

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA AMBIENTAL

**GEOMETRIA DE FRACTAIS: CARACTERIZAÇÃO
MATEMÁTICA DOS SISTEMAS NATURAIS NO
ENSINO DA EDUCAÇÃO BÁSICA**

JOSÉ WANDEONOR PEREIRA DOS SANTOS

Profa. Dra. IRAMAIA JORGE CABRAL DE PAULO
Orientadora

Cuiabá, MT

Mai 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA AMBIENTAL

**GEOMETRIA DE FRACTAIS: CARACTERIZAÇÃO
MATEMÁTICA DOS SISTEMAS NATURAIS NO
ENSINO DA EDUCAÇÃO BÁSICA**

JOSÉ WANDEONOR PEREIRA DOS SANTOS

*Dissertação apresentada ao
Programa de Pós-graduação
em Física Ambiental da
Universidade Federal de Mato
Grosso, como parte dos
requisitos para obtenção do
título de Mestre em Física
Ambiental.*

Profa. Dra. IRAMAIA JORGE CABRAL DE PAULO
Orientador

Cuiabá, MT

Maiο 2023

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

P436g Pereira dos Santos, José Wandeonor.

Geometria de Fractais: Caracterização Matemática dos Sistemas Naturais no Ensino da Educação Básica [recurso eletrônico] / José Wandeonor Pereira dos Santos. -- Dados eletrônicos (1 arquivo : 124 f., il. color., pdf). -- 2023.

Orientadora: Iramaia Jorge Cabral de Paulo.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Física Ambiental, Cuiabá, 2023.

Modo de acesso: World Wide Web: <https://ri.ufmt.br>.

Inclui bibliografia.

1. Geometria de Fractais. 2. Sistemas Naturais. 3. Educação Básica. I. de Paulo, Iramaia Jorge Cabral, *orientador*. II. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA AMBIENTAL

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Geometria de Fractais: Caracterização Matemática dos Sistemas Naturais no Ensino da Educação Básica

AUTOR: MESTRANDO JOSÉ WANDEONOR PEREIRA DOS SANTOS

Dissertação defendida e aprovada em **09** de **MAIO** de **2023**.

COMPOSIÇÃO DA BANCA EXAMINADORA

1. Profa. Dra. IRAMAIA JORGE CABRAL DE PAULO (Presidente Banca / **ORIENTADORA**)

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

2. Prof. Dr. SÉRGIO ROBERTO DE PAULO (Membro Interno)

INSTITUIÇÃO: UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO

3. Profa. Dra. ANDREIA DA SILVA TAVARES (Membro Externo)

INSTITUIÇÃO: CENTRO UNIVERSITÁRIO DE VÁRZEA GRANDE

CUIABÁ, 09/05/2023.



Documento assinado eletronicamente por **MARCELO SACARDI BIUDES**, **Coordenador(a) de Programas de Pós-Graduação em Física Ambiental - IF/UFMT**, em 20/06/2023, às 09:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **SERGIO ROBERTO DE PAULO**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 21/06/2023, às 10:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Andréia da Silva Tavares**, **Usuário Externo**, em 21/06/2023, às 10:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **IRAMAIA JORGE CABRAL DE PAULO**, **Docente da Universidade Federal de Mato Grosso**, em 21/06/2023, às 10:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site http://sei.ufmt.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5897996** e o código CRC **E7E6AA62**.

Referência: Processo nº 23108.031903/2023-34

SEI nº 5897996

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, irmãos, filhos, esposa, amigos, alunos e ex-alunos, enfim, a todos que acreditaram ser possível esta conquista.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço primeiramente a Deus por oportunizar a vida e proporcionar esta caminhada de desafios e superação.
- Agradeço a minha esposa Lourdes e meus filhos Benedito Paulo e José Maurílio pelo apoio integral e incondicional.
- Agradeço aos meus pais, Benedito Paulo e Maria Francisca (in memoriam), pelos ensinamentos, companheirismo, parceria e educação.
- Agradeço aos meus irmãos, Paulo Cesar, Vanderley e Terezinha por acreditarem ser possível o título de mestre em Física Ambiental.
- Agradeço a minha orientadora Profa. Dra. Iramaia Cabral Jorge de Paulo que não mediu esforços em sempre me ajudar, mesmo diante de extrema dificuldade, sendo receptiva, amiga, conselheira, transmitindo energias positivas, gratidão pela dimensão gigantesca de contribuições, acolhimento e ajuda, enfim uma segunda mãe.
- Agradeço ao Coordenador Prof. Dr. Sérgio Roberto de Paulo (Sérginho), pela prestatividade, receptividade, dialogicidade, contribuição, sempre com extrema educação e humildade.
- Agradeço a coorientadora Profa. Dra. Andreia da Silva Tavares, pela imensa contribuição, conselhos, pensamentos positivos, transmitindo segurança e confiança.
- Agradeço ao Prof. Dr. José de Souza Nogueira (Paraná), (in memoriam), pela força, compreensão, parceria, amizade, dedicação, contribuição com seu vasto conhecimento e sempre com um sorriso no rosto inesquecível.
- Agradeço a todos os Professores e alunos do Instituto de Física por oportunizar conhecimento acadêmico.
- Agradeço ao Prof. Dr. Daniel Carlos Leite, por disponibilizar seu precioso tempo, conhecimento, troca de ideias para aprimorar esta dissertação.

- Agradeço ao Prof. Mestrando Francisco de Assis Valente por estar sempre presente na construção direta desta dissertação.
- Agradeço ao Prof. Mestrando Martin de Oliveira Kotsis pela imensa paciência, parceria, amizade, contribuição, conselhos que me trouxe para conclusão desta dissertação.
- Agradeço ao Mestrando Prof. Marcelo Montresor pela prestatividade, troca de conhecimentos, apoio e amizade.

EPÍGRAFE

O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.

Isaac Newton

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	ix
RESUMO	x
ABSTRACT	xi
1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. OBJETIVO	2
1.1.1. Objetivo Geral	2
1.1.2. Objetivos Específicos	2
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1. A Geometria Fractal e a Interdisciplinaridade	6
2.2. Fractais	8
2.2.1. O que são fractais?	8
2.2.2 Caracterização dos fractais	10
2.3 Dimensionalidade	11
2.4. Modelos de Fractais Iterativos e seu Algoritmo	12
2.4.1 Conjunto de Cantor	12
2.4.2 Curva de Peano	14
2.4.3 Triângulo de Sierpinski	17
2.4.4 Curva de Koch	20
2.4.5 Ilha de Koch	22
2.4.6 Tapete de Sierpinski	25
2.4.7 Esponja de Menger	29
2.5 Método de Box Counting	31
3. REVISÃO LITERÁRIA.....	35
4. METODOLOGIA.....	71
4.1 Metodologia de Ensino	72
4.1.1 Primeiro Momento pedagógico: Problematização Inicial.....	74
4.1.2 Segundo Momento Pedagógico: A Organização do Conhecimento	77
4.1.3 Terceiro Momento Pedagógico: Aplicação do Conhecimento.....	78
4.2 Metodologia da Pesquisa.....	93
4.2.1 Critérios para análise qualitativa dos dados	93

4.2.2 A correlação com elementos da Matemática e da Física e o conhecimento prévio dos estudantes.	95
4.2.3 Compreensão de Conceitos e Definições sobre Geometria de Fractais e seus Elementos Constitutivos.....	96
4.2.4 Elaboração das Estruturas Fractais pelos Estudantes e a Aplicação dos Novos Saberes Científicos Incorporados com a Aplicação da Geometria de Fractais.	97
5. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	98
7. CONCLUSÃO.....	103
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	106

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Conjunto de Cantor da 5ª iteração	13
Figura 2 - Curva de Peano na 2ª iteração	15
Figura 3 - Curva de Peano na 3ª iteração	16
Figura 4 - Triângulo de Sierpinski 1ª iteração	18
Figura 5 - Triângulo de Sierpinski 2ª iteração	18
Figura 6 - Triângulo de Sierpinski 3ª iteração	19
Figura 7 - Curva de Koch na 1ª iteração	20
Figura 8 - Curva de Koch na 2ª iteração	21
Figura 9 - Curva de Koch na 3ª iteração	21
Figura 10 - Ilha de Koch na 1ª iteração	22
Figura 11 - Ilha de Koch na 2ª iteração	23
Figura 12 - Ilha de Koch na 3ª iteração	23
Figura 13 - Tapete de Sierpinski na 1ª iteração	26
Figura 14 - Tapete de Sierpinski na 2ª iteração	26
Figura 15 - Tapete de Sierpinski na 3ª iteração	27
Figura 16 - Esponja de Menger na 1ª iteração	29
Figura 17 - Esponja de Menger na 2ª iteração	30
Figura 18 - Esponja de Menger na 3ª iteração	30
Figura 19 - Aplicação do Método de Box Counting na árvore	33
Figura 20 - Folhas de Plantas Nativas	37
Figura 21 - Rede de ramificações	37
Figura 22 - Espécie de Plantas Nativas	38
Figura 23 - Volume da planta	38
Figura 24 - Galho do Bacurizeiro e a direita Amostra foliar	39
Figura 25 - Galho do Araçazeiro utilizado na coleta e a direita Amostra foliar	
FONTE: Mota, 2017	40
Figura 26 - Galho do João Mole utilizado na coleta e a direita Amostra foliar	
FONTE: Mota, 2017	41
Figura 27 - Galho do Mucurão utilizado na coleta e a direita Amostra foliar	
FONTE: Mota, 2017	41
Figura 28 - Parâmetros utilizados no cálculo de dimensionalidade da espécie	
Bacurizeiro - <i>Plantonina Insignis</i>	42
Figura 29 - Similaridade geométrica entre os padrões de mata ciliar original e	
degradada da bacia do rio Passa Cinco	43
Figura 30 - Contagem de quadrados para determinar a dimensão fractal	44
Figura 31 - Cálculo da dimensão fractal no trecho de um rio	45
Figura 32 - Planta Renda Portuguesa	46
Figura 33 - Planta Renda Portuguesa na malha quadriculada	46
Figura 34 - Processo de Regressão Linear	47
Figura 35 - Processos de aprendizagem	48

Figura 36 - Síntese das competências	49
Figura 37 - Ideias Fundamentais.....	50
Figura 38 - Considerações do estudante A.....	76
Figura 39 - Considerações do estudante B.....	76
Figura 40 - Considerações do estudante C.....	76
Figura 41 - Conjunto de Cantor do Estudante A.....	81
Figura 42 - Conjunto de Cantor do Estudante B.....	81
Figura 43 - Conjunto de Cantor do Estudante C.....	81
Figura 44 - Iterações do Conjunto de Cantor.....	82
Figura 45 - Iterações do Triângulo de Sierpinski.....	82
Figura 46 - Triângulo de Sierpinski do estudante A	83
Figura 47 - Triângulo de Sierpinski do estudante B	83
Figura 48 - Triângulo de Sierpinski do estudante C	84
Figura 49 - Triângulo de Sierpinski do estudante D	84
Figura 50 - Iterações Tapete de Sierpinski	85
Figura 51 - Tapete de Sierpinski do estudante A	86
Figura 52 - Tapete de Sierpinski do estudante B	86
Figura 53 - Tapete de Sierpinski do estudante C	87
Figura 54 - Iterações da curva de Peano	88
Figura 55 - Iterações da Curva de Koch	89
Figura 56 – Retângulo.....	90
Figura 57 - Primeiro passo da construção do Cartão tridimensional	90
Figura 58 - Segundo passo da construção do Cartão tridimensional	91
Figura 59 - Terceiro passo da construção do Cartão tridimensional.....	91
Figura 60 - Cartão tridimensional do Estudante A	92
Figura 61 - Cartão tridimensional do Estudante B.....	92
Figura 62 - Cartão tridimensional do Estudante C.....	93
Figura 63 - Considerações do estudante A.....	96
Figura 64 - Considerações do estudante B.....	96
Figura 65 - Considerações do estudante C.....	96

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Números de subsegmentos, comprimento e comprimento da Curva.....	17
Tabela 2 - Dissertações e artigos, utilizando Geometria de Fractais	51
Tabela 3 - Análise de conteúdo: Indicadores e Categorias	94

RESUMO

A Geometria de Fractais é uma área da matemática que estuda formas geométricas complexas, caracterizadas por sua autossimilaridade, complexidade infinita, rugosidade e dimensão fractal. A aplicação desta geometria em sistemas ambientais permite a identificação de padrões e estruturas complexas, que podem ser utilizados na compreensão e análise de fenômenos naturais, como a distribuição de plantas em uma floresta, formação dos raios, formação de nuvens, formação da costa terrestre ou a forma de um rio. A presente dissertação tem como objetivo geral elaborar e testar uma sequência didática que aplique a Geometria de Fractais em sistemas ambientais, visando facilitar o aprendizado de conceitos matemáticos e físicos em busca do desenvolvimento do pensamento lógico na caracterização de sistemas ambientais para uso em situações de ensino e aprendizagem. A utilização do método de sequência didática, utilizando os três momentos pedagógicos dos autores Delizoicov, Angotti e Pernambuco aplicada a Geometria de fractais em sistemas ambientais se mostra uma estratégia eficiente para alcançar esse objetivo. Para o desenvolvimento desta pesquisa, foi utilizado o método qualitativo de investigação, segundo Bogdan, Biklen e Bardin. Este método permite uma análise detalhada e sistemática dos dados coletados, a fim de identificar padrões e tendências em relação ao uso da Geometria de Fractais em sistemas ambientais. Considerando os resultados obtidos na pesquisa a aplicação da geometria de fractais como ferramenta pedagógica e sua utilização em diversos campos do conhecimento, como medicina, topologia, engenharias, entre outros. Além disso, enfatiza a aplicação dessa abordagem em estudos de sistemas ambientais, como florestas, rios e bacias hidrográficas, que são caracterizados por sua complexidade e heterogeneidade. A geometria fractal permite analisar e descrever a complexidade desses sistemas de forma mais precisa e eficiente, possibilitando a identificação de padrões fractais na estrutura e na dinâmica desses sistemas. A aplicação dessa abordagem pode contribuir para a compreensão dos processos ecológicos e hidrológicos que ocorrem nesses sistemas e para a orientação de políticas públicas e práticas de conservação ambiental, promovendo a sustentabilidade e preservação dos recursos naturais. Ao final deste estudo, espera-se disponibilizar elementos para uso em outros contextos educacionais, contribuindo para a ampliação do conhecimento e para a formação de estudantes com maior capacidade analítica e crítica.

