, 1999; CUNHA & JUNK, 2001; JUNK, 2002). Cunha & Junk (2004) atentam para a coincidência da entrada de um período plurianual de grande cheia no pantanal, iniciado em 1974, com o espalhamento de algumas espécies lenhosas, tais como: *Licania parvifolia* Huber, *Combretum lanceolatum* Pohl e *Vochysia divergens* Pohl.

Ao longo dos últimos 30 anos, o cambará vem ocupando áreas de pastagem nativa e de savana (CUNHA & JUNK, 2004). Segundo Cunha & Junk (2004) e Santos et al. (2006), desde 1974 se pode observar uma maior dispersão de espécies arbóreas, entre elas *V. divergens* nas áreas ocupadas por pastagem nativa do pantanal. Esta disseminação de *V. divergens*, se dá a partir da década de 70. Para Junk (2002), a aparente causa do espalhamento de *V. divergens* pode estar relacionada à alternância das grandes cheias e secas, e ainda, pelo desmatamento provocado pelos criadores de gado da região, que acaba aumentando a área disponível para estabelecimento da planta. Esses fatores podem ser a causa da retração da vegetação nativa e aumento das populações desta espécie.

1.3. MODELAGEM MATEMÁTICA

A descrição dos ecossistemas, seja da perspectiva experimental, seja do ponto de vista teórico, constitui um dos mais intrigantes temas de pesquisa dos tempos modernos e um grande desafio à criatividade dos cientistas (VARRIALE & GOMES, 2001).

Dada a complexidade dos ecossistemas, usa-se a análise de sistemas para a sua compreensão, pois ela permite que fenômenos complexos sejam reduzidos em partes elementares, possibilitando a aplicação de métodos quantitativos (VON BERTALANFFY, 1977).

Conforme Varriale & Gomes (2001), um dos fatores fundamentais é a complexidade dos sistemas em questão, dados o número e a variedade de seus subsistemas em interação.

“O conceito de sistemas foi introduzido na Geomorfologia por Chorley, em 1962, e vários aspectos dessa abordagem foram considerados por Christofolletti (1979), Strahler (1980), Huggett (1985) e Sheidegger (1991)” (CHRISTOFOLETTI, 2004, p. 92).

Chorley & Kennedy (1971) salientaram o aspecto conectivo do conjunto, formando uma unidade, escrevendo que “um sistema é um conjunto estruturado de objetos e/ou atributos. Esses objetos e atributos consistem de componentes ou variáveis (isto é, fenômenos que são passíveis de assumir magnitudes variáveis) que exibem relações discerníveis um com os outros e operam conjuntamente como um todo complexo, de acordo com determinado padrão”. Mais recentemente, ao fazer breve revisão sobre a teoria de sistemas, Haigh (1985, apud Christofolletti, 1998) assinalou que “um sistema é uma totalidade que é criada pela integração de um conjunto estruturado de partes componentes, cujas interrelações estruturais e funcionais criam uma retidão que não se encontra implicada por aquelas partes componentes quando desagregadas”.

Importante referência, nesta área, é à multidisciplinaridade, necessária a uma compreensão mais abrangente dos sistemas naturais. Diversos aspectos da matemática, da física, da química, das ciências da terra e, sobretudo, da biologia, encontram-se presentes na investigação de sistemas naturais, em praticamente todas as abordagens propostas, mesmo aquelas mais simples, que procuram descrever o seu comportamento, observado no campo e no laboratório (VARRIALE & GOMES, 2001).

Quando se conceituam os fenômenos como sistemas, uma das principais atribuições e dificuldades está em identificar os elementos, seus atributos (variáveis) e suas relações, a fim de delinear com clareza a extensão abrangida pelo sistema em

foco. Praticamente, os sistemas envolvidos na análise ambiental funcionam dentro de um ambiente, fazendo parte de um conjunto maior (CHRISTOFOLETTI, 1999).

Como conceituado por Varriale & Gomes (2001), a palavra *modelo* aparece frequentemente na literatura de ecossistemas; o procedimento geral de modelagem de um conjunto de ecossistemas deve ser discutido em termos muito amplos, de forma a deixar claros, sejam os procedimentos quanto às hipóteses envolvidas, sejam as maneiras de testá-las. Além disso, incluir na descrição de ecossistemas, ao mesmo tempo, os aspectos biológicos, meteorológicos ou geofísicos exige dos modelos uma grande flexibilidade e, para os pesquisadores, uma criatividade nem sempre requerida na solução de problemas levantados pelas disciplinas chamadas clássicas.

Também descrito por Christofolletti (1999), a palavra *modelo* possui muitas diferenças em seu significado. De modo geral, pode ser compreendido como sendo “qualquer representação simplificada da realidade” ou de um aspecto do mundo real que surja como interesse do pesquisador, que possibilite reconstruir a realidade, prever um comportamento, uma transformação ou uma evolução.

Outra definição, apresentada por Haggett (1967) e Chorley (1975), ainda permanece como sendo mais adequada, assinalando que “modelo é uma estruturação simplificada da realidade que supostamente apresenta, de forma generalizada, características ou relações importantes. Os modelos são aproximações altamente subjetivas, por não incluírem todas as observações ou medidas associadas, mas são valiosos por obscurecerem detalhes acidentais e por permitirem o aparecimento dos aspectos fundamentais da realidade”.

Ainda, segundo Bassanezi (1994), um modelo matemático é quase sempre um sistema de equações ou inequações algébricas, diferenciais, integrais, etc., obtido através de relações estabelecidas entre as variáveis consideradas essenciais ao fenômeno sob análise.

Os modelos matemáticos são abstrações no sentido de substituir objetos, forças, eventos, etc., por uma expressão que contém variáveis, parâmetros e constantes matemáticas (KRUMBEIN & GRAIBYLL, 1965), envolvendo a adoção de “um certo número de idealizações dos vários fenômenos estudados e a atribuição, às várias entidades envolvidas, de algumas propriedades estritamente definidas” (NEYMAN & SCOTT, 1957).

McLone (1976, apud Bassanezi (2004))¹ diz: “um modelo matemático é um construto matemático abstrato, simplificado que representa uma parte da realidade com algum objetivo particular...”.

A importância do modelo matemático consiste em se ter uma linguagem técnica e quantitativa que expresse as idéias de maneira clara e quase sem ambiguidades, já que modelos com base na modelagem fuzzy os permitem, além de proporcionar um arsenal enorme de resultados (teoremas), que propiciam o uso de métodos computacionais para calcular suas soluções numéricas (BASSANEZI, 2004).

Conforme Bassanezi (2004), a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e estudá-los podendo às vezes resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

Mesmo que o modelo matemático do problema possa ser construído dentro de uma teoria matemática conhecida, ainda assim, pode acontecer que as técnicas e métodos matemáticos existentes nesta teoria sejam insuficientes para a obtenção dos resultados desejados (BASSANEZI, 1988).

Conforme Soares (2002), “um modelo matemático satisfatório está sujeito a duas aparentes contradições: deve ser suficientemente detalhado para representar a situação do mundo real com relativa precisão, mas deve também ser suficientemente simples para tornar prática a análise matemática. A construção de um modelo que cobre adequadamente realismo e viabilidade é o passo mais delicado no processo. Devem ser encontradas maneiras de simplificar matematicamente o modelo sem sacrificar características importantes. Assim, podemos concluir que um modelo matemático nunca representa um problema real de maneira exata, em toda sua complexidade, mas poderá levar a compreensões e até a soluções bem próximas daquelas observadas na realidade”. Porém devemos considerar que sempre haverá peculiaridades do objetivo do modelo proposto.

Ecossistemas são sistemas extremamente complexos e a parte mais difícil da modelagem consiste em selecionar os componentes e os processos ecologicamente relevantes. Esta escolha é o ponto de partida fundamental em qualquer modelagem,

¹ ANDREWS. J. G.; McLONE, R.R. **MATHEMATICAL MODELLING**. (Andrews-McLone). Butterworths. London, 1976 apud BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 2ed.-São Paulo. 2004.

com algum conteúdo científico apreciável. Uma vez estabelecido claramente este ponto, a formulação matemática e a montagem da estrutura computacional constituem etapas muito mais simples (VARRIALE & GOMES, 2001).

Os modelos são construídos por várias razões. De fato, ao proporcionar uma *descrição* abstrata e simplificada de algum sistema, eles poderão ser utilizados simplesmente para direcionar os esforços das pesquisas ou para definir um problema para um estudo mais detalhado. Mais frequentemente, os modelos matemáticos são desenvolvidos para a *predição* de mudança dinâmica em função do tempo. O fracasso de um modelo em prever a mudança é por si só, útil, já que salienta as falhas nas premissas conceituais, a partir das quais o modelo foi construído (ODUM, 1988).

Assim, Odum (1988), explicita que as propriedades dos modelos matemáticos são exploradas com o auxílio de diversas técnicas. Ao examinarmos o sistema matemático, iremos obter a compreensão de propriedades do sistema real ou com base em um sistema real descrevermos um sistema matemático. São de interesse primordial as questões de retroalimentação (feedback) e controle, estabilidade e sensibilidade de uma parte do sistema com relação às mudanças em outras partes do mesmo sistema.

Não há regras ou critérios fixos para guiar as atividades da construção de modelos matemáticos. Em princípio, todo modelo matemático pode ser considerado uma extensão, generalização ou caso especial de outro modelo (ODUM, 1988), porém para que o modelo tenha caráter científico, é necessário que a formulação do modelo matemático envolva a escolha de variáveis mais importantes para o fenômeno em estudo e de leis consideradas obedecidas pelas variáveis escolhidas e, também na formulação de um modelo, devemos decidir sobre o grau de generalidade que iremos admitir e devemos ter em mente que nem toda hipótese que simplifica irá facilitar o tratamento posterior do modelo, tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista computacional (SODRÉ, 2007).

Para a formulação do estudo proposto, os modelos matemáticos determinísticos, conforme Christofletti (1999), são baseados nas noções matemáticas clássicas de relações exatamente previsíveis entre variáveis independentes e dependentes e consistem num conjunto de afirmações matemáticas especificadas (deduzidas da experiência ou da intuição), a partir das quais

consequências únicas podem ser deduzidas pela argumentação matemática. Estes modelos geralmente encontram-se fundamentados no conhecimento, ou nas pressuposições, das leis dos processos físicos e químicos.

Para uma análise determinística é preciso trabalhar com dados primários, ou seja, dados quantitativos que possuam, obrigatoriamente, unidades de medida que possam ser organizadas em classes (VIANNA, 2007).