Palavras-chave: Geometria de Fractais; Sistemas Naturais; Educação Básica

ABSTRACT

Fractal Geometry is an area of mathematics that studies complex geometric shapes, characterized by their self-similarity, infinite complexity, roughness, and fractal dimension. The application of this geometry in environmental systems allows the identification of patterns and complex structures, which can be used in the understanding and analysis of natural phenomena, such as the distribution of plants in a forest, lightning formation, cloud formation, formation of the terrestrial coast or the shape of a river. The present dissertation has the general objective of elaborating and testing a didactic sequence that applies Fractal Geometry in environmental systems, aiming to facilitate the learning of mathematical and physical concepts in search of the development of logical thinking in the characterization of environmental systems for use in teaching situations and learning. The use of the didactic sequence method, using the three pedagogical moments of the authors Delizoicov, Angotti and Pernambuco applied to Fractal Geometry in environmental systems, proves to be an efficient strategy to achieve this objective. For the development of this research, the qualitative method of investigation was used, according to Bogdan, Biklen and Bardin. This method allows a detailed and systematic analysis of the collected data, to identify patterns and trends in relation to the use of Fractal Geometry in environmental systems. Considering the results obtained in the research, the application of fractal geometry as a pedagogical tool and its use in several fields of knowledge, such as medicine, topology, engineering, among others. Furthermore, it emphasizes the application of this approach in studies of environmental systems, such as forests, rivers, and watersheds, which are characterized by their complexity and heterogeneity. Fractal geometry allows analyzing and describing the complexity of these systems more accurately and efficiently, enabling the identification of fractal patterns in the structure and dynamics of these systems. The application of this approach can contribute to the understanding of the ecological and hydrological processes that occur in these systems and to the orientation of public policies and practices of environmental conservation, promoting the sustainability and preservation of natural resources. At the end of this study, it is expected to make elements available for use in other educational contexts, contributing to the expansion of knowledge and to the formation of students with greater analytical and critical capacity.

Keywords: Fractal Geometry; Natural Systems; Basic education

1. INTRODUÇÃO

A educação básica brasileira está em constante mudança nas últimas décadas. Os marcos regulatórios da educação no Brasil, como os PCNs, OCNs e BNCC, são de extrema importância para a criação de um sistema educacional moderno e uniforme em todo o país, levando em conta as diferenças regionais. Embora os PCNs e OCNs tenham aberto espaço para temas além dos conteúdos clássicos, pouco foi implementado na prática, especialmente na educação básica. Com a nova BNCC, surge a oportunidade de reavaliar e aplicar conteúdo de ciências da natureza e matemática, como a Geometria de Fractais, que pode ser inserida no contexto dos Sistemas Ambientais, aproveitando o caráter interdisciplinar do tema.

Durante os anos como professor na educação básica, pude observar uma grande dificuldade dos estudantes em compreender os conceitos matemáticos e da física e sua relevância para o entendimento do mundo ao seu redor. É comum que os alunos não tenham afinidade com a matemática e a física, possivelmente porque não conseguem enxergar a utilidade do aprendizado e não compreendem suas eventuais aplicações. No entanto, mesmo sem perceber, eles utilizam esses conhecimentos de maneira natural e intuitiva em suas atividades do cotidiano para garantir sua sobrevivência.

Este trabalho surgiu da necessidade de integração entre as disciplinas de ciências naturais, com foco na interdisciplinaridade. A integração de conteúdos faz-se necessária para tornar que o ato de ensinar proporcione uma aprendizagem com significado para os alunos. Diante disso, o aluno pode estabelecer melhor a relação teoria e prática e adquirir novos conhecimentos para aplicar tanto na disciplina envolvidas como nas demais no processo ensino aprendizagem. A caminhada em qualquer direção, há necessidade de integração, para tornar o ensino abrangente e com aplicação no mundo real, refletindo no aumento da participação, e consequentemente influenciando no índice de aprendizagem. Desta forma, atenua o conceito, até então relatados, que a matemática é difícil de compreensão, contextualização, associação e aplicação.

Deve-se considerar que a Geometria de Fractais é um ramo da matemática que estuda objetos com padrões irregulares e autossimilares, ou seja, que possuem a mesma aparência em diferentes escalas. Essa geometria tem se mostrado muito útil na caracterização de sistemas ambientais, como exemplo, na análise de rios, nuvens, árvores, entre outros. A inserção dos conceitos da Geometria de Fractais em uma sequência didática possibilita uma compreensão mais ampla e integrada dos sistemas ambientais, permitindo uma visão mais complexa e dinâmica dos fenômenos naturais. Além disso, a utilização dessa geometria como ferramenta pedagógica pode auxiliar no desenvolvimento do pensamento lógico e na compreensão de conceitos matemáticos, tornando o processo de ensino e aprendizagem significativos.

1.1. OBJETIVO

1.1.1. Objetivo Geral

- Elaborar e testar uma sequência didática que aplique a Geometria de Fractais em sistemas ambientais, visando facilitar o aprendizado de conceitos matemáticos e físicos em busca do desenvolvimento do pensamento lógico na caracterização de sistemas ambientais para uso em situações de ensino e aprendizagem e disponibilizar elementos para uso em outros contextos educacionais.

1.1.2. Objetivos Específicos

- Apresentar a dimensão dos fractais na natureza e aplicação com conteúdo matemático na elaboração de modelos contextualizados;
- Identificar a importância da interdisciplinaridade entre a Matemática e a Física;
- Buscar estratégias, através de oficinas, para compreensão da Geometria de Fractais e suas aplicações no mundo concreto;
- Construir modelos iterativos fractais, como forma de compreender, analisar e visualizar suas características, como a autossimilaridade, dimensão fracionada, irregularidade, complexidade infinita.

- Avaliar a participação dos estudantes na compreensão dos conteúdos matemáticos usando fractais como referência.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. A Geometria Fractal e a Interdisciplinaridade

A interdisciplinaridade é uma abordagem educacional que propõe a integração de diferentes disciplinas para a construção de conhecimento amplo e significativo. Essa perspectiva está presente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que busca a articulação entre as diversas áreas do conhecimento para o desenvolvimento de competências e habilidades dos estudantes.

De acordo com Fazenda (2002, p.86), a interdisciplinaridade vai muito além da junção de disciplinas, implica em uma libertação de modelos preestabelecidos, permitindo a união da arte com a ciência, o uso eficiente do tempo e a criação de uma relação de pessoas a partir de um olhar que pode gerar um momento único de interação e aprendizagem. No entanto, essa prática exige um trabalho pedagógico intenso e criativo para estabelecer o vínculo necessário entre professores e estudantes, que são sujeitos com histórias de vida e conhecimentos diversos em um mesmo ambiente. A autora destaca que a atitude interdisciplinar exige confiança mútua, parceria, humildade, dúvida, respeito, entre outros aspectos. O professor deve optar por uma postura que incentive reflexão, criação e vontade de aprender, transformando a obrigação em naturalidade e o medo em alegria de conhecer. Nas salas de aula onde essa atitude é adotada, novos caminhos de ensino e pesquisa se abrem em busca da concretização da cidadania.

Os fractais são formas geométricas complexas e autos similares, ou seja, que se repetem em diferentes escalas. Essa propriedade permite a aplicação dos fractais em diversas áreas do conhecimento, como na física, biologia, economia e arte. Na matemática, os fractais são estudados em uma área específica chamada de geometria fractal. A geometria fractal pode ser abordada de forma interdisciplinar, envolvendo conceitos matemáticos e físicos. Por exemplo, a dimensão fractal é uma medida de complexidade que pode ser aplicada em estudos de sistemas dinâmicos, como o comportamento de fluidos turbulentos ou a distribuição de galáxias no universo. Além disso, a análise de imagens fractais podem ser utilizada em estudos de patologias médicas e em processos industriais.

Assim, a geometria fractal pode ser um tema interdisciplinar interessante para o ensino de matemática e física, permitindo a articulação de conceitos e a exploração de aplicações práticas em diferentes áreas do conhecimento. A BNCC incentiva esse tipo de abordagem, ao propor a integração das diversas áreas do conhecimento e o desenvolvimento de competências e habilidades para o enfrentamento de desafios da vida contemporânea.

Considerando os conceitos apresentados e a necessidade de definição de um processo operacional, é sugerido o uso de estratégias metodológicas para a prática interdisciplinar. Isso se apresenta como um desafio para os educadores que buscam uma dinâmica no processo de transformação e na construção de saberes necessários para enfrentar situações advindas das constantes mudanças da sociedade do conhecimento.

Quando se tem a compreensão do ensino em diferentes focos e com aplicações nas várias linhas do conhecimento, a interdisciplinaridade foi alcançada. Ela faz se necessária para que surta efeitos de aprendizagem e aplicabilidade nas diversas áreas do conhecimento, impossibilitando que conteúdos sejam esquecidos ou até mesmo sem despertar interesse algum, por não ter exposição de sua aplicação. Essa integração de disciplina possibilita ensino mais completa e coerente, significativo, e com aplicação, aumentando o interesse dos estudantes, tornando as aulas menos monótonas, estressantes, com possibilidades de redução no índice de fracasso.

Neste trabalho, é relevante ressaltar que, conforme a BNCC apontada por BRASIL (2019), a abordagem matemática tem um papel crucial em sua relação com outras áreas da ciência.

Não é sem razão que a Unesco (2016) salienta sobre a educação matemática e sua transdisciplinaridade: *Uma educação matemática de qualidade deve, portanto, ser conduzida por uma visão da matemática como uma ciência viva, em conexão com o mundo real, aberta a relações com outras disciplinas, de modo que tal abertura não se limite apenas a disciplinas científicas.*

2.2. Fractais

2.2.1. O que são fractais?

A geometria analítica foi desenvolvida por Descartes, no século XVII. A geometria que prevalecia na época foi desenvolvida pelos gregos e que estavam registradas nos treze volumes que compunham os “Elementos de Euclides” e nos dois volumes dos “Apócrifos”. As figuras geométricas conhecidas eram as retas, os planos, os círculos, as crônicas, os polígonos e figuras espaciais, tais como cubos (paralelepípedos), cones, esferas, pirâmides, prismas etc. No mesmo período, começou a ser desenvolvido o cálculo diferencial e integral com Newton e Leibniz. A partir daí surgiram curvas que eram definidas como gráficos de funções e que não estavam contempladas nos trabalhos dos gregos. Isto é, não eram necessariamente retas, nem círculos e muito menos cônicas. Porém, o cálculo diferencial desenvolveu-se conceitualmente para curvas suaves, onde a reta tangente fosse possível de ser estabelecida.

De acordo com Diniz (2020, p. 31), é comum na antiguidade atribuir obras a autores famosos mesmo que não tenham sido escritas por eles. Nesse sentido, os livros apócrifos XIV e XV foram incluídos em algumas coleções dessa forma. O livro XIV autêntico, por exemplo, foi provavelmente escrito por Hipsicles com base em um tratado de Apolônio que trata da comparação de sólidos regulares inscritos em esferas, seguindo os passos de Euclides.

No século XIX, surgem alguns exemplos de curvas que fugiram à propriedade de suavidade. Entre elas, estão o gráfico da “Função de Weierstrass”, definida pelo matemático alemão Karl Weierstrass em 1860, e a “Curva de Peano” definida pelo matemático italiano Giuseppe Peano em 1890. No ano seguinte, o matemático alemão David Hilbert descreveu uma curva com propriedades semelhantes. Tais exemplos, por divergirem dos modelos de interesse do cálculo diferencial e por falta de ferramentas matemáticas como forma de explicação, foram chamados pelos estudiosos da época de “Monstros Matemáticos”, pois fugiam totalmente as explicações e conceitos de geometria da época.

Somente a partir da década de 60, com os estudos do matemático polonês, naturalizado francês, Benoit Mandelbrot, que os ditos “monstros matemáticos” ganharam destaque e interesse pelos pesquisadores. Em 1975 ele publicou um livro intitulado “Fractal”, palavra derivada do latim *fractus*, cujo verbo *fragere* significa fragmentado, quebrado, descontínuo, complexo, fracionário. É considerado o “Pai” da Geometria Fractal, embora não seja o primeiro a descrever objetos fractais conforme relatos acima. Mandelbrot definiu um fractal que ficou conhecido por “Conjunto de Mandelbrot” a partir de uma sequência de números complexos.

De acordo com Baier (2005, p.119), Mandelbrot é considerado o responsável por caracterizar inicialmente os objetos fractais e demonstrar sua utilidade em diversas aplicações práticas. Um exemplo disso é a análise da sequência de erros na transmissão de dados entre computadores ou linhas telefônicas, em que Mandelbrot buscava representá-los por meio de objetos fractais conhecidos. Ele utilizava essa estratégia de buscar descrever fenômenos ou imagens da natureza por modelos fractais.

Em seu trabalho ele mostra que várias estruturas clássicas definidas por matemáticos anteriores configuram fractais. Entre elas pode se destacar: a curva e a ilha de Koch, o triângulo e o tapete de Sierpinski, a esponja de Menger, a função de Weierstrass, os conjuntos de Cantor e de Lyapunov, as curvas de Peano e de Hilbert, entre outras. Segundo Baier (2005, p.115) Mandelbrot também conceitua e define a dimensão para os objetos fractais, mostrando que tais objetos configuram uma classe diferente daquelas produzidas pela geometria euclidiana.

A partir dos estudos de Mandelbrot, os fractais têm ganhado interesse devido às suas aplicações cada vez mais frequentes como objetos que se revelam de modo natural em várias situações. Por exemplo, a trajetória da dissipação dos raios em linha contínua, o perímetro de certas fronteiras, a superfície de montanhas, formação das nuvens, o formato de células cancerígenas, flocos de neve, entre outros. Portanto, na atualidade a geometria de fractais se encontra em vários campos de estudos, como a medicina, a biologia, a física, a matemática, a arte, a agricultura, as artes plásticas etc.

2.2.2 Caracterização dos fractais

Os fractais são caracterizados pelas seguintes propriedades:

- **Quanto à Autossimilaridade:** É a semelhança que uma parte tem com o todo. Pode ser exata, aproximada ou estatística. Em todos esses casos, mantém-se uma semelhança independente da escala que se observa.
- **Quanto à Complexidade Infinita:** Qualquer que seja a ampliação ou redução do objeto, contendo uma quantidade considerável de iterações, não obterá uma imagem finalizada.
- **Quanto à Irregularidade:** Tem aspecto rugoso ou não suave. Um objeto é fractal se for totalmente rugoso ou fragmentado (não suave).
- **Quanto à dimensão:** fractal é um conjunto para a qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica. Além disso, é comum um fractal ter como dimensão um número não inteiro podendo ser, inclusive, um número irracional. Grosso modo, a dimensão fractal mede o grau de rugosidade do objeto.

2.2.3 Classificação dos Fractais

- **Iterativos ou Linear:** Também conhecidos como fractais determinísticos ou geométricos. Possuem uma regra fixa de substituição geométrica bem definida. Têm autossimilaridade exata, característica marcante e evidente. O fractal é idêntico em diferentes escalas. Como exemplos deste tipo temos o conjunto de Cantor, as curvas de Peano e de Hilbert, o tapete e o triângulo de Sierpinski, o floco de neve e a ilha de Koch, a esponja de Menger, entre outros. Por apresentar uma construção geométrica evidente, esse será o modelo de fractais que será desenvolvido ao longo deste trabalho. Estes também favorecem o desenvolvimento de aulas práticas com alunos por meio de oficinas, palestras, seminários, entre outros. Especificamente, será desenvolvida detalhadamente a construção e o cálculo de perímetros, áreas e volumes, quando couber, dos seguintes fractais: Curva de Peano, Conjunto de Cantor, triângulo e tapete de Sierpinski, floco de Neve e a ilha de Koch e a esponja de Menger.