1.4. ÁREA DE ESTUDO

A região do cambarazal estudado forma uma faixa contínua, com cerca de 25 km de extensão e 4 km de largura, paralela ao rio Cuiabá, a uma distância deste de aproximadamente 14 km, entre o porto Biguazal e o posto Espírito Santo, na RPPN (Reserva Particular do Patrimônio Natural / Sistema Nacional de Unidades de Conservação - SNUC) Estância Ecológica SESC (Serviço Social do Comércio) Pantanal, município de Barão de Melgaço, Estado de Mato Grosso, Brasil (CUNHA & ARIEIRA, 2006).

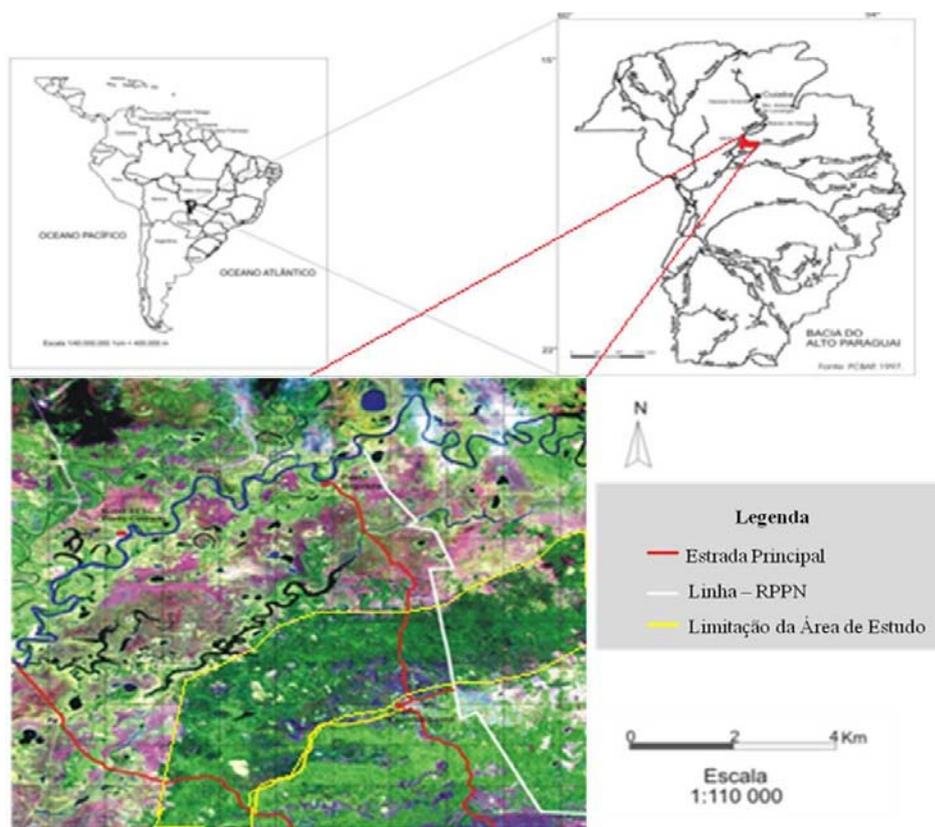


Figura 2: Área de estudo (Fonte: SESC PANTANAL. Imagem do Satélite Landsat 7 ETM+. Orbits: 226/071. Data: 20/05/2001. Adaptado por Marcos A. Figueiredo. Utilizado por: Julia Arieira Couto (dissertação-2005).

A ocorrência de cambarazais tem sido atribuída à presença de pulsos anuais e plurianuais de inundação, que funcionam como um regulador das populações de *V. divergens* ao longo do tempo (NASCIMENTO & CUNHA, 1989; CUNHA et al., 2000; CUNHA & JUNK, 2004). Neste contexto, mudanças das condições hidrológicas, sejam estas causadas por eventos naturais, como os fenômenos plurianuais de grandes cheias e secas, ou pelo homem, como as construções de diques de navegação e barragens nos rios que constituem a rede hidrológica do Pantanal, deverão influenciar a estrutura e a composição fenológica do cambará (ARIEIRA, 2005).

CAPÍTULO 2

2. FORMULAÇÃO DO MODELO

O desafio da pesquisa é a obtenção de um modelo matemático que descreva a expansão ou contração do cambarazal na região do pantanal mato-grossense, tendo como base a densidade de biomassa da espécie dentro do domínio (região do cambarazal).

A projeção do modelo matemático que foi utilizado é com base na biomassa de cambará, biomassa que é definida como o volume total do peso seco de vegetação por unidade de área de terra em um dado período de tempo. A quantidade de biomassa por unidade de área constitui os dados primários necessários para entender o fluxo de matéria de um ecossistema. A biomassa deve ser medida e analisada em seu próprio contexto como parte da produção, e isto fornece sobretudo um quadro do funcionamento do ecossistema (Lodhiyal & Lodhiyal, 2003).

Em muitas espécies, o crescimento populacional entre gerações sucessivas se dá em etapas discretas. Genericamente, foi considerado a escala de tempo entre as gerações como sendo 1, isto é, uma unidade de tempo entre gerações como segundo, minutos, anos. Em todas estas análises estabelecemos relações entre os elementos da etapa seguinte a etapa anterior ou mesmo inicial. Estas relações denominam-se fórmulas recursivas ou equações de diferenças (BALD, 1993).

Nesta parte do trabalho obteve-se a equação clássica do modelo proposto e a sua formulação variacional da equação, propondo uma solução fraca, devido à simplicidade dos resultados de existência e unicidade da solução fraca e também aproximar soluções das equações diferenciais parciais (EDP's) que surgem em muitos campos da matemática aplicada e pela exigência desta formulação para o uso do método de elementos finitos em particular ou o Método de Galerkin, no geral.

2.1. MODELAGEM DO FENÔMENO

Conforme Diniz (2003), foram considerados os fenômenos de difusão efetiva (Okubo, 1980), o transporte advectivo (Edelstein – Keshet, 2005), os diversos

fenômenos de decaimento aproximados em conjunto (Bassanezi, 2002), assim como uma fonte constante referente ao crescimento em termos de biomassa de camarã (*V. divergens*).

2.2. ANÁLISE E DISCRETIZAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

2.2.1 – FORMULAÇÃO CLÁSSICA

No modelo, foram considerados as seguintes variáveis:

$$b = b(x, y, t) \rightarrow \text{densidade de biomassa do camarã no ponto } (x, y) \in \Omega,$$

para o instante $t \in (0, T]$

A variação da densidade de biomassa no tempo é dada por:

$$\frac{\partial b(x, y, t)}{\partial t} = \{ \text{difusão efetiva} \} - \{ \text{transporte} \} - \{ \text{decaimento} \} + \{ \text{fonte} \}$$

onde:

$$\{ \text{difusão efetiva} \} = \text{div}[\alpha \nabla b] \quad (\text{cf. Okubo (1980)})$$

$$\{ \text{transporte} \} = \text{div}[\vec{V} \cdot b] \quad (\text{cf. Edelstein - Keshet (2005)})$$

$$\{ \text{decaimento} \} = \sigma b \quad (\text{cf. Bassanezi (2002)})$$

$$\{ \text{fonte} \} = f(b) \quad (\text{cf. Edelstein - Keshet (1988)})$$

O modelo de dispersão para a biomassa em sua formulação clássica é dado por:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \text{div}(\alpha \nabla b) - \text{div}(\vec{V} \cdot b) - \sigma b + f(b) \quad (1)$$

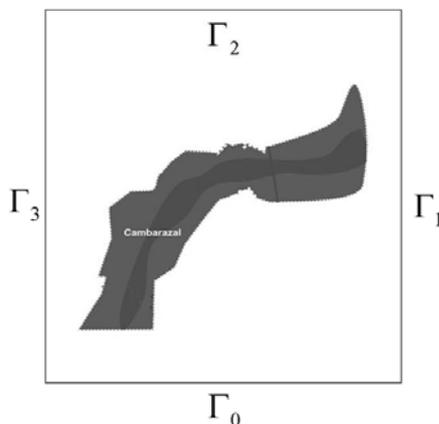


Figura 3: Escolha do domínio para estudo. (Fonte: SESC PANTANAL. Imagem do Satélite Landsat 7 ETM+. Orbits: 226/071. Data: 20/05/2001. Adaptado por Marcos A. Figueiredo. Utilizado por: Julia Arieira Couto (dissertação-2005).

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

As condições de contorno foram estabelecidas supondo uma fronteira suficientemente distante para que não haja fluxo naquele local. Portanto, na fronteira teremos:

$$\left. \frac{\partial b}{\partial \eta} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (2)$$

que é denominada condição de von Neumann homogênea (Boyce & Dprima, 1979).

Além disso, para estabelecer completamente o problema, a condição inicial é dada por:

$$b(x, y, 0) = b_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (3)$$

que descreve a distribuição inicial da biomassa sobre o domínio Ω .

Nesta primeira abordagem do problema, foram feitas algumas hipóteses para tratamento dos termos de difusão e transporte, como segue:

- 1) O coeficiente de difusão (α) foi considerado constante ao longo do domínio;
- 2) O campo de velocidade (\vec{V}) foi construído sobre o domínio, considerando as direções de acordo com a Figura 4, dando os valores $0,626729926667 + \frac{\Pi}{2}$ acima da linha e de $0,626729926667 - \frac{\Pi}{2}$.

Desta forma, o modelo apresentado na equação em sua formulação clássica, é dado por:

$$\frac{\partial b}{\partial t} = \alpha \Delta b - \text{div}(\vec{V} \cdot b) - \sigma b + f(b) \quad \begin{cases} (x, y) \in \Omega \subset R^2 \\ t \in (0, T] \end{cases} \quad (4)$$

2.2.2 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Considerando a equação (4) na sua formulação clássica, com o objetivo de construir aproximações da solução do problema, foi obtida a formulação variacional, que consiste em:

- i) Multiplicar os termos da equação por uma função teste pertencente a um espaço conveniente V ;

ii) Integrar os termos da equação obtida, sobre o domínio, usando a integral de Lebesgue.

Desta forma, aplicando o item i), a equação (4) se torna:

$$\frac{\partial b}{\partial t} v = \alpha \Delta b v - \operatorname{div}(\vec{V} \cdot b) v - \sigma b v + f(b) v, \quad \forall v \in V \quad (5)$$

em seguida, integrando via Lebesgue, vem:

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial t} v d\mu = \alpha \iint_{\Omega} \Delta b v d\mu - \iint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{V} \cdot b) v d\mu - \iint_{\Omega} \sigma b v d\mu + \iint_{\Omega} f(b) v d\mu, \quad \forall v \in V \quad (6)$$

Com base na hipótese 2), denominando V_x e V_y as componentes do campo vetorial \vec{V} que descreve o termo de transporte, a equação (6) se torna:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial t} v d\mu &= \alpha \iint_{\Omega} \Delta b v d\mu - \\ &- V_x \iint_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial x} v d\mu - V_y \iint_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial y} v d\mu - \iint_{\Omega} \sigma b v d\mu + \iint_{\Omega} f(b) v d\mu, \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (7)$$

Daí, aplicando a primeira identidade de Green no primeiro termo do lado direito da equação (7), se obtém:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial t} v d\mu &= -\alpha \iint_{\Omega} \nabla b \cdot \nabla v d\mu + \int_{\Gamma} (\nabla b \cdot \vec{\eta}) v d\gamma - \\ &- V_x \iint_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial x} v d\mu - V_y \iint_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial y} v d\mu - \iint_{\Omega} \sigma b v d\mu + \iint_{\Omega} f(b) v d\mu, \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (8)$$

Como não há passagem biomassa na fronteira do domínio, portanto, não há passagem de biomassa pela fronteira (condição assintoticamente estável), tem-se que:

$$\int_{\Gamma} (\nabla b \cdot \vec{\eta}) v d\gamma = 0,$$

o que resulta na equação (8):

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial t} v d\mu &= -\alpha \iint_{\Omega} \nabla b \cdot \nabla v d\mu - \\ &- V_x \iint_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial x} v d\mu - V_y \iint_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial y} v d\mu - \iint_{\Omega} \sigma b v d\mu + \iint_{\Omega} f(b) v d\mu, \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (9)$$

2.3. DISCRETIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Dadas as condições de fronteira do problema e o espaço de funções admissíveis de solução, para construir as aproximações da solução do problema em sua formulação variacional (ou fraca), o espaço V será definido da seguinte forma:

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in L^2((0, T], \mathcal{U}) : \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(\Omega) \right\}$$

onde

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma} = 0 \right\}$$

Assim, o problema na sua formulação fraca fica estabelecido através da equação (9), com a condição inicial dada por (3).

Para a discretização do modelo, serão obtidas primeiramente a existência e a unicidade de solução do problema em sua formulação fraca, conforme apresentado em Diniz (2003), considerando os produtos internos:

$$\begin{aligned} (f|g)_{0,\Omega} &= \iint_{\Omega} fg d\mu \\ (\bar{f}|\bar{g})_{0,\Omega} &= \iint_{\Omega} (\bar{f}) \cdot (\bar{g}) d\mu \\ \langle f|g \rangle_{0,\Gamma} &= \int_{\Gamma} fg d\gamma \end{aligned}$$

Assim, com esta notação, a fórmula variacional pode ser re-escrita na forma:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial b}{\partial t} \Big| v \right)_{0,\Omega} + (\alpha \nabla b | \nabla v)_{0,\Omega} + \left(V_x \frac{\partial b}{\partial x} \Big| v \right)_{0,\Omega} + \\ &+ \left(V_y \frac{\partial b}{\partial y} \Big| v \right)_{0,\Omega} + (\sigma b | v)_{0,\Omega} = (f(b) | v)_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (10)$$

Considerando a formulação variacional na equação (10), foi obtido existência e unicidade, seguindo a idéia e demonstrações apresentadas em Vilani (2008), Odi (2005) e Diniz (2003).

Para estabelecer a existência e unicidade da solução de (10), será utilizado o Teorema de Lions (LIONS, 1961, Teor, 1.1 – Cap. IV, pg 46). Foi provado por Diniz (2003) que o problema na sua formulação variacional satisfaz as hipóteses do citado teorema, seguindo o procedimento adotado, por exemplo, em Diniz (1994), Castro (1993) e Mistro (1992).

O teorema Lions (1961), pode ser apresentado da seguinte forma (DINIZ, 2003):

Teorema: (Lions): Dado o conjunto aberto $\Omega \subset R^n$, considere os espaços $H^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ e \mathcal{V} tais que $H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{V} \subset H^1(\Omega)$.

Para $w = w(x, t)$ e $v = v(x, t)$, seja o operador A dado por:

$$A(t; w, v) = \frac{\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x, t) \partial w \partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \frac{\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_i(x, t) \partial w}{\partial x_i} v dx + \int_{\Omega} a_0(x, t) w v$$

Se

- i) a_{ij}, a_i e $a_0 \in L^2(\Omega \times (0, T])$;
- ii) $\forall w, v \in \mathcal{V}$, a função $\Lambda : t \rightarrow A(t; w, v)$ é mensurável;
- iii) $\exists \lambda \in R^n$ tal que: $|A(t; w, v)|^2 + \lambda \|w\|_{L^2}^2 \geq \delta \|w\|_{H^1(\Omega)}^2$, $\delta > 0$,

$w \in \mathcal{V}$;

iv) $|A(t; w, v)| \leq M \|w\|_{H^1(\Omega)}^2 \|v\|_{H^1(\Omega)}$;

v) $L_f(v) = \iint_{\Omega} f v dx + \left(\int_{\Omega} w_o v dx \right) \delta_0(t)$ é contínuo;

vi) $f \in L^2((-\infty, T); L^2(\Omega))$ e $w_o(x) \in L^2(\Omega)$

Então, existe uma única função $w \in L^2((-\infty, T); L^2(\Omega))$ e $\{w : (-\infty, 0) \rightarrow 0\}$ que é solução do problema variacional (10).

Prova: Para a demonstração do teorema consultar (Lions, 1961, Teor.1.1-Cap.IV)

Dadas as escolhas de a_{ij}, a_i e a_0 as hipóteses são satisfeitas pela equação (10), seguindo o que foi apresentado em Diniz (2003).

2.4. DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA

Conforme apresentado por Diniz (2003), o primeiro passo da discretização foi pelo Método dos Elementos Finitos, no caso a discretização espacial. Este método é uma técnica geral para a construção de aproximações da solução de um problema de

valor de contorno, que envolve a divisão do domínio da solução num número finito de subdomínios simples (os Elementos Finitos) e usando conceitos variacionais, contruir uma aproximação da solução sobre a coleção de Elementos Finitos (ver Becker et al. (1981) ou Carey e Oden (1981)).

Assim, conforme Diniz (2003), o segundo passo foi o da discretização da variável temporal (no caso, via Crank-Nicolson), optou-se por um método implícito com diferenças centradas (Carnahan et al., 1969; Kardestuncer e Norrie, 1987), de modo a transformar o modelo, discretizado espacialmente, num sistema de equações algébricas implicitamente definido como em (LACAZ, 1999; SOSSAE, 1995).

Para isso, deve-se trabalhar com a formulação variacional do problema, dada pela equação (10). Denominando de \mathcal{V}_h o subespaço de \mathcal{V} gerado pelas N_h funções φ_i (chamadas de funções base). Assim, qualquer $v_h \in \mathcal{V}_h$ é da forma:

$$v_h = \sum_{j=1}^{N_h} b_j(t) \varphi_j(x, y)$$

Daí, obtém-se que:

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{db_j}{dt} (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} + \alpha b_j (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{0,\Omega} + V_x b_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \middle| \varphi_i \right)_{0,\Omega} + V_y b_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \middle| \varphi_i \right)_{0,\Omega} + \sigma b_j (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} \right) = (f(b) | \varphi_i)_{0,\Omega} \quad (11)$$

tomando no lugar de φ_i a função teste inicialmente aplicada ao problema, o elemento φ_i da base de v_h

Assim, temos a discretização espacial do problema.

Para a discretização temporal (método Crank-Nicolson), usando as aproximações dadas por:

$$\frac{db_j}{dt} \left(t_n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cong \frac{b_j^{n+1} - b_j^n}{\Delta t}$$

onde

$$b_j^{n+1} = b_j(t_{n+1})$$

e, considerando

$$b_j \left(t_n + \frac{\Delta t}{2} \right) \cong \frac{b_j^{n+1} + b_j^n}{2}$$

que levadas em (11), nos dá o sistema linear de equações algébricas:

$$\begin{aligned}
 Ab^{(n+1)} &= Bb^{(n)} + d^{(n+\frac{1}{2})} \text{ dado } b^{(0)} \\
 a_{ij} &= \left(1 + \sigma \frac{\Delta t}{2}\right) (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} + \\
 &+ \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{0,\Omega} + V_x \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \Big| \varphi_i\right)_{0,\Omega} - V_y \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \Big| \varphi_i\right)_{0,\Omega} \\
 c_{ij} &= \left(1 - \sigma \frac{\Delta t}{2}\right) (\varphi_j | \varphi_i)_{0,\Omega} - \\
 &- \alpha \frac{\Delta t}{2} (\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i)_{0,\Omega} - V_x \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \Big| \varphi_i\right)_{0,\Omega} + V_y \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \Big| \varphi_i\right)_{0,\Omega}
 \end{aligned}$$

$$d^{(n+\frac{1}{2})} = \iint_{\Omega} f\left(t_n + \frac{1}{2}, \bullet\right) \varphi_i d\mu$$

em que \bullet representa $f(t, b)$.

CAPÍTULO 3

3. RESULTADOS E ANÁLISE

Como parte do trabalho proposto para obter resultados próximos a realidade, foram pesquisados na literatura os parâmetros necessários para simulação e teste do código numérico para o modelo adotado nesta abordagem do problema, dentre eles o coeficiente difusivo, o coeficiente de degradação, a componente advectiva de expansão e a fonte de crescimento do camarazal. Entretanto, considerando que as pesquisas desenvolvidas na área não apresentam valores para todos os parâmetros, alguns deles tiveram que ser estimados dentro de valores plausíveis para o modelo matemático em discussão na simulação de cenários e teste dos códigos numéricos desenvolvidos.

Os parâmetros de coeficiente difusivo efetivo (α) e coeficiente de degradação (σ) foram estimados numericamente, dentro dos aspectos considerados razoáveis para as simulações de cenários do modelo proposto, já que não foram encontrados na literatura.

Para a fonte de crescimento do camarazal encontramos no trabalho de Arieira e Cunha (2006) a amostra de indivíduos em locais delimitados e no trabalho de Brown (1997), a FAO (Food and Agriculture Organization) considera que a estimativa da biomassa (tronco, galhada, casca e folhas) representa a maior fração de biomassa da floresta e não apresenta muitas dificuldades logísticas para sua estimativa. Assim consideramos o que a FAO propõe sobre a estimativa de biomassa considerando que a região de estudo apresenta características de florestas de zonas climáticas úmidas (moist).