- **Recursivos ou não linear:** São fractais que não apresentam uma similaridade inteira, sendo que, as cópias aparecem distorcidas e degenerativas.
- **Aleatórios:** Também chamados de fractais naturais ou gerados por processos estocásticos ao invés de processos determinados. São relacionados aos fractais encontrados na natureza, tais como terrenos, costas, plantas, montanhas etc. Não possui autossimilaridade exata, apenas aproximada ou estatística.

2.3 Dimensionalidade

Sabe-se que na geometria euclidiana ou convencional, um ponto tem dimensão zero, uma reta ou curva tem dimensão um, um plano ou superfície tem dimensão dois, um sólido tem dimensão três e assim por diante. Para obter a dimensão fractal de um objeto, será descrito a seguinte construção:

- Tomamos um segmento de comprimento l e o dividimos em m partes iguais. Assim, ficamos com m^1 segmentos de comprimento $\frac{l}{m}$;

• De modo análogo, tomamos um quadrado de lado de medida l . Em seguida, dividimos o lado em m partes iguais. Com isso, ficamos com m^2 quadrados menores de lado mediando $\frac{l}{m}$;

- Da mesma forma, cubo de aresta de medida l sendo dividido em m partes iguais gera m^3 cubos menores de arestas de medida $\frac{l}{m}$;

- Em geral, podemos tomar um hipercubo d -dimensional com aresta de medida l . Dividindo a aresta em m partes iguais, geramos m^d hipercubos de aresta com medida $\frac{l}{m}$.

- Denotando por n a quantidade de peças similares de um objeto (segmento, quadrado, cubo,), segue da construção acima que

$$n = m^d,$$

onde m é fator de redução ou ampliação e d é a dimensão do objeto. Podemos tomar o logaritmo na equação e concluir que a dimensão é igual a:

$$(2.3) \quad d = \frac{\log(n)}{\log(m)}$$

2.4. Modelos de Fractais Iterativos e seu Algoritmo

2.4.1 Conjunto de Cantor

Construção:

O Conjunto de Cantor é construído de acordo com a sequência dos níveis abaixo:

Nível 0: considere um segmento de reta de comprimento l . (nível C 0)

Nível 1: Divide-se o segmento de reta em três segmentos de igual comprimento $\frac{l}{3}$ e apaga o segmento central (nível C1);

Nível 2: Repete o mesmo processo nos dois segmentos restantes, obtendo 4 segmentos de comprimento $\frac{l}{9}$ (nível C2).

Nível 3: Repete-se o mesmo processo em cada um dos 4 segmentos, produzindo 8 segmentos de comprimento $\frac{l}{27}$.

Seguindo essas divisões infinitamente chega se ao conjunto Cantor. Observe que os comprimentos dos segmentos tendem a zero.



Figura 1 - Conjunto de Cantor da 5ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>(2023)

Medida do Conjunto de Cantor

Para a determinação da medida do conjunto de Cantor, obedece ao procedimento descrito abaixo:

Soma dos segmentos retirados em cada nível:

$$\text{Nível 1: } s_1 = \frac{l}{3}$$

$$\text{Nível 2: } s_2 = \frac{2l}{9}$$

$$\text{Nível 3: } s_3 = \frac{4l}{27}$$

$$\text{Nível 4: } s_4 = \frac{8l}{81}$$

Em geral, pode-se escrever a soma infinita S , dos segmentos retirados:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots$$

$$s = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \frac{16}{243} + \dots$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \frac{2^4}{3^5} + \dots$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + \dots \right)$$

$$s = \frac{a1}{1 - q}$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \left(\frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \right)}$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} \right)$$

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} * 2 = 1$$

Tendo em vista que o comprimento dos segmentos retirados é igual a l , então o conjunto Cantor tem “comprimento” zero.

Dimensão: É o quociente entre o logaritmo da quantidade de partes similares e do fator de redução ou ampliação identificado entre os níveis zero e um, conforme equação (2.3). Assim,

$$d = \frac{\log(n)}{\log(m)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0,63$$

2.4.2 Curva de Peano

Construção: Segue de acordo com a descrição dos níveis.

Nível 0: Considere um segmento de reta de comprimento l :

Nível 1: Divida o segmento de reta em três partes iguais. No segmento central, construa um quadrado na parte superior e inferior, obtendo 9 segmentos de comprimento $\frac{l}{3}$.

Nível 2: Repita o processo com cada um dos 9 segmentos de reta para gerar 81 segmentos de comprimento $\frac{l}{9}$.

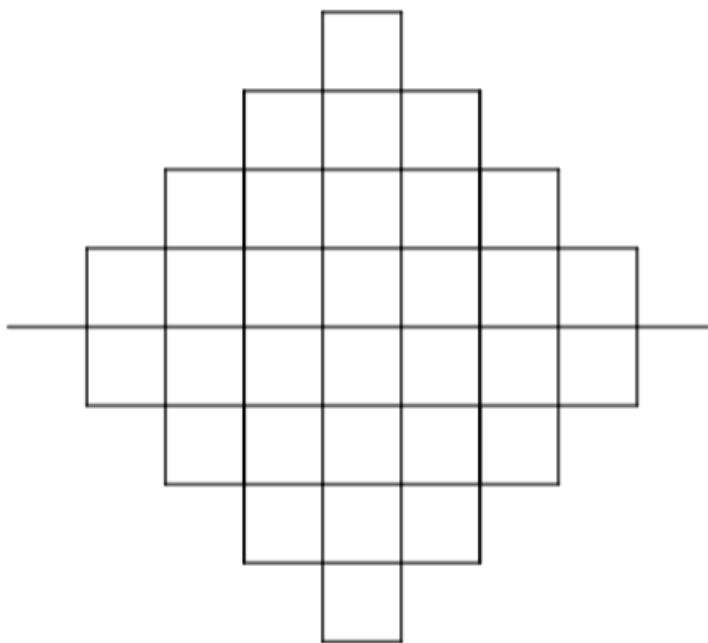


Figura 2 - Curva de Peano na 2ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>,(2023)

Nível 3: Repita o processo com cada um dos 81 segmentos de reta para gerar 729 segmentos de comprimento $\frac{l}{27}$.

Área preenchida pela curva:

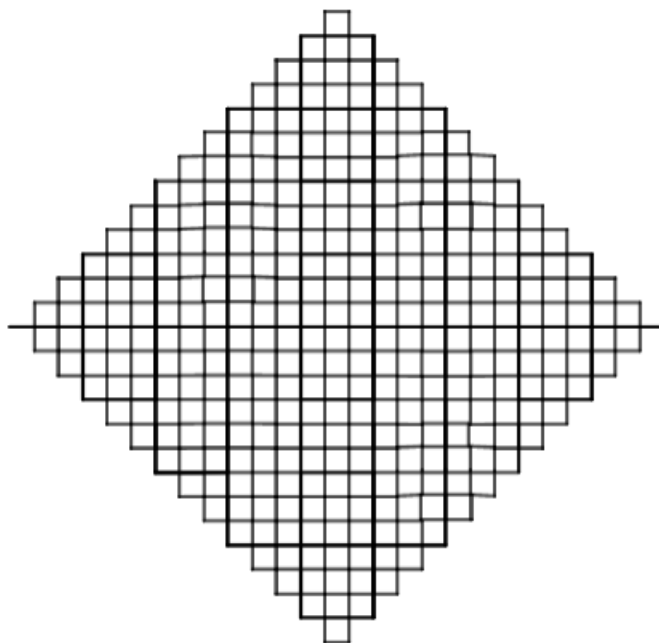


Figura 3 - Curva de Peano na 3ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>, (2023)

O processo se repete nos níveis posteriores.

Dimensão: neste caso tem se $m=3$ e $n=9$. Portanto,

$$d = \frac{\log(n)}{\log(m)} = \frac{\log(9)}{\log(3)} = 2$$

Comprimento da curva:

Tabela 1 - Números de subsegmentos, comprimento e comprimento da Curva

PASSOS	Nº de sub-segmentos	Comprimento de cada sub-segmento	Comprimento da curva
1	$9 = 3^2$	$\frac{1}{3}$	$3^2 \times \frac{1}{3} = \frac{3^2}{3} = 3$
2	$9 \times 9 = 9^2 = 3^4$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$	$3^4 \times \frac{1}{3^2} = \frac{3^4}{3^2} = 3^2$
3	$9 \times 9 \times 9 = 9^3 = 3^6$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^3}$	$3^6 \times \frac{1}{3^3} = \frac{3^6}{3^3} = 3^3$
4	$9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4 = 3^8$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^4}$	$3^8 \times \frac{1}{3^4} = \frac{3^8}{3^4} = 3^4$

2.4.3 Triângulo de Sierpinski

Construção:

Nível 0: Considere um triângulo equilátero de lado de medida l . Isto é a região triangular de lado de medida l .

Nível 1: Tome o ponto médio de cada lado e forme o triângulo com vértices nesses pontos, formando 4 novos triângulos equiláteros de lado com medida $\frac{l}{2}$. Em seguida retire o triângulo central.

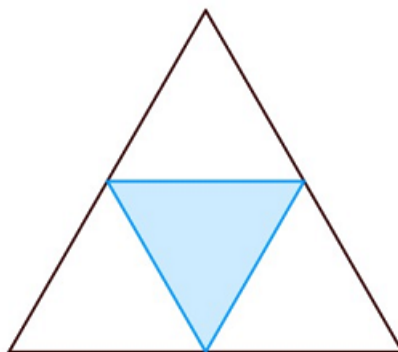


Figura 4 - Triângulo de Sierpinski 1ª iteração

FONTE: [https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s,\(2023\)](https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s,(2023))

Nível 2: Repita o processo para cada um dos 3 triângulos restantes, produzindo 9 triângulos equiláteros de medidas $\frac{l}{4}$.

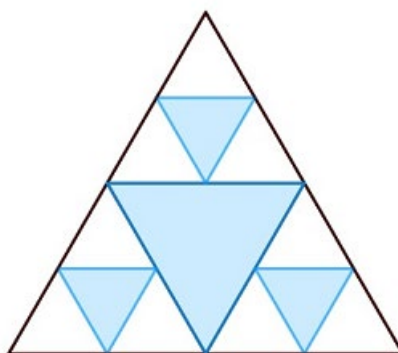


Figura 5 - Triângulo de Sierpinski 2ª iteração

FONTE: [https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s,\(2023\)](https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s,(2023))

Nível 3: Repita o processo para cada um dos 9 triângulos restantes, produzindo 27 triângulos equiláteros de medidas $\frac{l}{8}$.

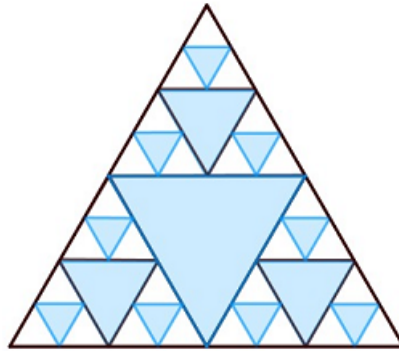


Figura 6 - Triângulo de Sierpinski 3ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>,(2023)

Dimensão: neste caso tem-se $m=2$ e $n=3$. Portanto,

$$d = \frac{\log(n)}{\log(m)} = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,58$$

Área:

$$\text{Nível 0: } \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Nível 1: } \frac{l^2\sqrt{3}}{4} * \frac{3}{4}$$

$$\text{Nível 2: } \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4} * \frac{3}{4}\right) * \frac{9}{12} = \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) * \frac{9}{16} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} * \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\text{Nível 3: } \left[\left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) * \frac{9}{16}\right] * \frac{27}{36} = \left[\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right] * \frac{27}{64} = \left[\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right] * \left(\frac{3}{4}\right)^3$$

$$\text{Nível 4: } \left[\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right] * \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$\text{Nível n: } \left[\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right] * \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\text{Portanto, a área do Fractal é } \left[\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right] * \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left[\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right] \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

Perímetro:

Nível 0: $3l$

Nível 1: $\left(\frac{3L}{2}\right) * 3 = \left(\frac{3}{2}\right) * 3l$

Nível 2: $\left(\frac{3L}{4}\right) * 9 = \frac{27L}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 * 3l$

Nível 3: $\left(\frac{3L}{8}\right) * 27 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 * 3l$

Nível n: $\left(\frac{3}{2}\right)^n * 3l$

Portanto o perímetro é: $3l \left(\frac{3}{2}\right)^n = 3l \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>, acesso em 04/02/2023

2.4.4 Curva de Koch**Construção:**

Nível 0: Considere um segmento de reta de comprimento l .

Nível 1: divida o segmento de reta em três partes iguais e construa um triângulo equilátero tendo como base o segmento central. Em seguida, retire a sua base, de modo que se obtém 4 segmentos de comprimento $\frac{l}{3}$.



Figura 7 - Curva de Koch na 1ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>,(2023)

Nível 2: repita o processo nos 4 segmentos produzindo 16 segmentos de comprimento $\frac{l}{9}$.

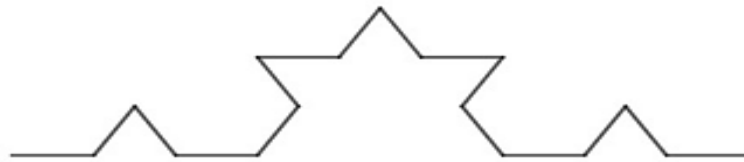


Figura 8 - Curva de Koch na 2ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>,(2023)

Nível 3: repita o processo nos 16 segmentos produzindo 64 segmentos de comprimento $\frac{l}{27}$.



Figura 9 - Curva de Koch na 3ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>,(2023)

Repita o processo para produzir os níveis subsequentes.

Dimensão: neste caso tem-se $m=3$ e $n=4$. Portanto,

$$d = \frac{\log(n)}{\log(m)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1,26$$

Perímetro:

Nível 0: l

Nível 1: $4 * \left(\frac{l}{3}\right)$

$$\text{Nível 2: } 4 * 4 * \left(\frac{L}{9}\right) = \frac{16}{9} * L = \left(\frac{4}{3}\right)^2 * L$$

$$\text{Nível 3: } 16 * 4 * \left(\frac{L}{27}\right) = \frac{64}{27} * L = \left(\frac{4}{3}\right)^3 * L$$

$$\text{Nível n: } \left(\frac{4}{3}\right)^n * L$$

$$\text{Portanto o perímetro é: } \left(\frac{4}{3}\right)^n * L$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>, acesso em 04/02/2023

2.4.5 Ilha de Koch

Construção:

Nível 0: Considere um triângulo equilátero de lado de medida l .

Nível 1: divida cada lado do triângulo em três partes iguais e sobre o segmento médio construa um triângulo equilátero, de modo que três novos triângulo são gerados com lado $\frac{l}{3}$. Em seguida retire as suas bases, formando uma estrela de 6 pontas ou 12 segmentos de reta.

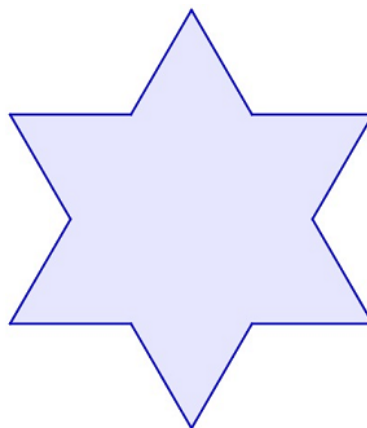


Figura 10 - Ilha de Koch na 1ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>, (2023)

Nível 2: Divida cada lado em três partes iguais e construa um triângulo equilátero de lado $\frac{l}{9}$ sobre o segmento médio. Em seguida retire suas bases, formando uma estrela de 18 pontas ou 48 segmentos de reta.

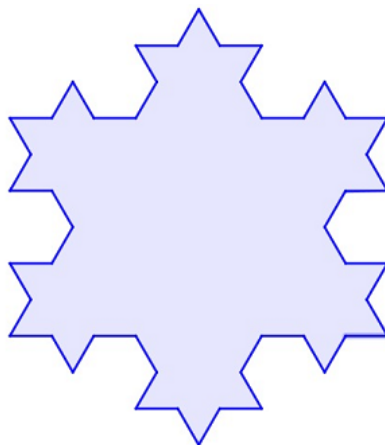


Figura 11 - Ilha de Koch na 2ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>,(2023)

Nível 3. Divida cada lado em três partes iguais e construa um triângulo equilátero de lado $\frac{l}{27}$ sobre o segmento médio. Em seguida retire suas bases, formando uma estrela de 66 pontas ou 192 segmentos de reta.

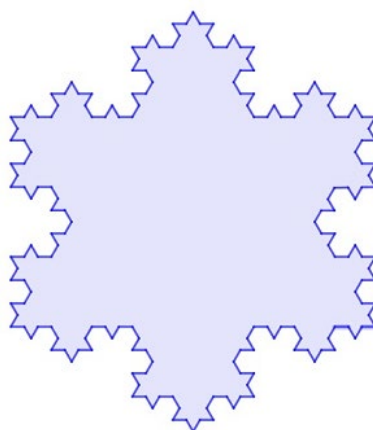


Figura 12 - Ilha de Koch na 3ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>,(2023)

Dimensão: neste caso tem se $m=3$ e $n=4$. Portanto,

$$d = \frac{\log(n)}{\log(m)} = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1,26$$

Área:

$$\text{Nível 0: } \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\text{Nível 1: } \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) + 3 \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Nível 2: } \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) + 3 \left(\frac{l}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} + 12 \left(\frac{l}{9}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{12}{81} \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{4}{3^3} \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\text{Nível 3: } \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} + \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{12}\right) \frac{4}{3^2} + \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{12}\right) \frac{16}{3^4}$$

$$\text{Nível 4: } \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} + \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{12}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{12}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{l^2\sqrt{3}}{12}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \dots$$

$$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^0 + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots$$

$$= \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

$$\text{Onde: } a_1 = \frac{l^2\sqrt{3}}{12} \text{ e } q = \frac{4}{9}$$

$$\text{Soma dos termos da Pg: } \left(\frac{1}{1-q}\right)$$

$$= \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} \left(\frac{1}{1-\frac{4}{9}} \right) = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{l^2\sqrt{3}}{12} \left(\frac{9}{5} \right) \frac{l^2\sqrt{3}}{4} + \frac{9l^2\sqrt{3}}{60} = \frac{24l^2\sqrt{3}}{60} = \frac{2l^2\sqrt{3}}{5}$$

Perímetro:

$$\text{Nível 0: } P = 3l$$

$$\text{Nível 1: } P = 3 \times 4 \times \left(\frac{l}{3} \right) = 12 \times \left(\frac{l}{3} \right) = 4l$$

$$\text{Nível 2: } P = 12 \times 4 \times \left(\frac{l}{9} \right) = 48 \left(\frac{l}{9} \right) = 16 \left(\frac{l}{3} \right) = \frac{4^2}{3} l$$

$$\text{Nível 3: } P_n = 48 \times 4 \times \left(\frac{l}{27} \right) = 4 \times 16 \times \frac{l}{9} = \frac{4^3}{3^2} l$$

$$\text{Nível n: } P = \frac{4^n l}{3^{n-1}} = 4l \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}$$

$$P_n = \infty$$

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>, acesso em 04/02/2023

2.4.6 Tapete de Sierpinski

Construção:

Nível 0: Considere um quadrado de lado l . Isto é a região quadrada de lado de medida l .

Nível 1: Divida cada lado em três partes iguais, produzindo 9 quadrados de lado $\frac{l}{3}$, em seguida retire o quadrado central.

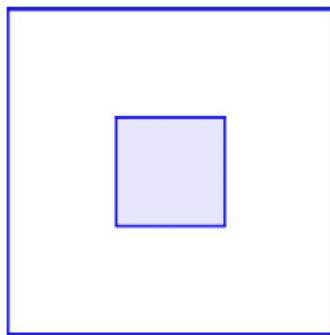


Figura 13 - Tapete de Sierpinski na 1ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>,(2023)

Nível 2: repita o processo com os 8 quadrados restantes, produzindo 64 novos quadrados de medida $\frac{l}{9}$.

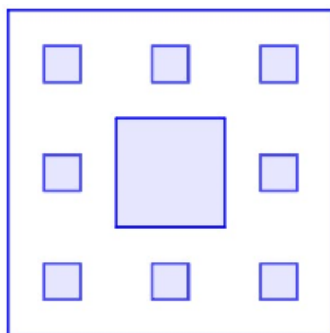


Figura 14 - Tapete de Sierpinski na 2ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>,(2023)

Nível 3: repita o processo, produzindo 512 quadradinhos de medida $\frac{l}{27}$

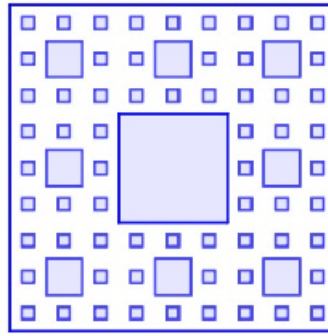


Figura 15 - Tapete de Sierpinski na 3ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>,(2023)

Dimensão: neste caso tem se $m=3$ e $n=8$. Portanto,

$$d = \frac{\log(8)}{\log(3)} \approx 1,89$$

Área:

Nível 0: l^2

Nível 1: $\frac{8}{9} l^2$

Nível 2: $8 \times 8 \times \left(\frac{l}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 l^2$

Nível 3: $8 \times 8 \times 8 \times \left(\frac{l}{27}\right)^2 = 8^3 \times \frac{l^2}{9^3} = \left(\frac{8}{9}\right)^3 l^2$

Nível 4: $8 \times 8 \times 8 \times 8 \left(\frac{l}{81}\right)^2 = 8^4 \times \frac{l^2}{9^4} = \left(\frac{8}{9}\right)^4 l^2$

Nível n: $\left(\frac{8}{9}\right)^n l^2$

Aplicando o limite: $\left(\frac{8}{9}\right)^n l^2$

$$= l^2 \left(\frac{8}{9}\right)^n = l^2 \times 0 = 0$$

Perímetro:

SOMA DOS PERÍMETROS:

Nível 0: $4l$

Nível 1: $4l + \frac{4}{3}l$

Nível 2: $4l + \frac{4}{3}l + 4 \times \frac{8}{3^2}l$

Nível 3: $4l + \frac{4}{3}l + 4 \times \frac{8}{3^2}l + 4 \times 8^2 \frac{l}{3^3}$

Nível 4: $4l + \frac{4}{3}l + 4 \times \frac{8}{3^2}l + 4 \times 8^2 \frac{l}{3^3} + 4 \times 8^3 \frac{l}{3^4}$

Rescrevendo Nível 4: $4l + \frac{4}{3}l + \frac{4}{3}l \times \frac{8}{3} + \frac{4}{3}l \times \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}l \times \left(\frac{8}{3}\right)^3$

Nível n: $4l + \frac{4}{3}l + \frac{4}{3}l \times \frac{8}{3} + \frac{4}{3}l \times \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}l \times \left(\frac{8}{3}\right)^3 + \dots + \frac{4}{3}l \times \left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}$

Fica evidente que a partir do nível 1, figura uma PG de razão $\frac{8}{3}$, tendo o primeiro termo da PG $\frac{4}{3}l$. Como a PG é Divergente, o nível 0 não influencia devido o perímetro ser infinito.

Soma dos termos da PG:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1 - q}$$

$$S_n = \frac{\frac{4}{3}l - \frac{4}{3}l \times \left(\frac{8}{3}\right)^n}{1 - \frac{8}{3}}$$

$$S_n = -\frac{\frac{4}{3}l - \frac{4}{3}l \times \left(\frac{8}{3}\right)^n}{\frac{5}{3}}$$

$$S_n = -\frac{3 \times \left(\frac{4}{3}l - \frac{4}{3}l \times \left(\frac{8}{3}\right)^n\right)}{5}$$

Aplicando limite:

$$-\frac{3 \times \left(\frac{4}{3}l - \frac{4}{3}l \times \left(\frac{8}{3} \right)^n \right)}{5} = \infty$$

Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>, acesso em 04/02/2023

2.4.7 Esponja de Menger

Construção:

Nível 0: considere um cubo de arestas de medida l . Esta é sua região espacial.

Nível 1: divida cada aresta em 3 partes iguais, gerando 27 cubos de aresta $\frac{l}{3}$, em seguida retire os 7 cubos centrais, restando 20 cubos.

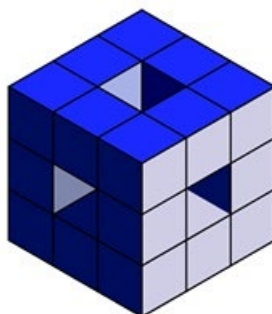


Figura 16 - Esponja de Menger na 1ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>, (2023)

Nível 2: divida cada aresta em 3 partes iguais, gerando 540 cubos de aresta $\frac{l}{9}$, em seguida retire os 140 cubos centrais, restando 400 cubos.

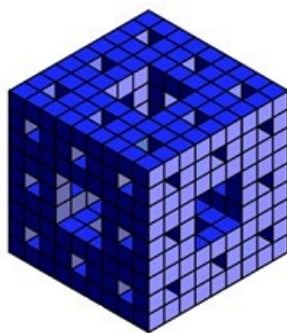


Figura 17 - Esponja de Menger na 2ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>,(2023)

Nível 3: divida cada aresta em 3 partes iguais, gerando 10800 cubos de aresta $\frac{l}{27}$, em seguida retire os 2800 cubos centrais, restando 8000 cubos.

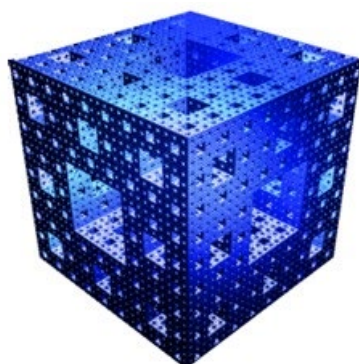


Figura 18 - Esponja de Menger na 3ª iteração

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>,(2023)

Dimensão: neste caso tem se $m=3$ e $n=20$. Portanto,

$$d = \frac{\log(20)}{\log(3)} \approx 2,73$$

Cálculo do volume:

Nível 0 = aresta = 1

Volume retirado= 0

$$\text{Nível 1} = \text{aresta} = \frac{l}{3} = (27 \text{ cubos})$$

$$\text{Volume retirado} = 7 \text{ cubos de aresta } \frac{l}{3} = 7 \frac{l^3}{3^3} = 7 \frac{l^3}{27}$$

$$\text{Nível 2} = \text{arestas} = \frac{l}{9} = (20 \text{ cubos})$$

$$\text{Volume retirado} = 20 \times 7 \text{ cubos de aresta } \frac{l}{9} = 20 \times 7 \times \frac{l^3}{9^3} = \frac{7l^3}{27} \times \frac{20}{27}$$

$$\text{Nível 3: arestas } \frac{l}{27} = (400 \text{ cubos})$$

$$\text{Volume retirado} = 400 \times 7 \text{ cubos de arestas } \frac{l}{27} = 20^2 \times 7 \times \frac{l^3}{27^3} = \frac{7l^3}{27} \times \left(\frac{20}{27}\right)^2$$

$$\text{Nível 4: arestas } \frac{l}{81} = (8000 \text{ cubos})$$

$$\text{Volume retirado: } 8000 \times 7 \text{ cubos de arestas } \frac{l}{81} = 20^3 \times 7 \times \frac{l^3}{81^3} = \frac{7l^3}{27} \times \left(\frac{20}{27}\right)^3$$

$$\text{Nível n: arestas } \frac{l}{3^n} = (20^{n-1} \text{ cubos})$$

$$\text{Volume retirado: } 20^{n-1} \times 7 \times \frac{l^3}{3^{3n}} = 20^{n-1} \times 7 \times \frac{l^3}{27^n} = \frac{7l^3}{27} \times \left(\frac{20^{n-1}}{27^{n-1}}\right) = \frac{7l^3}{27} \times \left(\frac{20}{27}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Volume total retirado: } & \frac{7xl^3}{27} + \frac{7xl^3}{27} \times \frac{20}{27} + \frac{7xl^3}{27} \times \left(\frac{20}{27}\right)^2 + \frac{7xl^3}{27} \times \left(\frac{20}{27}\right)^3 + \dots = \frac{7xl^3}{27} \left(1 + \right. \\ & \left. \frac{20}{27} + \left(\frac{20}{27}\right)^2 + \left(\frac{20}{27}\right)^3 + \dots\right) = \text{um pg de razão } \frac{20}{27} \frac{7xl^3}{27} \left(\frac{1}{1 - \frac{20}{27}}\right) = \frac{7xl^3}{27} \times \left(\frac{27}{7}\right) = \end{aligned}$$

l^3 , Portanto, o volume do fractal é zero

2.5 Método de Box Counting

Para fractais obtidos de forma iterativa, a sua dimensão pode ser calculada pela equação $\frac{\log(n)}{\log(m)}$, onde, n é a quantidade de partes similares produzidas após tomar o fator de redução m entre os níveis zero e 1. No entanto, como proceder para calcular a dimensão de um fractal que não seja iterativo como por exemplo, os fractais naturais? Certamente, a fórmula acima não se aplica nesses casos.

Para fractais da natureza, cuja formação não ocorre de forma iterativa, o método aplicado para determinar a dimensão é conhecido como Método de Box Counting. Ele consiste em colocar uma malha quadriculada sobre o fractal e contar a quantidade de quadrados que contém algum ponto da figura e a quantidade de quadrados na coluna da malha. Em seguida, toma-se uma subdivisão dessa malha e anota os novos valores. Repetindo esse processo, coleciona-se uma grande quantidade de pontos no plano cartesiano em que o eixo horizontal é o logaritmo da quantidade de quadrados com pontos do fractal e o eixo vertical é o logaritmo da quantidade de quadrados na coluna da malha. A dimensão, aproximada do fractal é definida como o coeficiente angular da reta que melhor se ajusta aos pontos marcados.