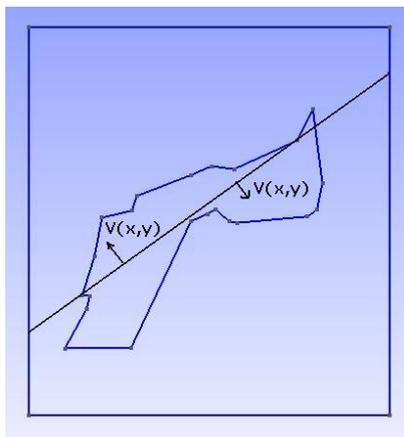


Figura 4: Componentes advectiva de expansão.

Os códigos utilizados foram desenvolvidos em ambiente MATLAB[®], cuja a facilidade de interface gráfica permite a obtenção de animações que descrevem o processo evolutivo do crescimento e dispersão do camarazal no domínio discretizado, para um período determinado.

3.1. SIMULAÇÕES DE CENÁRIOS

A discretização do domínio foi obtida através de uma malha gerada com do programa GMSH[®], alterando o coeficiente difusivo e comparando, em quatro nós distintos (figura 5) o resultado da sua dispersão.

Nas simulações dos cenários, foi mantido o coeficiente de degradação, a componente advectiva de expansão, as direções de expansão e a fonte de crescimento (figura 4), alterando o coeficiente difusivo.

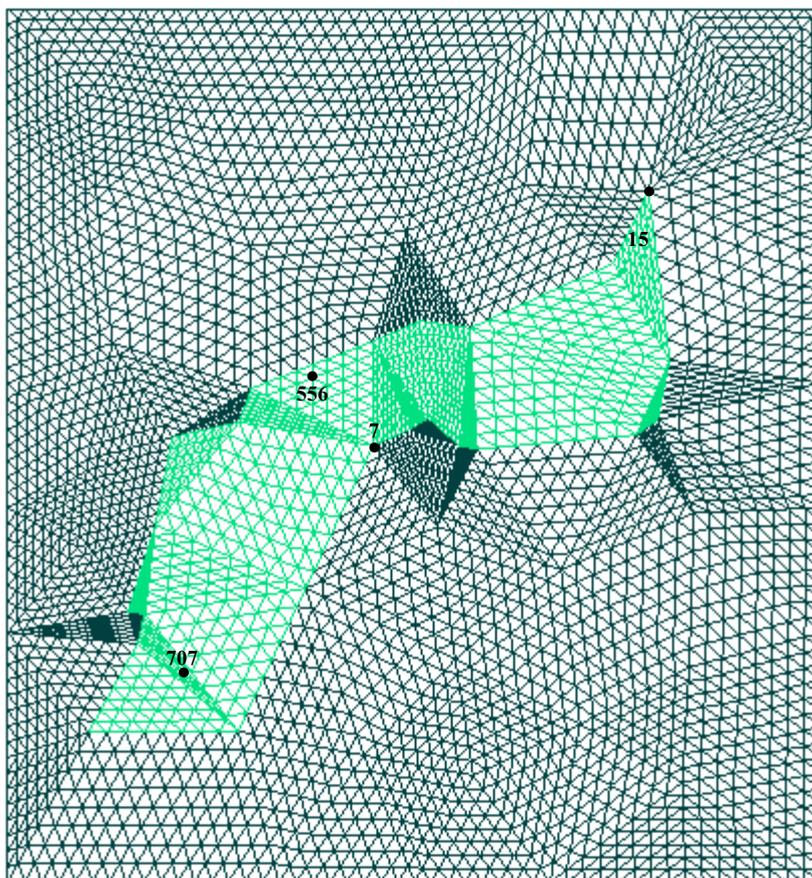


Figura 5: Malha gerada pelo programa GMSH[®] a partir da figura 3, com 7168 elementos e 3689 nós, com 04(quatro) pontos de referência.

SIMULAÇÃO 1

Considerando os dados apresentados na tabela 1 e os números de elementos (7168) e nós (3689), conforme a figura 5, foi feita a simulação para o primeiro cenário, em que se verifica o processo evolutivo da concentração de biomassa ao longo do tempo para 04 (quatro) nós (707, 7, 15 e 556).

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação do cenário 1

Parâmetros do modelo	Valores	Unidades
α	0,00012	Km²/ano
σ	1,5e-4	ano⁻¹
f	0,8	ton/ha
tempo	30	ano

Simulação do processo evolutivo da dispersão do camará e distribuição espacial da concentração.

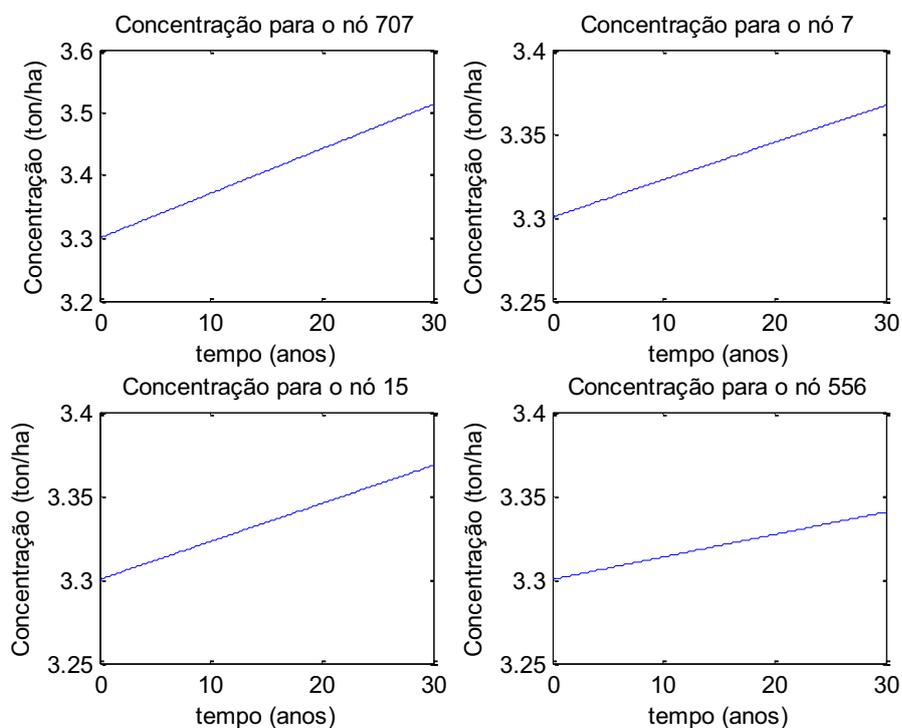


Figura 6: Simulação do cenário 1 – Processo evolutivo da concentração de biomassa de camará, para os nós 707, 7, 15 e 556.

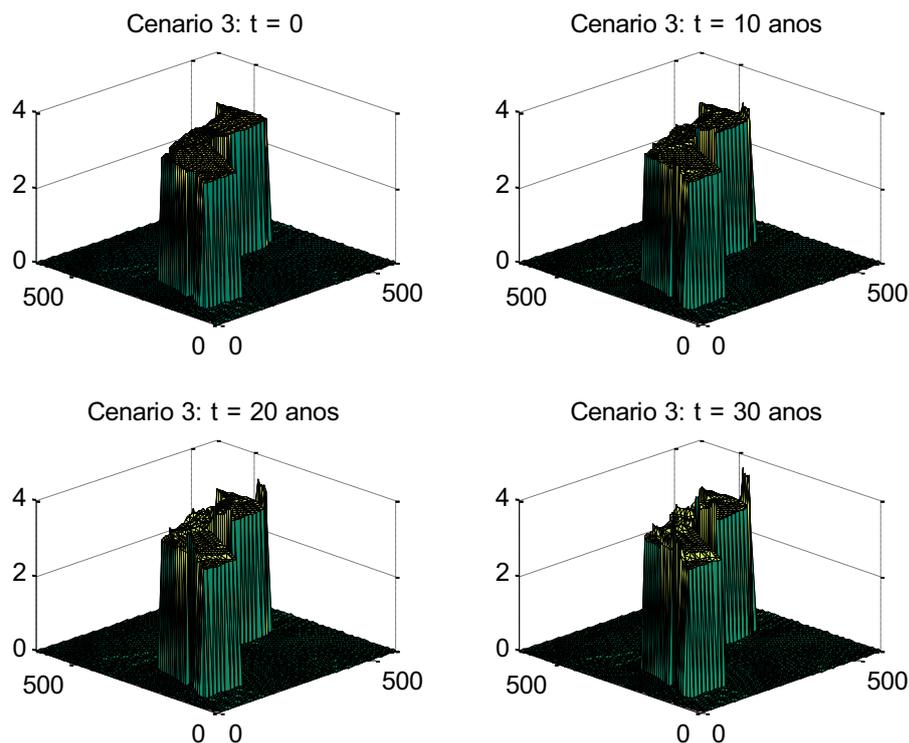


Figura 7: Simulação do cenário 1 – Processo evolutivo da distribuição espacial de biomassa de camarã.

SIMULAÇÃO 2

Considerando os dados apresentados na tabela 2 e os números de elementos (7168) e nós (3689), conforme a figura 5, foi feita a simulação para o primeiro cenário, em que se verifica o processo evolutivo da concentração de biomassa ao longo do tempo para 04 (quatro) nós (707, 7, 15 e 556).

Tabela 2: Parâmetros utilizados na simulação do cenário 2.

Parâmetros do modelo	Valores	Unidades
α	0,0006	Km²/ano
σ	1,5e-4	ano⁻¹
f	0,8	ton/ha
tempo	30	ano

Simulação do processo evolutivo da dispersão do camará e distribuição espacial da concentração.

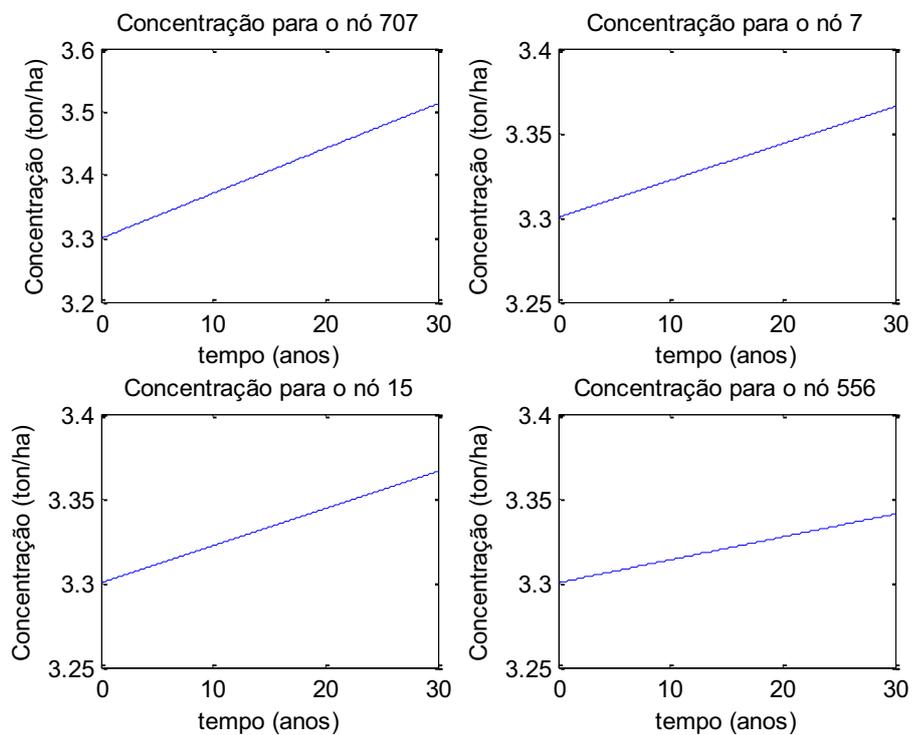


Figura 8: Simulação do cenário 2 – Processo evolutivo da concentração de biomassa de camará, para os nós 707, 7, 15 e 556.

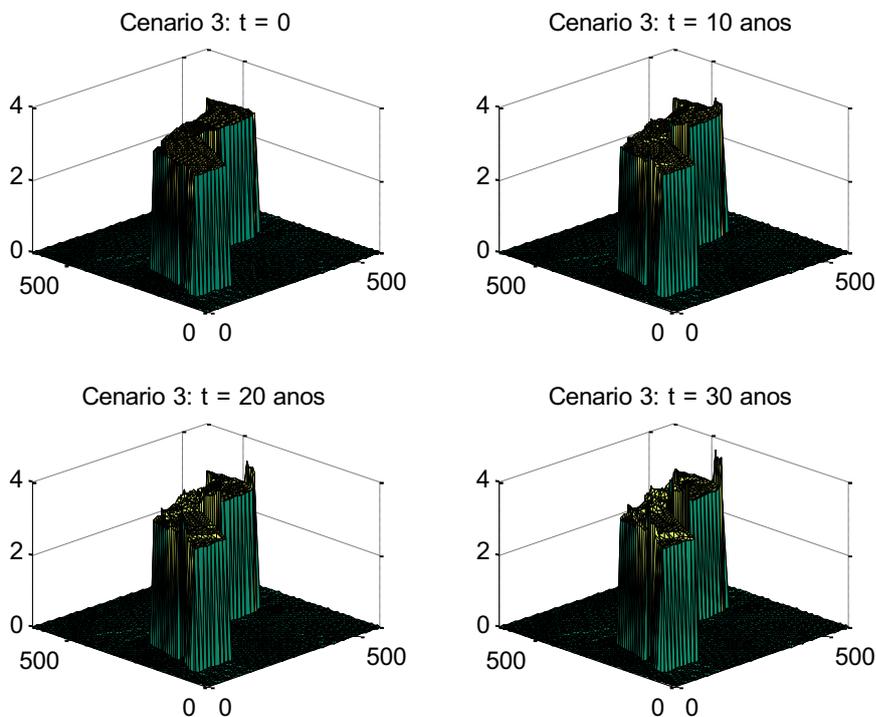


Figura 9: Simulação do cenário 2 – Processo evolutivo da distribuição espacial de biomassa de camará.

SIMULAÇÃO 3

Considerando os dados apresentados na tabela 3 e os números de elementos (7168) e nós (3689), conforme a Figura 5, foi feita a simulação para o primeiro cenário, em que se verifica o processo evolutivo da concentração de biomassa ao longo do tempo para 04 (quatro) nós (707, 7, 15 e 556).

Tabela 3: Parâmetros utilizados na simulação do cenário 3.

Parâmetros do modelo	Valores	Unidades
α	0,0012	Km²/ano
σ	1,5e-4	ano⁻¹
f	0,8	ton/ha
tempo	30	ano

Simulação do processo evolutivo da dispersão do camará e distribuição espacial da concentração.

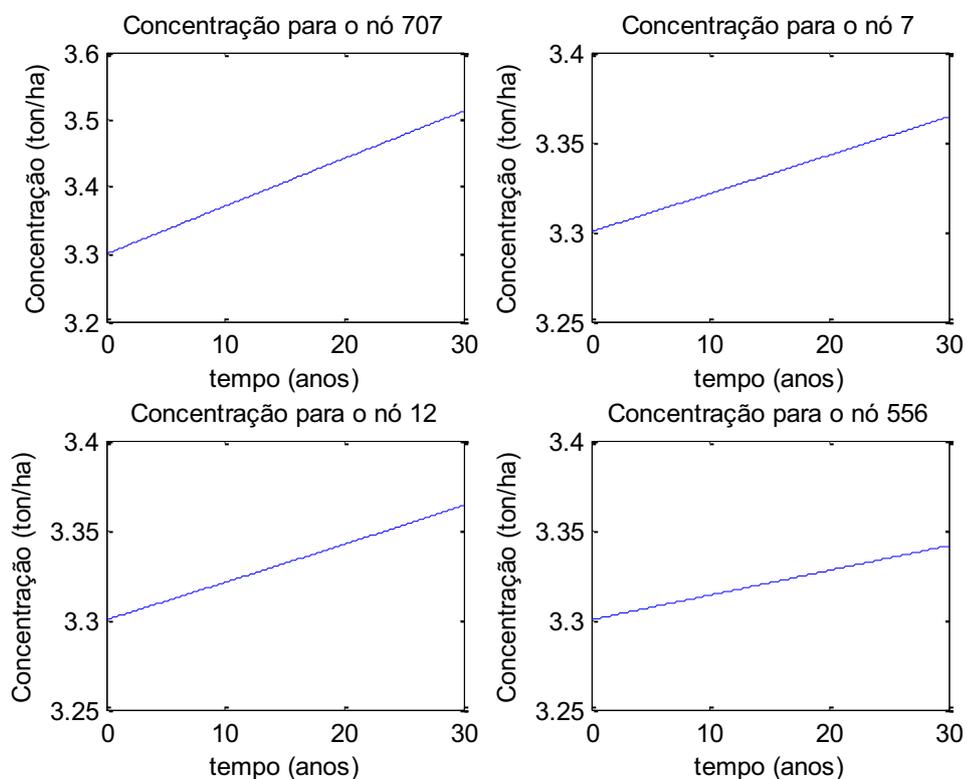


Figura 10: Simulação do cenário 3 – Processo evolutivo da concentração de biomassa de camará, para os nós 707, 7, 15 e 556.

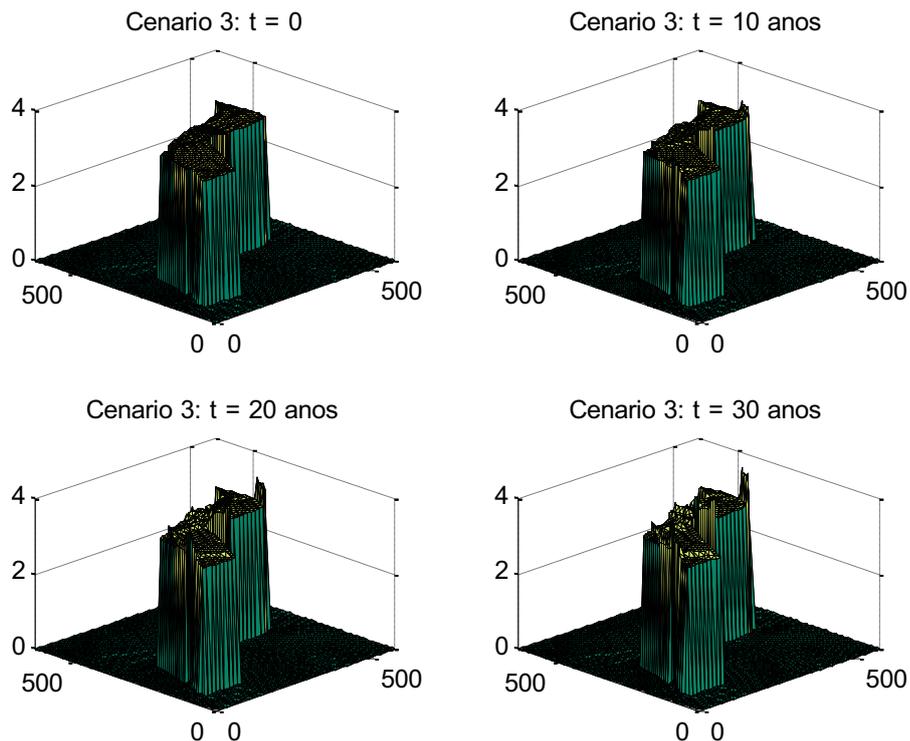


Figura 11: Simulação do cenário 3 – Processo evolutivo da distribuição espacial de biomassa de camarã.

3.2. ANÁLISES DOS RESULTADOS

Nas simulações apresentadas, o comportamento dos processos apresentaram diferenças de acordo com o coeficiente de difusão efetiva ($0,00012 \text{ Km}^2/\text{ano}$, $0,0006 \text{ Km}^2/\text{ano}$ e $0,0012 \text{ Km}^2/\text{ano}$).

Os MEF (Método dos Elementos Finitos) suavizam o domínio de integração, porém apresentam limitações quanto ao ângulo interno das treliças, em que o ângulo cada vez mais agudo os resultados apresentaram anomalia comparadas com outros nós em que as treliças não apresentaram ângulos agudos.

Essas limitações foram constatadas no nó 707 em que o gráfico apresentou crescimento mais acentuado que nos outros nós (7, 15 e 556) independente da variação do coeficiente difusivo apresentados dentro das 3 simulações de cenários.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi desenvolvido um modelo matemático para a descrição da dispersão da *V. divergens*, uma planta resistente a sazonalidade do pantanal conhecida como cambará, considerada invasora de regiões de pastagens naturais do pantanal mato-grossense. Foi desenvolvido um código numérico para obter a simulação de cenários da dispersão e interpretá-los na situação real.