Mais precisamente, suponha que a malha seja um retângulo de altura l , e cada quadrado tenha lado de medida ε , assim, teremos $\frac{l}{\varepsilon}$ quadrados na coluna da malha. Suponha também que N_{ε_0} seja a quantidade de quadrados que contém algum ponto do fractal. Tomando uma subdivisão dessa malha, encontraremos os novos valores ε_0 e N_{ε_1} . Então, uma dimensão aproximada do fractal será dada por:

$$D = \frac{\log(N_{\varepsilon_1}) - \log(N_{\varepsilon_0})}{\log(\frac{l}{\varepsilon_1}) - \log(\frac{l}{\varepsilon_0})}$$

Tomando-se uma sequência de subdivisões na malha

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \dots < \varepsilon_n < \varepsilon_{n+1} < \dots$$

A dimensão será dada pelo limite $D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(N_{\varepsilon_{n+1}}) - \log(N_{\varepsilon_n})}{\log(\frac{l}{\varepsilon_{n+1}}) - \log(\frac{l}{\varepsilon_n})}$

Aplicando-se o processo descrito acima:

Ao observar o desenho da árvore abaixo descrita, é possível notar a presença de espaços não preenchidos, o que retrata a fragmentação da dimensão desse objeto natural. Essa nova geometria permite a análise utilizando dimensões fracionárias, por ter mais próximas da complexidade dos objetos naturais.

Além disso, a precisão da dimensão fractal depende do tamanho da escala utilizada na análise. Quanto menor for o quadrado utilizado, mais preciso será sua

dimensão. Isso demonstra a importância da escolha da escala para análise de sistemas ambientais, a fim de obter resultados mais precisos.



Figura 19 - Aplicação do Método de Box Counting na árvore

FONTE: Estudante do 3º ano do Ensino Médio

Assim, pode se constatar que o método box counting pode ser utilizado nas estruturas fractais de um modo geral para demonstrar a dimensão fragmentada dos objetos da natureza. Ressalta se ainda que, quanto menor for o comprimento do lado do papel quadriculado, mais precisa será sua dimensão, devido ser inversamente proporcional.

Já se passaram mais de 2000 anos, quando o matemático grego Euclides buscava provar matematicamente que todas as formas da natureza podiam ser reduzidas a formas geométricas simples: cubos, paralelepípedos, pirâmides, circunferências, cones, esferas, entre outros. Diante disso, percebe-se que a natureza torna-se exceção, devido sua forma irregular, complexa, fracionada com evidentes lacunas, sendo viável e consistente aplicação da geometria de fractal. Entretanto, uma observação cuidadosa revela claramente que as formas da natureza podem ser representadas, por aproximação, por entes geométricos descritos pela geometria euclidiana. Montanhas podem ser considerados formas aproximadas de cones, alguns continentes podem ser considerados por aproximação as circunferências, entretanto, com a evolução do conceito de fractal e por consequência a formulação da geometria fractal as formas da natureza podem ser melhor representadas.

Este foi o ponto de partida para Benoit Mandelbrot ao estudar as irregularidades descobrir os fractais na década de 70. Conforme Andrade et al (2020, p.214) os fractais são formas geométricas geradas a partir de fórmulas que retratam matematicamente a geometria da natureza, como o relevo do solo ou as ramificações de nossas veias e artérias do sistema nervoso. Fica evidente que, a Geometria de fractais surgiu da necessidade de definir e descrever alguns dos padrões naturais que a geometria euclidiana não conseguiu caracterizar, tais como, sistema circulatório, renal, pulmonar, detecção de células cancerígenas, montanhas, linhas costeiras, nuvens, raios, trovões, enfim, todo sistema ambiental.

Nessa mesma linha de raciocínio, um sistema físico pode ter um ponto de atração estável significando um ponto que converge em um devido momento e que retorna se sofrer alguma perturbação. Um sistema físico pode também ter um ciclo atrativo estável, ou seja, um círculo ou uma elipse. Os planetas e satélites do sistema solar têm uma estabilidade. Para os sistemas dinâmicos cujos atratores são pontos ou próximos de um ciclo circular ou outro formato euclidiano, são exceções, o comportamento de muitos sistemas dinâmicos é incomparavelmente mais complicado.

Segundo Silva (2022, p.13-14) Henri Poincaré em seus estudos sobre sistemas dinâmicos não lineares, eliminando algumas exceções mais elementares, que comportam os atratores fractais cuja conceituação é importante para a compreensão

da existência de padrões aparentemente aleatórios nesse tipo de sistemas dinâmicos complexos. Destacam-se que os atratores fractais possuem a propriedade de serem autossimilares em diferentes escalas de observação, e que estão intimamente ligados à ideia de caos determinístico. Essas ideias têm sido importantes para a compreensão de fenômenos complexos em diversas áreas, como a física, a biologia e a economia, tais como dinâmica das correntes oceânicas, movimento de partículas em um campo magnético, dinâmica de populações em ecossistemas, formação de estruturas geológicas, entre outros.

A ineficiência (ou incapacidade) da geometria euclidiana em descrever e representar formas naturais, as quais exibem alto nível de complexidade em suas estruturas, foi um dos principais motivos que levou Mandelbrot a apresentar a Geometria Fractal. Diferentemente de uma curva, um plano, ou um sólido que possuem dimensão topológica 1, 2 e 3, respectivamente, os fractais possuem dimensão não inteira, esse é o sentido de *fractus*, “quebrados”, “fragmentados”! Os fractais também apresentam a característica de *auto-similaridade* ou *auto-afinidade*, ou seja, são formas invariantes sob redução de escala (BARABÁSI, 1995).

3. REVISÃO LITERÁRIA

Neste capítulo, é feita revisão da literatura, envolvendo geometria de fractais e suas aplicações na natureza, na educação, na medicina, nas artes etc. Fica evidenciado que a geometria de fractais ainda é um campo de estudo pouco explorado, requisitando uma pesquisa mais apurada em busca de ampliar seus conceitos e aplicações, beneficiando os envolvidos no processo de ensino aprendizagem. A geometria de fractais é um assunto dificilmente abordado em sala, principalmente no Ensino Médio, possuindo escassez de publicações na área de ensino de Física e da própria Matemática. As dissertações e artigos constante neste trabalho foram extraídos do site dos periódicos capes, utilizando palavras chaves como, fractal na educação, metodologia fractais, fractais e a natureza, aplicação de fractais, fractais e meio ambiente, jogos matemáticos e fractais, fractais e software educacional. Os artigos têm relevância na educação, modelagem matemática, utilização de software educacional, criação e aplicação de figuras e jogos matemáticos, como também voltado ao meio ambiente, contendo metodologia e conteúdos contextualizados, dessa forma,

auxiliando a compreensão e aplicação mais concreta e eficaz. São autores renomados e recomendados, alguns, possuidores de uma vasta experiência e pesquisa do tema.

Segundo Andrade et al. (2020, p.214), para aplicabilidade do estudo da geometria de fractais na educação básica, por exemplo, podemos encontrar níveis de integração, aplicações e exemplificação dos conteúdos que se encontram incluídos das ementas de disciplinas da grade curricular do Ensino Médio. Como exemplo, na proposta de integração das disciplinas, utilizando a referência de trabalho realizado pelos estudantes participantes de um projeto que retrata o uso dos conhecimentos relativos à determinação da dimensão fractal aplicada à medicina em exames destinados à detecção de células cancerosas. Nessa linha, os estudantes explicaram sobre a aplicação de fractais, através da análise de imagens geradas por uma tomografia computadorizada. Este exame possibilitou aos médicos uma visualização detalhada da anatomia interna do corpo humano, e por conseguinte, auxiliar no diagnóstico do câncer com a identificação com maior precisão referente ao estágio de evolução da doença. E ainda, os estudantes conseguiram aprofundar em conceitos de biologia sobre a formação de células cancerígenas e nos conceitos da matemática sobre o estudo dos logaritmos.

Das diversas aplicações dos fractais, em algumas ciências, são utilizados para a descrição geométrica de objetos reais que apresentam irregularidades dependentes da escala utilizada na medida. O trabalho de Frozzi (2017, p.22) demonstra que as aplicações da geometria fractal em ciência do solo, têm sido bastante utilizadas como ferramenta descritiva eficiente, pois apresenta características fractais e estruturas auto similares. As propriedades mensuráveis desses objetos devem obedecer a uma função do tipo lei de potência, cujos expoentes estão relacionados pela dimensão fractal dos objetos.

De acordo com Mendonça (2016, p.25) como exemplo de aplicação e para ressaltar que os detalhes da geometria fractal são, por si só, de relevante contribuição, seja no ramo artístico ou na simplificação de formas naturais obtidas com transformações afins e o uso da informática. Além disso, esta contribuição pode ser intensificada quando conectada com a álgebra, para o desenvolvimento das formas didáticas no ensino de matemática para educação básica, para demonstrar as inúmeras

aplicações nas outras áreas da ciência, por exemplo, ondulatória e as interferências na física, ou nas estruturas fractais anatômicos dos seres vivos, do corpo humano.

Conforme Pereira Guilherme (2017, p.51), comparando duas espécies de folhas diferentes e utilizando a técnica de esqueletização, apresentou diversos obstáculos. Apesar disso, a dimensão fractal foi calculada em todos os casos utilizando o método de box-counting de acordo com a figura abaixo:

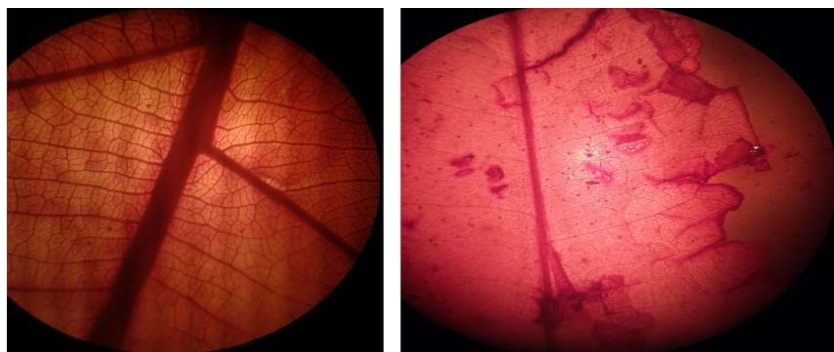


Figura 20 - Folhas de Plantas Nativas

FONTE: Pereira Guilherme, 2017

De acordo com Curvo (2022, p.7-9) e suas considerações sobre a teoria da escala metabólica sugere que as propriedades de uma estrutura composta por n ramificações dependem das propriedades em escalas menores. Essa abordagem é consistente com a autossimilaridade, auto afinidade e auto afinidade estocástica presentes em muitos objetos fractais na natureza. Portanto, a estrutura composta pelas condições, uma rede de ramificação que preenche o volume, o tamanho do pecíolo e da folha não variam, as restrições biomecânicas são uniformes e a energia dissipada no fluxo do fluido é minimizada. As condições mencionadas apresentam características fractais, e a dimensão fractal pode ser determinada por meio de técnicas como o box counting. A estrutura mencionada segue a imagem abaixo:

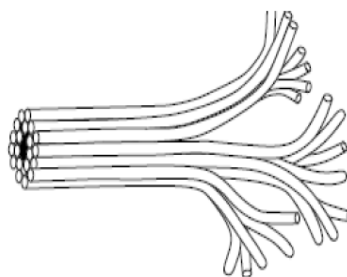


Figura 21 - Rede de ramificações

FONTE: Curvo, 2022

Uma aplicação que caracteriza sistemas ambientais pode ser verificada segundo Moraes (2015, p.32) que utiliza o método Box Counting para estabelecer a dimensão fractal nas espécies abaixo:



Figura 22 - Espécie de Plantas Nativas

FONTE: Moraes, 2015

- a) espécie *Enterolobium contortisiliquum*, b) espécie *Palicourea crocea*.

Para corroborar o método pode-se observar a modelagem executada por Moraes (p.36)

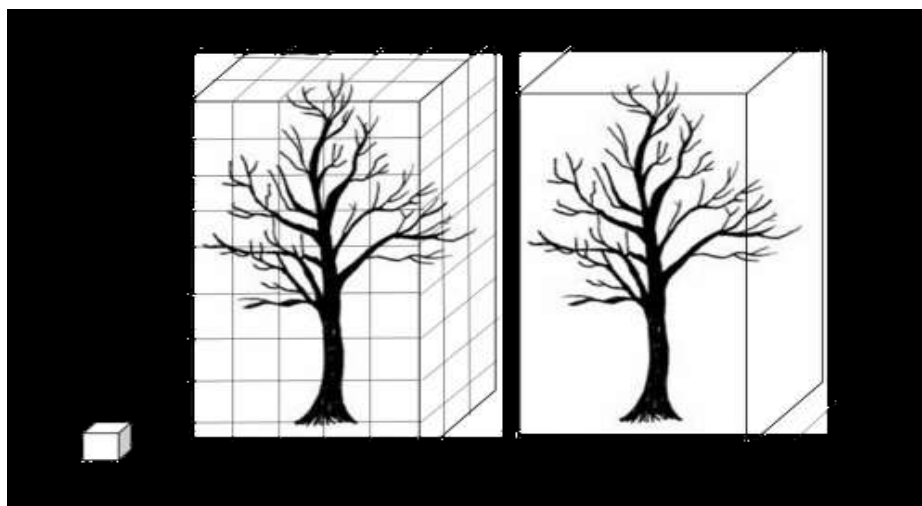


Figura 23 - Volume da planta

FONTE: Moraes, 2015

apresenta a equação que permite uma melhor aproximação na contagem de cubos que interceptam todo o volume da planta, considerando a figura 34, em que o cubo de volume $v\epsilon$ é uma fração do volume total ocupado pela planta. A aresta ϵ representa o

tamanho relativo de cada segmento anteriormente dividido de L , para um cubo com um volume de 1 mm^3 , que é o limite confiável na resolução da medida das plantas.

Dessa forma, a equação $dp = \frac{\log(\frac{vt}{v_e})}{\log(\frac{1}{\epsilon})}$, permite uma melhor aproximação na contagem de cubos que interceptam todo o volume da planta, sendo n o número de cubos necessários para cobrir todo o volume da planta. Essa abordagem pode ser útil em estudos de morfologia e quantificação de plantas, permitindo uma análise mais precisa e detalhada.

Considerando Mota (2017, p.46) dentro da área delimitada para o estudo, foram selecionadas para medição quatro espécies vegetais, a saber: Bacurizeiro (*Platonia insignis*), João Mole (*Neea cf. mollis* Spruce ex J. A. Schmidt), Goiaba Araça (*Eugenia Stipitata* Mcvaugh) e Mucurão (*Gustavia Augusta* - Membrillo).

Segue a sequência das fotos dessas espécies:



Figura 24 - Galho do Bacurizeiro e a direita Amostra foliar
FONTE: Mota, 2017



Figura 25 - Galho do Araçazeiro utilizado na coleta e a direita Amostra foliar

FONTE: Mota, 2017



Figura 26 - Galho do João Mole utilizado na coleta e a direita Amostra foliar

FONTE: Mota, 2017



Figura 27 - Galho do Mucurão utilizado na coleta e a direita Amostra foliar

FONTE: Mota, 2017

De acordo com Mota (2017, p.70-72) em um estudo de quatro espécies de plantas nativas da Amazônia por meio do método Box Counting permitiu a verificação da dimensionalidade, compreensão da geometria fractal e complexidade desses objetos naturais. A partir da sequência decrescente da dimensão fractal, foi possível classificar as espécies como tendo estruturas do tipo fractal, com valores de dimensão variando de acordo com a complexidade da forma. No entanto, é importante ter cuidado na interpretação dos resultados, já que vários valores de dimensão não inteiros podem ser obtidos, o que pode levar a uma escolha arbitrária do resultado. Sendo assim, a interpretação será realizada onde tiver maior número de subdivisões do objeto natural analisado.