O código numérico, em ambiente MATLAB[®], apesar das limitações com o uso de estimativas de algumas das variáveis foi implementado com sucesso para as simulações dos cenários, que permitiu uma avaliação preliminar da dispersão de *V. divergens*, considerando o transporte advectivo, na região do cambarazal.

As simulações dos cenários nesse trabalho mostraram diferentes comportamentos na expansão do cambará entre diferentes nós com um mesmo refinamento de malha, alterando somente o coeficiente difusivo.

Para o campo advectivo, poderemos considerar, para trabalhos futuros, o ciclo plurianual no pantanal e sua influência em cada indivíduo, contribuindo para estudos futuros, tanto no cambarazal quanto em espécies semelhantes, prevendo as causas e consequências dessa invasão de campos alagáveis, além das possíveis soluções de manejo, elaborando uma série de análises dos possíveis impactos não só regionais, mas também em escala global.

5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADÂMOLI, J. **O Pantanal e suas relações fitogeográficas com os cerrados: discussão sobre o conceito de complexo do Pantanal.** In Anais do 32º Congresso nacional da Sociedade Botânica do Brasil, Teresina, Universidade Federal do Piauí. 1982. p.109-119.

ALHO, C. J. R. **Biodiversity of the Pantanal: response to seasonal flooding regime and to environmental degradation.** Brazilian Journal of Biology, v. 68, n. 4, 2008.

ALLEM, A. C.; VALLS, J. F. M. **Recursos forrageiros nativos do Pantanal Mato-Grossense.** Brasília: Embrapa/Cernagem. 1987. 339p.

AMADOR, G. A. **Composição florística e caracterização estrutural de duas áreas de Caranbazais nas sub-regiões do Miranda e Nabileque, Pantanal sul mato-grossense, Brasil.** 55 f, Dissertação (Mestrado em Ecologia e Conservação), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2006.

ARIEIRA, J. C. **Estudo Fitossociológico e florístico de um cambarazal e da estrutura populacional da espécie monodominante, *Vorchysia divergens* POHL.** 2005. 95 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Biológicas) – Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Biociências, Programa de Pós-Graduação em Ciências Biológicas, Cuiabá, 2005.

ARIEIRA, J. C.; NUNES, C. N. **Fitossociologia de uma floresta inundável monodominante de *Vorchysia divergens* Pohl (Vochysiaceae), no Pantanal Norte, MT, Brasil.** Acta bot. bras. v. 20 n. 03, 2006.

BALD, A. A. **Modelos determinísticos com equações de diferenças de fenômenos biológicos.** Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – Campinas, SP. 1993.

BARELLA, W.; PETRERE Jr., M.; SMITH, W. S.; MONTAG, L. F. A. **As relações entre as matas ciliares, os rios e os peixes.** In: RODRIGUES, R. R.; LEITÃO FILHO, H. F. (Ed.) Matas ciliares: Conservação e Recuperação. São Paulo: Edusp, 2001.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** 2ed.-São Paulo. 2004.

BASSANEZI, R. C. **Ensino aprendizagem com modelagem matemática.** Ed. Contexto, São Paulo. 2002.

BASSANEZI, R. C. **Modelling as a teaching – learning strategy.** For the learning of mathematics, Vancouver, v.14, n.2, p. 31 – 35, 1994.

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA Jr, W. C. **Equações Diferenciais com Aplicações**. Ed. Harbra. São Paulo, 1988.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite elements**. An introduction. Vol. I, Prentice-Hall, 1981.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Ed. Guanabara dois, Rio de Janeiro, 1979.

BROWN, S. **Estimating Biomass and Biomass Change of Tropical Forest: A Primer. Forestry Paper**. Food and Agriculture Organization of the United Nations (FAO), Rome, 1997. 55p.

CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements: mathematical aspects**. Vol. 4. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs. 1981.

CARNAHAN, B.; LUTHER, H. A.; WILKES, J. O. **Applied Numerical Methods**. John Wiley & Sons, New York. 1969.

CASTRO, S. P. E. **Modelagem matemática e aproximação numérica do estudo de poluentes no ar**. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – Campinas, SP. 1993.

CHORLEY, Richard; Haggett, Peter. **Modelos, paradigmas e a nova geografia**. In: CHORLEY, Richard, HAGGETT, Peter. Modelos sócios-econômicos em geografia. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos/USP, 1975. p.1-22.

CHRISTOFOLETTI, A. **Análise de sistemas em geografia**. São Paulo: Hucite, 1979.

CHRISTOFOLETTI, A. L. H. **Sistemas Dinâmicos: As Abordagens da Teoria do Caos e da Geometria Factual em Geografia**. In: VITTE, Antonio, Carlos & GUERRA, Antonio José Teixeira, (org.) Reflexões sobre a Geografia Física no Brasil. Rio de Janeiro: Bertrand, 2004, 89-110 p.

CHRISTOFOLETTI, A. **Modelagem de sistemas ambientais**. Ed. Edgard Blücher Ltda. 1ª edição – São Paulo. 1999. 236 p.

CHRISTOFOLETTI, A. **Modelagem de Sistemas Ambientais**. São Paulo: Edgard Blücher, 3. ed, 2004.

CONNELL, J. H.; LOWMAN, M. D. **Low-diversity tropical rain forests: some possible mechanism for their existence**. American Naturalist. Chicago. v. 134, 1989. p.88-119.

CORREA, M.F.P.; MUZITANO, M. F.; VINCIERI, F.F.; COSTA, S. S. **Substâncias majoritárias dos decoctos de *Vochysia divergens*, uma planta utilizada contra infecções respiratórias e gástricas**. In: 30º Reunião Anual da

Sociedade Brasileira de Química, 2007, Águas de Lindóia. 30º Reunião Anual da Sociedade Brasileira de Química, 2007.

CORSINI, E.; GUARIM NETO, G. **Aspectos ecológicos da vegetação de "carvoal" (*Callisthene fasciculata* (Spr.) Mart.) no pantanal mato-grossense.** In: III SIMPÓSIO SOBRE RECURSOS NATURAIS E SÓCIO-ECONÔMICOS DO PANTANAL, 1, Corumbá (MS). Anais. Corumbá: III SINPAM, 2000. p. 1-52.

CUNHA, C. N.; JUNK, W. J. **Composição florística de capões e cordilheiras: localização das espécies lenhosas quanto ao gradiente de inundação no Pantanal de Poconé, MT, Brasil.** In: Anais do II Simpósio sobre Recursos Naturais e Sócio-Econômicos do Pantanal - manejo e conservação. Corumbá, MS, 1996. Embrapa - CPAP. 1999. p.387-406.

CUNHA, C. N.; JUNK, W. J. **Distribution of wood plant communities along the flood gradient in the Pantanal of Poconé, Mato Grosso, Brazil.** International Journal of Ecology and Environmental Sciences, International Scientific Publications, New Delhi, n. 27. 2001. p. 63-70.

CUNHA, C. N.; JUNK, W. J. **Year-to-year changes in water level drive the invasion of *Vorchysia divergens* in Pantanal grasslands.** Applied Vegetation Science. v. 7, fev. 2004.

CUNHA, C. N.; JUNK, W. J. **Year-to-year changes in water level drive the invasion of *Vochysia divergens* in Pantanal grasslands.** Applied Vegetation Science 7. 2004. 103-110.

CUNHA, C. N.; JUNK, W. J.; FALESSA, O.; COSTA, C. P.; ALMEIDA, L. **Influences of dry and flooding periods on phenology and the dynamic of seedlings and saplings of *Vochysia divergens* Pohl, in the Pantanal of Poconé.** In: GERMAN-BRAZILIAN WORKSHOP ON NEOTROPICAL ECOSYSTEMS - ACHIEVEMENTS AND PROSPECTS OF COOPERATIVE RESEARCH, 2000, Hamburg. 2000. p. 871-874.

CUNHA, C. N.; OLIVEIRA, E. V. R. **Influência da seca na dinâmica de população de indivíduos juvenis de *Vochysia divergens* Pohl Fazenda Retiro Novo – Pantanal de Poconé, MT.** 12 p. In: Anais do III Simpósio sobre Recursos Naturais e Sócio-Econômicos do Pantanal - os desafios do novo milênio. Corumbá, 2000. Brasília, Embrapa - CPAP. 2001.

DINIZ, G. L. **A mudança no habitat de populações de peixes: de rio a represa – o modelo matemático.** Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – Campinas, SP. 1994.

DINIZ, G. L. **Dispersão de poluentes num sistema ar-água: modelagem, aproximação e aplicações.** 130 f. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia elétrica e computação – Campinas, SP. 2003.

DINIZ, G. L.; MEYER, J. F. C. A.; FERNANDES, J. F. R. **Simulação da Dispersão de Poluentes num Sistema Ar-Água**. Biomatemática 16, 97-112. Publicação do grupo de Biomatemática IMECC – UNICAMP. 2003.

EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. Randon-House, New York. 1988.

EITTEN, G. **Brazilian “Savannas”**. In: Ecology of Tropical Savannas. Huntley, B. J. and Walker, B. H. (eds) Ecological Studies, Vol. Springer Verlag, Berlin. 1982. p. 25-47.

FANTIN-CRUZ, I.; LOVERDE-OLIVEIRA, S.; GIRARD, P. **Caracterização morfológica e suas implicações na limnologia de lagoas do Pantanal Norte**. Acta Scientiarum. Biological Sciences, v. 30, n. 2, 2008.

FABNACHT, N. J. M. **Vegetation skartierung mit Hilfe von Landsat-TM-Daten zur Abgrenzung der Baumart Vochysia divergens im Pantanal, Mato-Grosso - Brasilien**. Diplomarbeit der Forstwissenschaftlichen Fakultät der Ludwig-Maximilians- Universität München. 1995.

HART, T. B.; HART, J. A., MURPHY, P. G. **Monodominant and species-rich forests of the humid tropics: causes for their co-occurrence**. American Naturalist. Chicago. v. 133, 1989. p.613-633.

JUNK, W. J. **Long-term environmental trends and the future of tropical wetlands**. Environmental Conservation. v. 29 n. 4. 2002.

JUNK, W. J.; BAYLEY, P. B.; SPARKS, R. E. **The flood pulse concept in river-floodplain systems**. In: DODGE, D. P. (Ed.) Proceedings of the International Large River Symposium. British Columbia, 1989.

JUNK, W. J.; SILVA, C. J. **O conceito do pulso de inundação e suas implicações para o Pantanal de Mato Grosso**. In: SIMPÓSIO SOBRE RECURSOS NATURAIS E SÓCIO-ECONÔMICOS DO PANTANAL, 2. Corumbá. Manejo e conservação. Anais... Corumbá: EMBRAPA – CPAP, 1999. p. 17-28

JUNK, W.J. 1993. Wetland of Tropical South America. In: Wetlands of the World. Whigham, I. D. F. et al. (Editors), Kluwer Academic Publishers. Netherlands. p. 679-739.

KARDESTUNCER, H.; NORRIE, D. H. **Finite Element Handbook**. McGraw-Hill, New York. 1987.

LACAZ, T. M. V. S. **Análise de problemas populacionais intraespecíficos com difusão densidade dependente**. Tese (Doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – Campinas, SP. 1999.

LIONS, J. L. **Equations Differentielles Operationelles**. Springer. 1961.

LODHIYAL, N.; LODHIYAL, L.S. 2003. **Biomass and net primary productivity of Bhabar Shishan forests in Central Himalaya, India**. Forest Ecology and Management., nº 176, p. 217-235.

LORENZI, H. **Árvores brasileiras – Manual de identificação e cultivo de plantas arbóreas nativas do Brasil**. Vol. II, Nova Odessa, SP: Ed. Plantarum, 1998.

LORENZI, H. **Árvores Brasileiras: manual de identificação e cultivo de plantas arbóreas do Brasil**. 2 ed. São Paulo: Nova Odessa, v. 2. 384p. 2002.

MISTRO, D. C. **O problema de poluição em rios por mercúrio metálico: modelagem e simulação**. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – Campinas, SP. 1992.

NASCIMENTO, M. T.; CUNHA, C. N. **Estrutura e composição florística de um Cambarazal no Pantanal de Poconé –MT**. Acta Botânica Brasilica, v. 3, n. 1, 1989. p. 3-11.

NASCIMENTO, M. T.; JOSÉ, D.V. **O cambarazal no Pantanal de Mato Grosso**. Boletim FBCN 21: 116-123. 1986

ODI, N. L. G. **Estudos dos fluxos superficiais de vapor d'água na área da represa do Rio Manso/MT: modelagem e simulações**. 90 f. Dissertação (mestrado). Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de pós-graduação em física e meio ambiente. 2005.

ODUM, E. P. **Ecologia**. Ed. Guanabara. Rio de Janeiro, 1988.

OKUBO, A. **Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models**. Springer, Berlin. 1980.

POTT, A.; POTT, V. J. **Plantas do Pantanal**. 1ed. Corumbá, MS: Empresa Brasileira de Agropecuária, Centro de Pesquisa Agropecuária do Pantanal. 1994. 320 p.

PRANCE, G.; SCHALLER, G. B. **Preliminary study of some vegetation types of the Pantanal, Mato Grosso, Brazil**. Brittonia , v. 34, n. 2. 1982. p. 228-251.

SANTOS, S. A.; CUNHA, C. N.; TOMÁS, W.; ABREU, U. G. P.; ARIEIRA, J. **Plantas invasoras no Pantanal: Como entender o problema e soluções de manejo por meio de diagnóstico participativo**. Embrapa Pantanal. Boletim de pesquisas e desenvolvimento 66 – Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária do Pantanal, Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento, Corumbá – MS. 2006.

SARMIENTO, G. **The Savanas of Tropical América. In: Ecosystems of the World.** (Tropical Savannas). Bourlière F. (Editors), Elsevier Scientific Publishing Company. 1983. p. 245-285.

SILVA, J. S. V.; ABDON, M. **Delimitação do pantanal brasileiro e suas sub-regiões.** Pesquisa Agropecuária Brasileira, v. 33, número especial, 1998.

SILVA, M. P.; MAURO, R.; MOURÃO, G.; COUTINHO, M.; **Distribuição e quantificação de classes de vegetação do Pantanal através de levantamento aéreo.** Ver. Brasil. Botânica, v. 3, n. 2. Jun. 2000.

SOARES, M. E. S. **Solução de um problema não linear do tipo reação-difusão na modelagem de dispersão de insetos.** 201 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2002.

SODRÉ, U. **Modelos matemáticos.** 26p. Departamento de Matemática. Universidade de Londrina. Londrina-PR. 2007.

SOSSAE, R. C. **Dinâmica populacional densidade-dependente em processos de dispersão e migração.** Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica – Campinas, SP. 1995.

STAFLEU, F.A. **A monograph of the Vochysiaceae.** I. Salvertia and Vochysia 398-540p f. Mede Bot Mus Herb Rijks. 1948.

VARRIALE, M. C.; GOMES, A. G. **Modelagem de Ecossistemas: Uma Introdução.** Ed. da UFSM, Santa Maria. 2001. 503 p.

VELOSO, H. P. **Aspectos fitoecológicos da Bacia do Alto Paraguai.** Biogeografica 7: 1-31. 1972. Versão eletrônica.

VIANNA, L. F. N. **Métodos determinísticos ou probabilísticos de representação e análise espacial de dados para seleção de sítios em sistemas de informação geográficas: O exemplo da maricultura em Santa Catarina.** Anais XIII Simpósio Brasileiro de Sensoriamento Remoto, Florianópolis, Brasil, 21-26 abril, INPE. 2007. p. 3195-3202.

VILANI, V. **Dispersão de CO₂ em área de transição floresta-cerrado: modelagem e simulações.** 90 f. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, programa de pós-graduação em física ambiental – Cuiabá, MT. 2008.

VON BERTALANFFY, L. **Teoria geral dos sistemas.** Ed. Vozes (RJ). 1977. 351 pp.

APÊNDICE

CÓDIGOS PARA O MATHEMATICA®

A seguir será exposto o código executado no ambiente Windows Vista através do software MATHEMATICA® para calcular as integrais dadas pelos produtos internos da equação que formam as matrizes A e C dos códigos implementados nas equações discretizadas que modelam o problema.

```

1 ClearAll[F1, F2, F3, xmin, xmax, ymin, ymax];
2 ClearAll[G11, G12, G13, G21, G22, G23, G31, G32, G33];
3 ClearAll[GI11, GI12, GI13, GI21, GI22, GI23, GI31, GI32, GI33];
4 ClearAll[FI111, FI112, FI113, FI121, FI122, FI123, FI131, FI132,
5 FI133];
6 ClearAll[HY111, HY112, HY113, HY121, HY122, HY123, HY131, HY132,
7 HY133];
8 F1[x_, y_]=1-x/dx-y/dy
9 F2[x_, y_]=x/dx
10 F3[x_, y_]=y/dy
11 xmin=0;
12 xmax=dx;
13 ymin =0;
14 ymax =-dy/dx (x - dx);
15 G11[x_, y_]=Integrate[F1[x, y] F1[x, y], y]
16 HY11[x_]=Simplify[G11[x, ymax]-G11[x, ymin]]
17 GI11[x_]=Integrate[HY11[x], x]
18 HY111=Simplify[GI11[xmax]-GI11[xmin]]
19 G12[x_, y_]=Integrate[F1[x, y] F2[x, y], y]
20 HY12[x_]=Simplify[G12[x, ymax]-G12[x, ymin]]
21 GI12[x_]=Integrate[HY12[x], x]
22 HY112=Simplify[GI12[xmax]-GI12[xmin]]
23 G13[x_, y_]=Integrate[F1[x, y] F3[x, y], y]
24 HY13[x_]=Simplify[G13[x, ymax]-G13[x, ymin]]
25 GI13[x_]=Integrate[HY13[x], x]
26 HY113=Simplify[GI13[xmax]-GI13[xmin]]
27 G21[x_, y_]=Integrate[F2[x, y] F1[x, y], y]
28 HY21[x_]=Simplify[G21[x, ymax]-G21[x, ymin]]
29 GI21[x_]=Integrate[HY21[x], x]
30 HY121=Simplify[GI13[xmax]-GI13[xmin]]
31 G22[x_, y_]=Integrate[F2[x, y] F2[x, y], y]
32 HY22[x_]=Simplify[G22[x, ymax]-G22[x, ymin]]
33 GI22[x_]=Integrate[HY22[x], x]
34 HY122=Simplify[GI22[xmax]-GI22[xmin]]
35 G23[x_, y_]=Integrate[F2[x, y] F3[x, y], y]
36 HY23[x_]=Simplify[G23[x, ymax]-G23[x, ymin]]
37 GI23[x_]=Integrate[HY23[x], x]
38 HY123=Simplify[GI23[xmax]-GI23[xmin]]
39 G31[x_, y_]=Integrate[F3[x, y] F1[x, y], y]
40 HY31[x_]=Simplify[G31[x, ymax]-G31[x, ymin]]
41 GI31[x_]=Integrate[HY31[x], x]
42 HY131=Simplify[GI31[xmax]-GI31[xmin]]
43 G32[x_, y_]=Integrate[F3[x, y] F2[x, y], y]

```

```
44 HY32[x_]=Simplify[G32[x,ymax]-G32[x,ymin]]
45 GI32[x_]=Integrate[HY32[x],x]
46 HY132=Simplify[GI32[xmax]-GI32[xmin]]
47 G33[x_,y_]=Integrate[F3[x,y]-F3[x,y],y]
48 HY33[x_]=Simplify[G33[x,ymax]-G33[x,ymin]]
49 GI33[x_]=Integrate[HY33[x],x]
50 HY133=Simplify[GI33[xmax]-GI33[xmin]]
51 TRID1={HY111, HY112, HY113};
52 TRID2={HY121, HY122, HY123};
53 TRID3={HY131, HY132, HY133};
54 MAT1=MatrixForm[{TRID1, TRID2, TRID3}]
```