Para exemplificar será feito registro da tabela referente a espécie Bacurizeiro em que foi utilizado recurso computacional com o uso do Método Box Counting, as outras espécies tiveram o mesmo tratamento quanto aos cálculos de suas dimensionalidades fractais.

Bacurizeiro - <i>Platonia insignis</i>		
Nº de Caixas	Caixas que interceptam a estrutura	Dimensão Fractal D_f
8	64	2
16	156	1,82
24	268	1,76
32	385	1,71
40	506	1,69

Figura 28 - Parâmetros utilizados no cálculo de dimensionalidade da espécie Bacurizeiro - *Platonia Insignis*

Fonte: Mota, 2017

Um outro aspecto em que é verificada a dimensão fractal em fenômenos da natureza pode ser observado de acordo com Azevedo (2003, p.122-123), em estudos de ecologia da paisagem, é importante considerar os aspectos topográficos que podem influenciar nos resultados dos indicadores utilizados para quantificar os padrões espaciais da vegetação. Nesse sentido, a geomorfologia pode atuar como um regulador natural da variação da dimensão fractal no tempo. As figuras apresentadas:

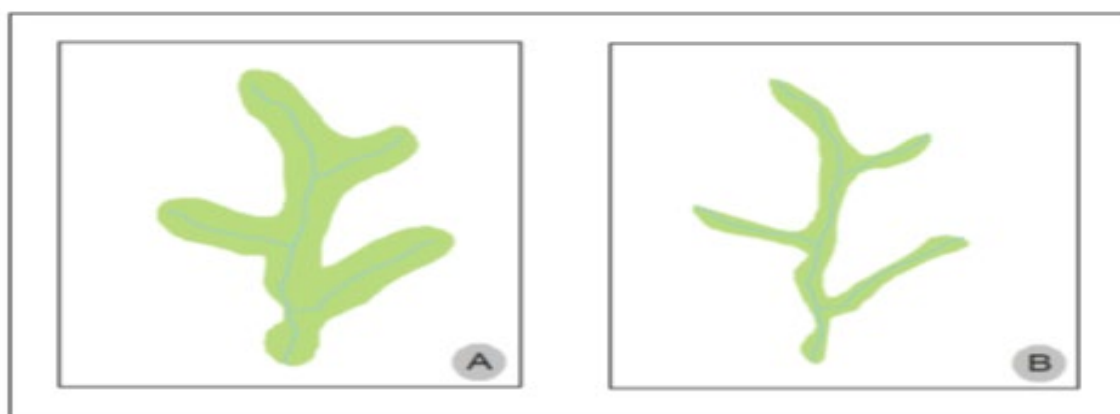


Figura 29 - Similaridade geométrica entre os padrões de mata ciliar original e degradada da bacia do rio Passa Cinco

FONTE: Azevedo, 2003

demonstram que as fisionomias geométricas da cobertura vegetal da mata ciliar são muito semelhantes, mesmo com relativa diminuição na vegetação, indicando a permanência do mesmo padrão de simetria geométrica. Esse comportamento é responsável pela pequena variação dos valores de dimensão fractal em escalas temporais antrópicas, o que reflete grande impacto no ecossistema ripário. A variação geométrica entre as figuras pode ser observada através do coeficiente de variação da dimensão fractal das matas ciliares, discriminadas em unidades geomorfológicas.

De acordo com Azevedo (2003, p.62), o método de Relação Número-Diâmetro (ou "Number-Diameter Relationships") é utilizado para descrever a fragmentação de paisagens por meio de um índice proposto por Milne (1988). Esse método considera que a distância entre a borda e a área central do fragmento pode indicar o grau de

complexidade, permitindo mensurar a forma e a fragmentação do mosaico da paisagem quando a complexidade das bordas e o diâmetro dos fragmentos variam. Nesse nível de compreensão, a dimensão fractal pode indicar o grau de perturbação do mosaico da paisagem.

Segundo Negri (2014, p.51-53) afirma que o uso da geometria fractal em diversas áreas resulta em avanços significativos na compreensão de formas complexas da natureza que possuem características auto semelhantes. Os fractais presentes na natureza possuem autossemelhanças estatísticas e uma estrutura limitada. A dimensão desses objetos é medida através de um método denominado "contagem de quadrados" ou "contagem de caixa". Para calcular a dimensão de um objeto utilizando essa técnica, é necessário escolher um tamanho para o lado do quadrado e contar quantos quadrados da retícula foram necessários para cobrir todo o objeto. À medida que o tamanho dos lados dos quadrados é diminuído, o número de quadrados aumenta. O método é útil para calcular a dimensão de fractais naturais e pode ser aplicado em diversas áreas, como na análise de fenômenos e na otimização de tecnologias. No caso em tela as figuras abaixo mostram o cálculo da dimensão do leito de um trecho de um rio.

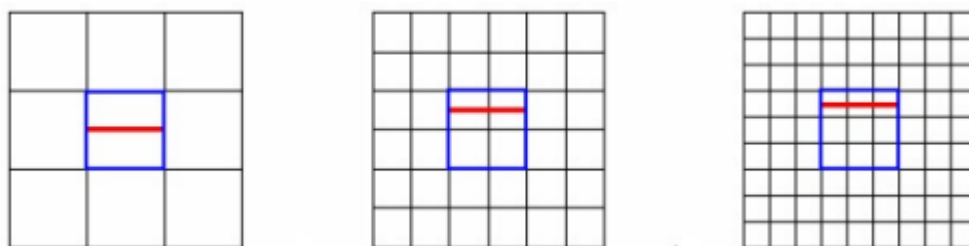


Figura 30 - Contagem de quadrados para determinar a dimensão fractal

FONTE: Negri, 2014

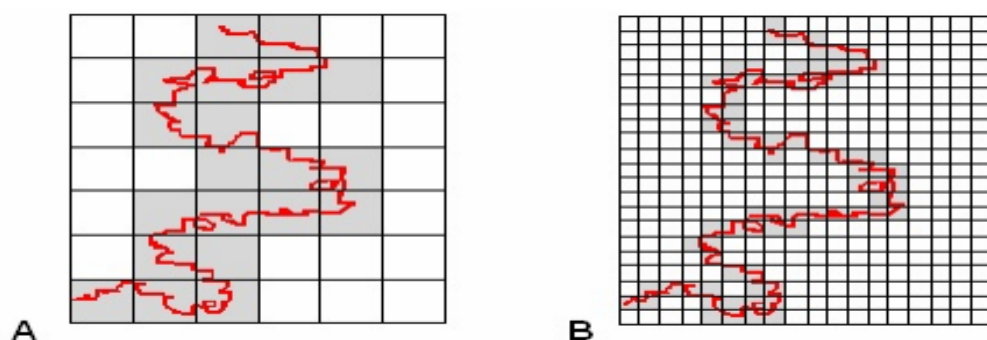


Figura 31 - Cálculo da dimensão fractal no trecho de um rio

FONTE: Negri, 2014

De acordo com Ferreira Filho (2015 p.62-63) destaca a existência de vários métodos de estimativa da dimensão fractal de objetos ou imagens, mas ressalta que nem todos podem ser aplicados a qualquer tipo de estrutura. A maioria desses métodos se baseia na Dimensão de Hausdorff, mas o método adotado é o Box-Counting, também conhecido como contagem de caixas, que consiste em contar os quadrados que envolvem o objeto fractal.

Ferreira Filho (2015, p.64-66) utiliza o método de contagem de caixa exemplificando uma planta com folhas estatisticamente semelhantes. Como a planta não é um fractal matemático exato, mas um fractal natural, é necessário utilizar o método de contagem de caixa. Para estimar a dimensão da planta, é utilizado um quadrilátero formado por quadrados de 64 unidades. O cálculo da dimensão é realizado utilizando a fórmula $D = \log n / \log m$, onde n é o número de quadrados necessários para cobrir a imagem e m é o tamanho dos quadrados utilizados. Explica que para contar os quadrados e estimar a dimensão de um objeto, é necessário inserir a imagem do objeto em um quadrilátero formado por quadrados de lados iguais a s . Em seguida, um novo tamanho s é escolhido para os lados dos "quadrinhos" e é contado o número de quadrinhos necessários para cobrir todo o objeto.



Figura 32 - Planta Renda Portuguesa

FONTE: Ferreira Filho, 2015

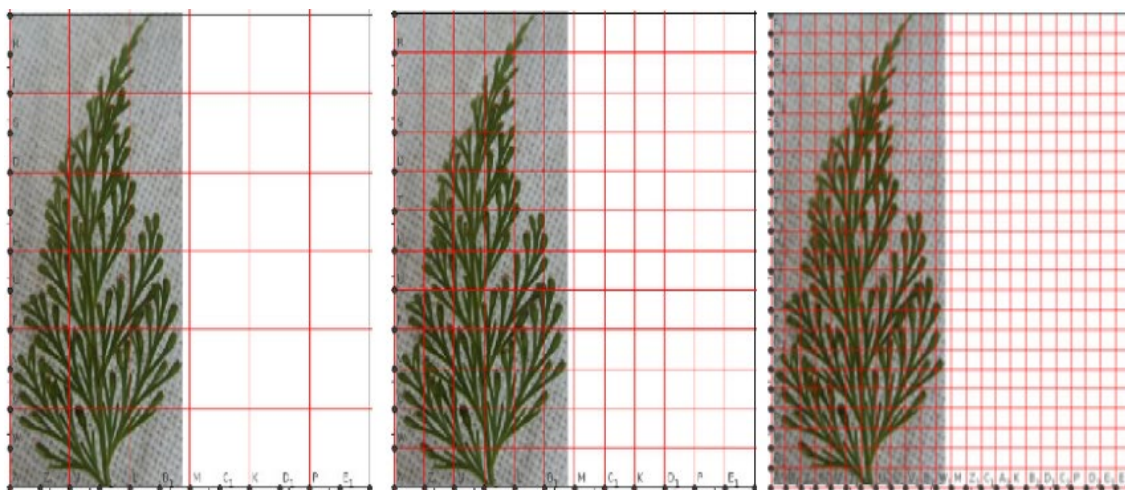


Figura 33 - Planta Renda Portuguesa na malha quadriculada

FONTE: Ferreira Filho, 2015

O autor considera o método Box-counting associado a regressão linear, tal regressão é realizada computacionalmente pelo Geogebra. A regressão linear é uma análise estatística utilizada para identificar uma relação entre variáveis dependentes (X) e independentes (Y), com o objetivo de obter uma equação que explique a variação dessas variáveis. Para estabelecer a equação, é possível fazer um gráfico de dispersão com os pontos correspondentes aos pares (x, y) para observar o comportamento dos valores da variável dependente em relação à variação da variável independente. Com

base nesses valores, é traçada uma reta que melhor represente a verdadeira relação entre as variáveis. Ao final do processo a reta determinada traz a dimensão manifesta pelo coeficiente angular dela.

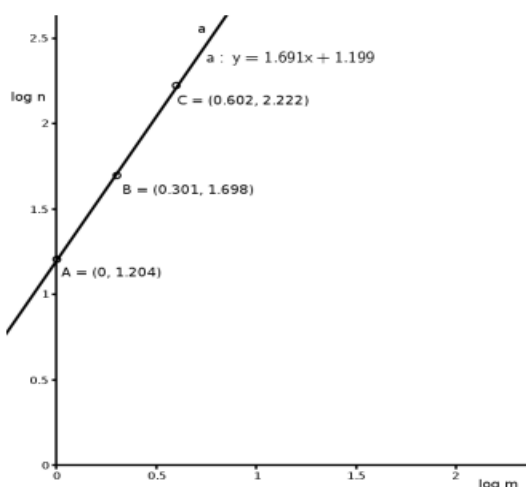


Figura 34 - Processo de Regressão Linear

FONTE: Ferreira Filho, 2015

Dessa forma, o estudo e aplicação dos fractais possibilita ser uma metodologia de intervenção em sala eficiente e abrangente, a partir da aplicação de um questionário prévio e de avaliação, com o objetivo de verificar o conhecimento dos estudantes acerca do assunto a ser tratado na unidade didática sobre fractais com referencial inerentemente matemático. Conforme Alves et al. (2017, p.214-215) as intervenções poderão ser realizadas em diversas disciplinas, por exemplo, nas aulas de Física pode ser discutidos conceitos e exemplos de sistemas dinâmicos fractais e autossimilaridade, e realizar atividades práticas. A modelagem de sistemas dinâmicos admite em sua caracterização o uso da Geometria dos Fractais, nas aulas combinadas de Matemática e Física, possibilitando integração de atividades docente e atuação destacada dos discentes.

Já para Brisante (2013, p.36), não se deve dar muita importância às construções geométricas com régua e compasso dos fractais, pois perde-se muito tempo com essas atividades e, conseqüentemente, o interesse por outras questões mais importantes tende a diminuir, pois, a prática pedagógica proposta atualmente para o ensino da Matemática procura aproximar cada vez mais os fundamentos teóricos da realidade do

estudante, relacionando, para isso, conhecimentos experimental a aspectos observados no mundo em que vivem para construção do conhecimento.

De acordo com Cortês e Antunes (2014, p.41), com um estudo sistemático utilizando teoria e a prática no ensino médio para o ensino de fractal, por exemplo, da “Ilha de Koch” (que apresenta perímetro infinito e área finita), demonstra que existe motivação da curiosidade dos alunos que surge naturalmente. Percebe se que a construção e estudo do comportamento do fractal pode ser uma estratégia pedagógica para consolidar conhecimentos já adquiridos envolvendo fórmulas algébricas, tais como, áreas e perímetros, assim como o cálculo de segmentos. Diante disso, através das atividades realizadas na pesquisa, os alunos não só identificaram e conheceram as construções geométricas fractais como também puderam reforçar a construção conceitual da geometria fractal, em relação as iterações e autossimilaridade, e também os conceitos de progressão geométrica, entre outros.

Nesse sentido, a BNCC contempla esse direcionamento, apontado na presente proposta de pesquisa, ou seja:

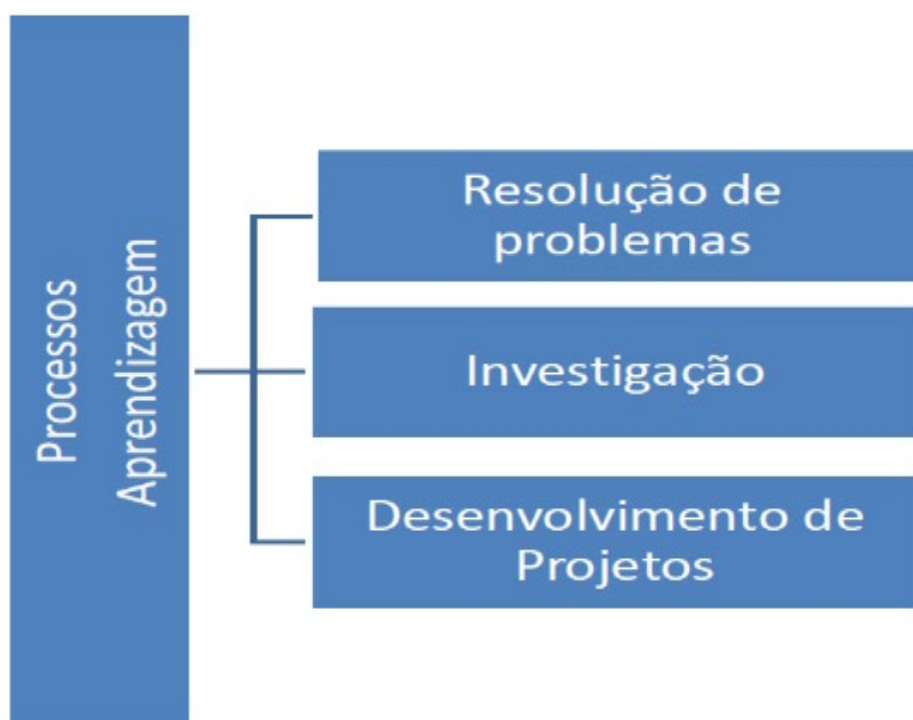


Figura 35 - Processos de aprendizagem

FONTE: BNCC (BRASIL, 2019)

A figura que ilustra uma estrutura de ensino e aprendizagem centrada no estudante, composta por três segmentos principais: resolução de problemas,

investigação e desenvolvimento de projetos. Cada segmento exige habilidades e conhecimentos específicos, sendo que todos estão interligados e se apoiam mutuamente no processo de aprendizagem. Resolução de problemas requer habilidades para encontrar soluções, investigação busca entendimento mais profundo e criação de projetos envolve produção de produtos concretos.

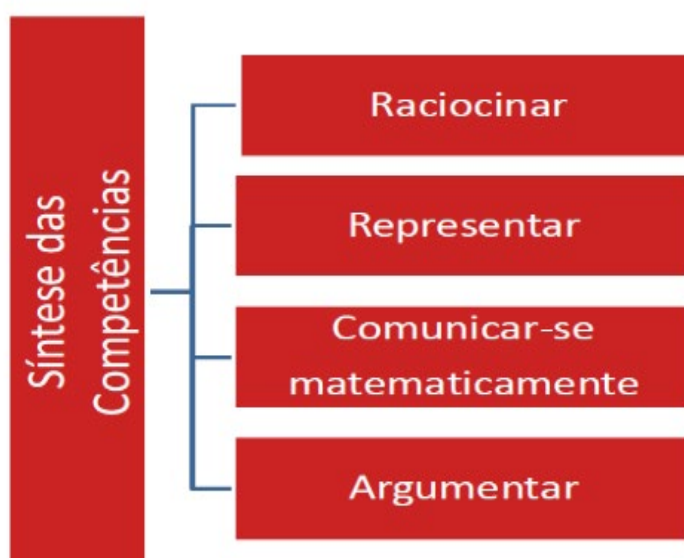


Figura 36 - Síntese das competências

FONTE: BNCC (BRASIL, 2019).

A figura descreve a estrutura de competências matemáticas, que se divide em três segmentos: raciocinar, representar e comunicar-se matematicamente, além de argumentar. Cada segmento exige habilidades específicas, como a aplicação de estratégias lógicas para resolver problemas, a tradução de informações em símbolos matemáticos e a capacidade de expressar ideias de forma clara e coerente, seja oralmente ou por escrito. O argumento matemático envolve a capacidade de justificar e explicar conclusões matemáticas usando evidências e raciocínio lógico. Esses segmentos são interconectados e se complementam, proporcionando ao estudante uma formação completa e adequada para atender às demandas do mundo real.

Como interação junto aos estudantes do ensino médio da escola já citada na presente pesquisa. As ideias matemáticas estão validadas na determinação da BNCC, (BRASIL, 2019), a saber:

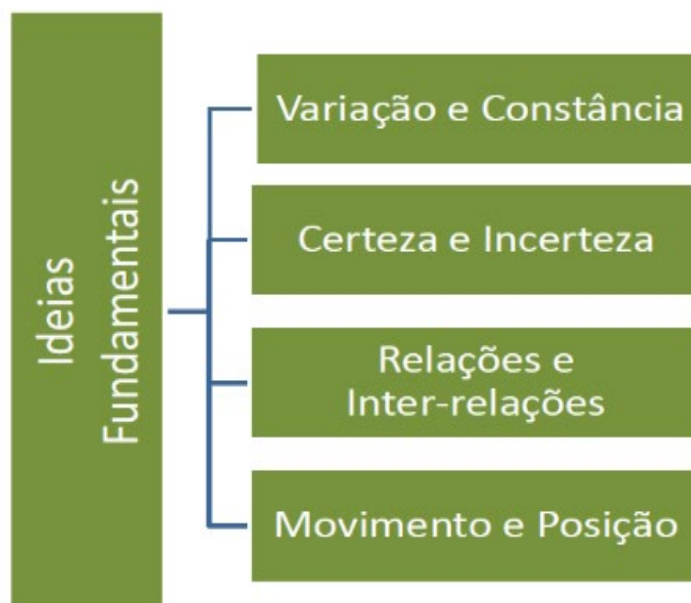


Figura 37 - Ideias Fundamentais

FONTE: BNCC (BRASIL, 2019)

A figura apresenta uma estrutura de ideias fundamentais, que é composta por quatro segmentos principais: variação e constância, certeza e incerteza, relações e inter-relações e movimento e posição. Cada segmento visa ampliar a compreensão da matemática e de sua aplicação no mundo real. A variação e constância aborda propriedades matemáticas que permanecem inalteradas mesmo quando outras mudam. A certeza e incerteza busca entender as limitações e imprecisões presentes na matemática. As relações e inter-relações mostram como as propriedades matemáticas estão interconectadas. O movimento e a posição envolvem a compreensão do espaço e da geometria. Esses quatro segmentos estão interconectados e se complementam para uma compreensão mais abrangente da matemática.

Na tabela a seguir, apresenta-se uma síntese de artigos e dissertações que se destacam e referenciam a abordagem da geometria fractal na educação básica.

Tabela 2 - Dissertações e artigos, utilizando Geometria de Fractais

Referência	Título	Objetivos	Referencial teórico em ensino	Participantes	Instrumentos de coleta de dados	Resultados	Observações pessoais
MENDONÇA (2016) UFA	Aplicações da geometria fractal: uma proposta didática para o Ensino Médio	Dissertação tem como objetivo geral propor a aplicação de atividades envolvendo o a Geometria fractal para estudantes do Ensino Médio como subsídios na compreensão e aplicação utilizando sua realidade.	Consiste fundamentalmente de oficinas a serem realizadas a partir da divisão das turmas em grupos, de forma a dinamizar as atividades e estimular a criação coletiva. Após conceituar os fractais, apresentando a história deles e os exemplos clássicos e experimentais consagrados, foram elaboradas quatro oficinas, totalizando doze atividades, nas quais os alunos, divididos em grupos, poderão utilizar habilidades geométricas (principalmente), algébricas, aritméticas e trigonométricas, para compreensão das propriedades da geometria fractal	Propõe-se ao docente a introdução das ideias de limite e de recorrência, estritamente ligadas aos fractais e que auxiliarão na resolução dos problemas.	foram elaboradas quatro oficinas, totalizando doze atividades, nas quais os alunos, divididos em grupos, poderão utilizar habilidades geométricas (principalmente), algébricas, aritméticas e trigonométricas, para compreensão das propriedades da geometria fractal	no presente estudo e conforme consta também no anexo, o mundo em que vivemos está estritamente ligado à Geometria Fractal, que podemos aceitar como a geometria da natureza, dada a complexidade das formas naturais e a consequente impossibilidade da geometria euclidiana em representar satisfatoriamente todas as suas rugosidades e complexidade.	Dissertação, bem detalhada, explanando cada estudo dos matemáticos da época em buscar entender e explicada cada item que compõe a geometria de fractal. Trabalhou mais a geometria de fractal iterativa. A forma de construir oficinas com os alunos enriquece os pré conhecimentos que eles já possuem e fica mais eficaz a compreensão e visualização do que é a geometria de fractal e a diferenciação com a euclidiana.

BRISANTE (2013) UNESP	Fractais no Ensino Médio	A proposta deste trabalho é oferecer algumas atividades para desenvolviment o em sala com alunos de educação básica, envolvendo os fractais geométricos, sendo estímulos para uma aula, mas completa, contextualizada, dinâmica, compreensiva e prazerosa. Aumentar o índice de participação e interação, buscando maior relacionamento entre a aprendizagem em sala e sua realidade	A caracterização dessas figuras é feita através de duas de suas principais características: a autossimilaridade e a dimensão não necessariamente inteira, que possibilita a abordagem de temas como sequências numéricas e noções de limites com alunos de ensino médio. Atividades também podem ser utilizadas como complemento às aulas de progressões aritméticas e geométricas, logaritmos e área de triângulos equiláteros.	Dentro dessa perspectiva, foram realizadas as atividades propostas neste trabalho com alunos da primeira e da segunda série do Ensino Médio, da “Escola de Educação Infantil, Fundamental e Médio Carlos Chagas Filho”, em aulas suplementares ao horário regular.	são apresentadas atividades envolvendo alguns dos fractais mais conhecidos que podem ser realizadas com alunos do Ensino Médio, utilizando-se apenas material de uso diário, como régua, papel, lápis e borracha ou, caso a escola disponibilize, computadores para todos, fazendo uso de programas de geometria dinâmica como o Geogebra, por exemplo. Essa experiência com os alunos induz a que sejam feitas algumas alterações na proposta inicial deste trabalho:37 1- As etapas das atividades que solicitavam o desenho de mais algumas iterações dos fractais se mostraram muito cansativas, teria sido mais interessante o uso de um software que facilitasse o desenvolviment o e conclusão. Ainda assim, o momento se tornou oportuno para a verificação da impossibilidade real de construção de tais figuras. 2- Havia uma expectativa de que dois encontros de três horas/aulas fossem adequados à realização de todas as atividades, porém esse	Por fim, destaca-se que o trabalho com os estudantes deixou claro que não se deve dar muita importância às construções geométricas com régua e compasso, pois perde-se muito tempo com essas atividades e, consequentemente, o interesse por outras questões mais importantes diminui.	Quando os trabalhos iniciaram com as construções geométricas em sala sem recurso computacional, trouxe um pouco de desinteresse nos alunos, devido ao enorme trabalho e pouco resultado e percepção do conteúdo, compreendendo o que é autossimilaridade e dimensão, na maioria das vezes complexa.
---	---------------------------------	---	---	---	---	---	--

					tempo não foi suficiente para cumprir o proposto. A prática mostrou que são necessários dois encontros (de três horas/aulas) para cada uma das atividades 2, 3, 4.		
ANTUNES E CÔRTEZ (2014) Sociedade Brasileira de Matemática	Geometria fractal no ensino médio: teoria e prática	Objetivo utilizar a Geometria Fractal no Ensino Médio regular, onde se pode trabalhar alguns conceitos matemáticos em suas diversas áreas, tais como álgebra, cálculo, geometria plana e espacial, progressões e logaritmo de maneira diferente da convencional. Dessa forma, pretende-se reforçar a ideia atual da necessidade de experimentar a Matemática por caminhos diferentes para além da resolução de exercícios repetitivo.	um breve resumo sobre o surgimento e as aplicações nas ciências e tecnologias da Geometria Fractal, mostrando que existem diversas áreas que utilizam esta geometria para a solução de seus problemas, tentando dessa forma despertar não só no aluno, mas também no nosso colega professor, o interesse em aplicar esses conhecimentos na sua sala, tornando as mesmas mais dinâmicas e atraentes	As atividades descritas foram realizadas durante o Programa de Iniciação Científica da Escola SESC de Ensino Médio. No ano de 2013, o projeto foi desenvolvido com um grupo de três alunos, sendo dois do segundo e um do primeiro ano do ensino médio no período de Maio a Outubro, com culminância na semana de 28 de outubro a 1 de novembro de 2013, período em que ocorre a semana da Escola aberta, onde a instituição apresenta os trabalhos realizados pelos seus alunos no decorrer do ano para toda a comunidade escolar e instituições convidadas.	Desenvolvimento na forma de projeto tendo como clientela alunos do 1º e 2º anos do ensino médio. O projeto foi desenvolvido de Maio a Outubro de 2013, tendo culminância na semana de 28 de Outubro a 1º de Novembro, tendo apresentações dos trabalhos confeccionados pelos alunos e explanação do que compreenderam acerca do assunto proposto.	Através da construção dos fractais (manual ou eletronicamente), cativar o interesse dos alunos para a aplicação também dos conceitos teóricos e não apenas da prática. Com a finalização do prazo das pesquisas e desenvolvimento, os alunos prepararam a apresentação do trabalho para ser divulgado na semana da Escola Aberta, onde realizaram a apresentação do que haviam aprendido durante as semanas de realização do projeto	A participação dos três alunos do Projeto de Iniciação científica da escola Sesc foi muito proveitosa e gratificante. Eles já vieram com conhecimento definido da geometria euclidiana, tornando mais eficaz a introdução e diferenciação da geometria euclidiana para a geometria de fractal, voltado a auto semelhança e a dimensão fractal. A participação foi coesa, mostrando interesse satisfatório em participar, também construir e entender o significado, principalmente da construção da Ilha de Koch, onde viram a rugosidade da figura, compreendendo o Porquê o perímetro é infinito e a área finita.