Cálculo do termo advectivo

```

1 ClearAll[F1, F2, F3, xmax, xmin, ymin, ymax];
2 ClearAll[DF1x, DF2x, DF3x];
3 ClearAll[G11, G12, G13, G21, G22, G23, G31, G32, G33];
4 ClearAll[G111, G112, G113, G121, G122, G123, G131, G132, G133];
5 ClearAll[H111, H112, H113, H121, H122, H123, H131, H132, H133];
6 F1[x_, y_]=1-x/dx-y/dy
7 F2[x_, y_]=x/dx
8 F3[x_, y_]=y/dy
9 DF1x[x_, y_]=D[F1[x, y], x]
10 DF2x[x_, y_]=D[F2[x, y], x]
11 DF3x[x_, y_]=D[F3[x, y], x]
12 xmin=0;
13 xmax=dx;
14 ymin=0;
15 ymax=-dy/dx (x-dx);
16 G11[x_, y_]=Integrate[DF1x[x_, y_] F1[x, y], y]
17 G111[x_]=G11[x, ymax]-G11[x, ymin]
18 H111[x_]=Integrate[G111[x], x]
19 FI111=Simplify[H111[xmax]-H111[xmin]]
20 G12[x_, y_]=Integrate[DF2x[x_, y_] F1[x, y], y]
21 G112[x_]=G12[x, ymax]-G12[x, ymin]
22 H112[x_]=Integrate[G112[x], x]
23 FI112=Simplify[H112[xmax]-H112[xmin]]
24 G13[x_, y_]=Integrate[DF3x[x_, y_] F1[x, y], y]
25 G113[x_]=G13[x, ymax]-G13[x, ymin]
26 H113[x_]=Integrate[G113[x], x]
27 FI113=Simplify[H113[xmax]-H113[xmin]]
28 G21[x_, y_]=Integrate[DF1x[x_, y_] F2[x, y], y]
29 G121[x_]=G21[x, ymax]-G21[x, ymin]
30 H121[x_]=Integrate[G121[x], x]
31 FI121=Simplify[H121[xmax]-H121[xmin]]
32 G22[x_, y_]=Integrate[DF2x[x_, y_] F2[x, y], y]
33 G122[x_]=G22[x, ymax]-G22[x, ymin]
34 H122[x_]=Integrate[G122[x], x]
35 FI122=Simplify[H122[xmax]-H122[xmin]]
36 G23[x_, y_]=Integrate[DF3x[x_, y_] F2[x, y], y]
37 G123[x_]=G23[x, ymax]-G23[x, ymin]
38 H123[x_]=Integrate[G123[x], x]
39 FI123=Simplify[H123[xmax]-H123[xmin]]
40 G31[x_, y_]=Integrate[DF1x[x_, y_] F3[x, y], y]
41 G131[x_]=G31[x, ymax]-G31[x, ymin]
42 H131[x_]=Integrate[G131[x], x]
43 FI131=Simplify[H131[xmax]-H131[xmin]]
44 G32[x_, y_]=Integrate[DF2x[x_, y_] F3[x, y], y]
45 G132[x_]=G32[x, ymax]-G32[x, ymin]
46 H132[x_]=Simplify[Integrate[G132[x], x]]
47 FI132=Simplify[H132[xmax]-H132[xmin]]
48 G33[x_, y_]=Integrate[DF3x[x_, y_] F3[x, y], y]
49 G133[x_]=G33[x, ymax]-G33[x, ymin]
50 H133[x_]=Integrate[G133[x], x]
51 FI133=Simplify[H133[xmax]-H133[xmin]]
52 TRID1={FI111, FI112, FI113};
53 TRID2={FI121, FI122, FI123};
54 TRID3={FI131, FI132, FI133};

```

```
55 Mat1=MatrixForm[{TRID1,TRID2,TRID3}]
```

CÓDIGOS PARA O MATLAB®

São apresentados os códigos numéricos utilizados para as aproximações da solução do problema, em três malhas com grau de refinamento (elementos e nós) diferentes.

1.1. Código para o MATLAB® - Dispersão Simulação alto coeficiente difusivo.

```

1 % Aproximacao de um sistema linear para simular a dispersao
2 % do Cambarazal no dominio real - animacoes p/ defesa
3 %
4 clear all; t0=clock; %format long;
5 %
6 % parâmetros do modelo
7 %
8 a=0.0012; % coeficiente difusivo
9 sg=1.5e-4; % coeficiente de degradação
Vel=0.001; % componente advectiva de
10 expansão
tet1=0.626729926667+3.1415926535897/2; % direção de expansão acima da
11 reta
tet2=0.626729926667-3.1415926535897/2; % direção de expansão abaixo da
12 reta
f= 0.8; % fonte de crescimento do
13 cambarazal (ton/ha)
14 %
15 % malha do dominio (gerada pelo gms)
16 %
17 load elem6.mat;
18 load coord6.mat;
19 nel = length(malha6);
20 ntn = length(coord6);
21 tfinal=30.0;
22 xmax = max(coord6(:,1));
23 ymax = max(coord6(:,2));
24 %
25 % parametros auxiliares da discretizacao
26 %
27 npt=600;
28 dt=tfinal/npt;
29 mdt=dt/2;
30 %
31 % calculo do campo de velocidade

```

```

32 %
33 V = zeros(nel,2);
34 for i = 1:nel;
35     if malha6(i,1)==30
36         for il=1:3
37             ig=malha6(i,il+1);
38             x(il) = coord6(ig,1);
39             y(il) = coord6(ig,2);
40             yy = 0.72411815314024*(x(il)-86.3)+196.1;
41             if y(il)>=yy
42                 V(ig,1) = Vel*cos(tet1);
43                 V(ig,2) = Vel*sin(tet1);
44             else
45                 V(ig,1) = Vel*cos(tet2);
46                 V(ig,2) = Vel*sin(tet2);
47             end;
48         end;
49     end;
50 end;
51 %
52 %   condição inicial
53 %
54 b0 = zeros(ntn,1);
55 for i = 1:nel;
56     if malha6(i,1)==30
57         b0(malha6(i,2)) = 3.3;
58         b0(malha6(i,3)) = 3.3;
59         b0(malha6(i,4)) = 3.3;
60     end;
61 end;
62 %
63 %   preparacao dos parametros que independem das coordenadas
64 %
65 c1 = mdt*sg;                % coef. (fi-j | fi-i)
66 c2 = mdt*a;                % coef. (grad fi-j | grad fi-i)
67 %
68 %   montagem das matrizes do sistema
69 %
70 A = sparse(ntn,ntn);
71 C = sparse(ntn,ntn);
72 d = zeros(ntn,1);
73 bsep= zeros(npt,1);
74 %
75 for iel=1:nel;

```

```

76     for il=1:3
77         ig=malha6(iel,il+1);
78         x(il) = coord6(ig,1);
79         y(il) = coord6(ig,2);
80     end;
81     jac = (x(2)-x(1))*(y(3)-y(1))-(x(3)-x(1))*(y(2)-y(1));
82     jj(iel,1) = jac;
83     s = abs(jac);
84     dfdx(1) = y(2)-y(3); dfdy(1) = x(3) - x(2);
85     dfdx(2) = y(3)-y(1); dfdy(2) = x(1) - x(3);
86     dfdx(3) = y(1)-y(2); dfdy(3) = x(2) - x(1);
87     if jac == 0
88         pause
89     end
90 %
91 %         Definindo a sub-matriz m, de (fj | fi)
92 %
93     m = [(1/12) (1/24) (1/24); (1/24) (1/12) (1/24); (1/24) (1/24)
94 (1/12)];
95 %
96 %         Encontrando n, (grad fi|grad fj) em omega
97 %
98     n1 = [(dfdx(1)^2) (dfdx(1)*dfdx(2)) (dfdx(1)*dfdx(3))
99 (dfdx(2)*dfdx(1)) (dfdx(2)^2) (dfdx(2)*dfdx(3))
100 (dfdx(3)*dfdx(1)) (dfdx(3)*dfdx(2)) (dfdx(3)^2)];
101 %
102     n2 = [(dfdy(1)^2) (dfdy(1)*dfdy(2)) (dfdy(1)*dfdy(3))
103 (dfdy(2)*dfdy(1)) (dfdy(2)^2) (dfdy(2)*dfdy(3))
104 (dfdy(3)*dfdy(1)) (dfdy(3)*dfdy(2)) (dfdy(3)^2)];
105 %
106     n = n1 + n2;
107 %
108 %         Encontrando p a partir de (dfj/dx | fi) em omega
109 %
110     p = [dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3); dfdx(1) dfdx(2) dfdx(3); dfdx(1)
111 dfdx(2) dfdx(3)];
112 %
113 %         Encontrando q a partir de(dfj/dy | fi) em omega
114 %
115     q = [dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3); dfdy(1) dfdy(2) dfdy(3); dfdy(1)
116 dfdy(2) dfdy(3)];
117 %
118 %         Construção da matriz de rigidez A e C
119 %
120     for il=1:3
121         ig=malha6(iel,il+1);

```

```

119         for jl=1:3;
120             jg=malha6(iel,jl+1);
                sub =
                (c2/s)*n(il,jl)+(V(jg,1)*mdt*s)/(6*jac)*p(il,jl)+(V(jg,2)*mdt*s)/(6*jac)
121 *q(il,jl);
122             A(ig,jg)=A(ig,jg)+(1+c1)*s*m(il,jl)+sub;
123             C(ig,jg)=C(ig,jg)+(1-c1)*s*m(il,jl)-sub;
124         end;
125     end;
126 end;
127 %
128 %   inclusao do termo independente.
129 %
130 for i = 1:nel;
131     if malha6(i,1)==30
132         d(malha6(i,2)) = 0.01;
133         d(malha6(i,3)) = 0.01;
134         d(malha6(i,4)) = 0.01;
135     end;
136 end;
137 %r = rcond(full(A));
138 %
139 %       Fatoracao L U da matriz de rigidez
140 %
141 A = sparse(A);
142 C = sparse(C);
143 [ll uu p q] = lu(A);
144 %[ll uu] = lu(A);
145 %       abertura da figura y arquivo para montagem das animacoes
146 %
147 fig=figure;
148     set(fig,'DoubleBuffer','on');
                set(gca,'xlim',[-80 80],'ylim',[-80
149 80],'NextPlot','replace','Visible','off')
150     mov = avifile('difusão alta.avi')
151     colormap summer;

                trisurf(malha6(:,2:4),coord6(:,1),coord6(:,2),b0),title('Cambarazal -
                Cenário 3'),view(-45,30),axis([0 xmax 0 ymax 0 4]);%,shading
152 interp,view(30,30);%,axis([0 xmax 0 ymax 0 12]),colormap=summer;
153     F = getframe(gca);
154     mov = addframe(mov,F);
155 %
156 %   resolução dos sucessivos sistemas.
157 %
158 for it = 1:npt

```

```
159     ys = ll\p*(C*b0+d);
160     s  = uu\ys;
161     s  = q*s;
162 %
163 %     visualizacao
164 %
165     if mod(it,5)==1

        trisurf(malha6(:,2:4),coord6(:,1),coord6(:,2),b0),title('Cambarazal -
        Cenario 3'),view(-45,30),axis([0 xmax 0 ymax 0 4]);% shading
166 interp,view(30,30);% axis([0 xmax 0 ymax 0 12]),colormap=summer;
167     F = getframe(gca);
168     mov = addframe(mov,F);
169     end;
170     b0=s;
171 end;
172 mov = close(mov);
173 etime(clock,t0)
```