ANDRADE, MENDE MESSIAS (2020) UPE RIAEE	Análise de um projeto pedagógico: fractal e teoria do caos para integração de conteúdos	O presente artigo vem para possibilitar a integração dos conteúdos foi utilizado como eixo integrador do estudo dos Fractais e da Teoria do Caos.	Foi desenvolvido um projeto integrador, onde teve união de professores das áreas de ciências naturais e matemática. Foi utilizado tema gerador para ser o eixo de aprendizagem. A ideia assemelha a do Autor Paulo Feire, que cria tema geradores para alavancar conteúdos em busca de ampliação e compreensão do aprendizado proposto	O referido projeto foi elaborado pelos professores da área de Ciências Naturais e Exatas da Escola Nossa Senhora do Santíssimo Sacramento (Sacramentinas), localizada em Senhor do Bonfim, no interior da Bahia, e tem como objetivo principal possibilitar a aprendizagem significativa por meio de eixos temáticos integradores para conduzir essa pesquisa utilizou-se a seguinte questão norteadora: “Como se deu o desenvolvimento das práticas interdisciplinares no projeto e de que forma a mesma contribuiu para a contextualização do ensino, tomando-o significativo?”	Sendo assim, a entrevista realizou-se de forma individual com os docentes para efeito de melhor compreensão sobre o processo de aplicação do projeto interdisciplinar em questão na Escola-alvo. As atividades tiveram registro no período de 07 a 20 de maio de 2018. A entrevista, composta por 10 questões, articulou-se com perguntas “abertas” gravadas em áudio. Visando garantir o sigilo na pesquisa, os entrevistados foram nomeados como P1, P2, P3, P4 e P5.	Como resultados da pesquisa, a partir das entrevistas realizadas pelos professores, emergiram três categorias para discussão. Após análise dos resultados, considera-se que, embora seja desafiador trabalhar a integração das disciplinas, faz-se necessário assumir essa postura na prática docente, visto que possibilitará ao educando o desenvolvimento de competências capazes de responder às crises que a contemporaneidade estabelece.	Dissertação tem como objetivo geral a interdisciplinaridade como fator de ampliação do conhecimento e fixação de ensino aprendizagem. Quando se une vários professores, buscando a interdisciplinaridade, torna-se um pouco complexo o trabalho, pois são vários saberes e também posicionamento diferentes acerca dos conteúdos, gerando divergência na conclusão e também na aplicação em equipe. A contextualização de conteúdos focando diferentes áreas do conhecimento está sendo o grande entrave na educação, mas que precisa ser superado.
---	--	--	---	--	--	--	--

ALVES, MENESSES E NOGUEIRA (2021) LATIN AMERICAN: Journal of Development	Introduzindo a geometria fractal no ensino médio: uma abordagem baseada nas formas dos objetos construídos pela natureza	O objetivo geral desse trabalho foi propor e analisar estratégias didáticas para ensinar a geometria fractal, no ensino fundamental e médio, a partir da observação dos objetos e fenômenos naturais e criados pelo homem	Na intervenção didática, durante o Ciclo da Experiência, foram realizados seis experimentos didáticos. É descrito neste texto somente um experimento didático. Outros experimentos didáticos. O que estamos interessados aqui é mostrar como analisar um experimento a luz do CEK e, portanto, a análise de um único experimento atende a nossa proposta.	Os participantes foram alunos do 3º ano do ensino médio, consistindo em observar o entorno da escola, dentro e fora de sala de aula, os elementos da natureza e qual tem o enquadramento geométrico.	Como mencionado anteriormente, as informações foram coletadas através de dois instrumentos: o questionário diagnóstico e os registros dos consensos dos três alunos durante a aplicação das atividades.	Os resultados obtidos sugerem que os estudantes ampliaram seus construtos pessoais em função da intervenção didática proposta e que é possível introduzir no ensino médio a geometria fractal.	O trabalho usou a realidade em que os alunos estão inseridos e também fez a comparação do que eles tinham em torno da escola, tanto dentro como fora dela, para associar com a geometria euclidiana. Isso enriquece o conhecimento, faz com eles perceba e compreendem com maior facilidade de fixação daqueles conteúdos propostos.
--	--	---	---	--	---	--	--

VARGAS et al. (2014) XX EREMAT	Aprendendo matemática através de fractais: uma experiência no ensino médio	Este trabalho apresenta o relato de uma proposta de ensino utilizando a Geometria Fractal, tendo como principais objetivos a motivação dos alunos em estudar matemática e obter uma aprendizagem significativa dos conceitos trabalhados. O polonês Benoit Mandelbrot (1983) difundiu os estudos e nomeou essa geometria, conceituando fractais como uma figura que pode ser quebrada em diversos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo.	O Polonês Benoit Mandelbrot (1983) difundiu os estudos e nomeou essa geometria, conceituando fractais como uma figura que pode ser quebrada em diversos pedaços, sendo cada um desses pedaços uma reprodução do todo. A utilização dos fractais proporciona ao aluno uma percepção dos elementos da matemática ao seu cotidiano, nessa experiência exploraram-se os conteúdos de sequências numéricas, progressões geométricas e cálculos de área. Foi aplicada uma oficina em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio do Instituto Federal Farroupilha – Câmpus Alegrete.	A oficina foi ministrada em uma turma de 3º ano do Ensino Médio do Instituto Federal Farroupilha – Câmpus Alegrete, no segundo semestre de 2014.	A oficina foi desenvolvida com os alunos, utilizando o tempo de 1 hora e 40 minutos, sendo organizada da seguinte forma: Primeiro momento: Foi realizada uma pesquisa qualitativa a fim de avaliar os conhecimentos prévios dos alunos em questão, com o intuito de despertar a curiosidade sobre os assuntos matemáticos (Anexo I); Segundo momento: Foi feita uma síntese do assunto a ser trabalhado, utilizando recurso digital (SLIDE); Terceiro momento: Uma breve revisão dos conceitos de potências, progressão geométrica, áreas de triângulos;	Fazendo uma análise na questão três, foi questionado como eles próprios caracterizam o rendimento da aula, a partir das respostas dos 23 alunos, construiu-se um gráfico para verificar o resultado, como mostra a Fig. 5. Sendo assim, foi interessante realizar uma aproximação deste tema com a realidade do aluno, de modo que este perceba que a matemática está presente no seu dia-a-dia, sendo possível ressaltar que quando há a contextualização das atividades envolvendo a realidade, obtém-se um aluno mais interessado e participativo.	A aplicação do teste e pré teste, foram positivos, fazendo com que os alunos, observassem e compreendessem a diferença entre a geometria Euclidiana e a geometria de fractal, relacionando a Dimensão fracionado ou não, autossimilaridade, rugosidade, dentre outros. Ampliou os conhecimentos da geometria de fractal, para muitos uma geometria desconhecida, pouco explorada e com um gama de conhecimento que pode ser aplicado nas diferentes ciências do conhecimento.
---	---	--	---	---	---	--	--

MIRANDA et al. (2008) UFBA Revista Brasileira de Ensino de Física	Geometria de fractal: propriedades e característica de fractais ideais	O objetivo do trabalho foi trazer aos leitores casos simples, mas ilustrativos, que mostram como diversos objetos autosimilares só podem ser adequadamente em espaços de dimensão fracionada.	Através de cálculo de comprimento, área e volume, ficou claro, essas medidas podendo divergir ou se anular identicamente quando sua dimensão é respectivamente maior ou menor do que aquela dimensão euclidiana escolhida.	O artigo não relata participantes, mas traz uma linguagem apropriada para a compreensão da Geometria de Fractais e algumas aplicações	Foram mostrados aos passos de cada construção fractal, em forma de figuras tanto na forma geométrica quanto na forma algébrica.	Apresentar ao leitor a aplicação da geometria fractal, nas figuras trabalhadas, ressaltando a autossimilaridade, dimensão fracionada e resultados mais próximos da realidade	Foi detalhada em passos a construção de cada figura fractal citada, mostrando a autossimilaridade, dimensão fracionada, rugosidade. Ficou explícitos a diferença entre a geometria euclidiana com a geometria de fractal. Vale salientar que, a metodologia usada é bem simples para a compreensão dos alunos que na maioria das vezes não ouviram falar sobre o assunto abordado
---	--	---	--	---	---	--	---

SOUZA E LEIVAS (2018) UFN Revista Thema	Explorando a geometria fractal no ensino médio por meio de uma oficina pedagógica	Introdução da geometria de fractal no 3º ano do ensino médio, por meio de oficina pedagógica, para explorar, identificar, construir, reconhecer características fractais no meio ambiente.	Trabalhou oficinas, utilizando as características euclidiana versus fractais, para explicar sobre as estruturas de cada um e suas diferenças, relatando sobre as sucessivas iterações das figuras fractais sem perder suas características originais.	Alunos do 3º ano do Ensino Médio	Foram realizadas oficinas para explorar as características Fractais, utilizando o Software Piktochart divididas em etapas: Apresentação dos Objetos e imagens a serem conhecidas e analisadas, fazendo o comparativo com as duas geometrias; Construções de cartões fractais com papel dobradura; Observações, sugestões e questionários por parte dos alunos sobre a oficina.	Foi relatado a curiosidade instantânea nos alunos acerca das figuras fractais, devido ser um conteúdo novo e ainda não abordado em sala pelo professor titular. As oficinas ocorreram no turno inverso dos estudantes, tendo participação reduzida, devido ter alguns dos alunos fazendo estagio, trabalhos e outros.	O conteúdo novo gera muita ansiedade por parte dos alunos. Muitos tem facilidades de simulação, enquanto outros demora para processar novas forma e metodologias de ensino. A divulgação da geometria de fractal tem que ser rapidamente utilizada no ensino básico para poderem tem uma aceitação e compreensão mais eficaz. Tudo que é novo tem uma aceitação lenta, que aos passos será rapidamente introduzida no cotidiano e ampliação de sua aplicação, nas diferentes áreas do saber.
---	---	--	---	----------------------------------	--	---	--

PAULA E SOUZA (2017) UNESP Revista Eletrônica Paulista de Matemática	Uma abordagem da geometria de fractal para o ensino médio	Apresentar, aos alunos do Ensino médio, um novo conceito de geometria que pode explicar com mais detalhes a respeito da natureza, frisando o diferencial em relação a geometria euclidiana mostrando detalhes antes não visto, tendo suas características bem definidas, contribuindo para a formação e construção do pensamento matemático. Possibilitando a compreensão de uma nova geometria ainda não vista e trabalhada.	Foram realizadas oficinas para apresentação das figuras fractais, especificando suas formas. As oficinas trabalharam com Triângulo de Sierpinski, Conjunto de Cantor, Floco de neve de Koch. Construção de algoritmo, explorar a progressão geométrica para explicar as sucessivas iterações etc. Construção de carões tridimensionais, focando nas iterações, sem perda do formato original	Participação dos alunos do ensino médio para contemplar a ludicidade, construção geométrica, dentre e outros.	Foi trabalhado a construção do cartão tridimensional, como forma de mostrar a iteração, a autossimilaridade e, fragmentação da figura e a infinidade da construção.	Fora elencado dois questionários acerca do assunto Fractais. No Primeiro questionário 93% dos alunos nunca ouviram relatos de que seria um fractal. 7% ouviram falar, mas não souberam expor o que seria um fractal e como seria o formato. Na segunda oficina foi abordado a importância de aplicação do conteúdo no ensino médio para trabalhar o lúdico, criatividade e desenvolvimento do raciocínio matemático de uma forma interessante.	Um percentual alto de alunos nem sabiam que existia essa geometria de fractal, pois nunca ouviram ou viram trabalhar em sala, dificultando a simulação rápida, pois tiveram que familiarizar com o conteúdo para depois compreender e entender sua importância e aplicações. Da forma como foi feito as oficinas, ficou bem detalhado as características dos fractais. Método de trabalho excelente para alunos ter uma aceitação e diferenciação com a geometria euclidiana.
---	--	--	---	--	--	---	--

KOESPSEL E BAIER (2017) FURB Revista Educação Especial	A utilização de material didático manipulável e da geometria fractal para o aprendizado dos conceitos de área e perímetro: um estudo de caso envolvendo uma estudante com baixa visão	Inserir alunos com baixa visão ou com deficiência na compreensão e interpretação de conteúdos matemáticos propostos na educação básica como forma de inclusão estudantil	Utilização do tapete de Sierpinski para aplicação dos conteúdos formado por duas dimensões, em específico o quadrado, para realçar a compreensão de conteúdos como perímetros e áreas.	Participação de uma aluna com baixa visão do ensino fundamental em uma escola estadual no município de Blumenau/SC, para incluir no processo de aprendizagem de perímetro e área do quadrado.	Foi trabalhado o Tapete de Sierpinski, onde foi explorado, áreas e perímetros das figuras construídas através da geometria de fractal, utilizando material didático manipulável EVA, para fixação dos conteúdos abordados.	A manipulação do material Didático, possibilitou a compreensão de áreas e perímetros, sem impor nenhuma apreensão acerca da rapidez em resolver as atividades propostas	Os autores propuseram ensino centrado em cada aluno, valorizando os conhecimentos pré-existentes, respeitando seu ritmo de aprendizagem, forma de compreender e associar com os conteúdos trabalhados em sala. Cada aluno tem sua forma de entender, buscar, analisar, associar tais conteúdos propostos, como forma de interação com demais, construindo uma educação inclusiva, respeitando assim, as adversidades que cada sala tem.
--	---	--	--	---	--	---	---

BOZZA, SAUER e MISSELL (2016) UCS Scienta Industria cum	A Geometria dos Fractais no Ensino de Progressões Geométricas	O presente trabalho foi planejado como uma proposta para o ensino e a aprendizagem de sequências numéricas, denominadas Progressões Geométricas (PG), tópico do conhecimento matemático, trabalhado no Ensino Médio atual, na 1ª ou 2ª série, de acordo com o currículo de cada instituição escolar.	Em suas concepções, a reflexão e a formação, quando constantes na vida profissional do professor de Matemática, podem sanar tal dificuldade. Diante de tais apontamentos a proposta apresentada a seguir justifica-se pela possibilidade de contribuir para o aprimoramento profissional dos docentes que reconhecem, na Formação Continuada, uma forma de fazer frente às demandas atuais relativas à educação matemática.	Não menciona participantes	Espera-se que, com as atividades propostas na oficina, os participantes percebam que há uma possibilidade de abordar o conhecimento matemático de PG de forma contextualizada e através de uma aplicação. Para obter os resultados da oficina e analisar sua validade e o potencial das atividades desenvolvidas, é solicitado que os participantes respondam um questionário como tarefa final do encontro.	O trabalho desenvolvido pelo professor em sala de aula é resultado dos fatores citados acima e de outros não elencados, os quais interferem diretamente nas práticas pedagógicas desenvolvidas. A formação acadêmica e continuada do professor pode auxiliar na qualificação de sua trajetória profissional, gerando melhorias na educação, como um todo, o que justifica a necessidade de o professor atualizar-se constantemente.	O artigo explana uma abordagem de como trabalhar oficinas de matemática, utilizando fixação de conteúdos através de aplicações. Mostra aos alunos a aplicação de Progressão geometria através do Tapete de Sierpinski, contextualizando a aprendizagem. Fica mais eficaz a absorção do conhecimento, pois usa recurso mais visível na aplicabilidade da Pg. Termos da Pg, Soma da Pg. Fica mais evidente a compreensão do cálculo de área, perímetro, limites. O aluno consegue absolver muito mais, pois a visualização é mais acentuada.
---	---	--	---	----------------------------	--	---	--

ARAÚJO e MARINS (2019) Boletim Cearense de Educação e História da Matemática	Introduzindo a Geometria Fractal no Ensino Médio por meio da perspectiva de Modelagem Matemática	O presente trabalho tem por objetivo apresentar uma proposta de aula para a aplicação do conceito de geometria fractal desenvolvida por meio da perspectiva de Modelagem Matemática	Para isso, realizou-se um estudo teórico e interpretativo sobre a abordagem de Modelagem Matemática e a respeito do conteúdo de geometria fractal, relacionando com a problemática escolhida, a tecelagem de um tapete.	Não menciona participantes	Sendo assim, percebe-se que uma aula desenvolvida sob a perspectiva de Modelagem Matemática pode proporcionar o desenvolviment o do pensamento matemático nos alunos, uma vez que ela se relaciona com situações diárias, e que a partir disso, é possível realizar ações como: a exploração de hipóteses; formulação de variáveis; uso de conhecimentos prévios; construção do modelo matemático; entre outras.	Nesse sentido, esse trabalho apresentou uma forma de se utilizar a abordagem de Modelagem Matemática no estudo da geometria fractal, promovendo uma aula criativa e dinâmica, partindo de um problema, em princípio, não matemático, permitindo a exploração de hipóteses, formulação de variáveis e construção do modelo matemático, e finalizando com as definições do objeto matemático em questão. Com base no estudo dessa perspectiva, entendemos que ao utilizá-la aliada a um planejamento detalhado, considerando objetivos em relação ao conteúdo e ações didático-pedagógicas que contribuem para a gestão da aula, é possível promover a construção do conhecimento matemático nos alunos, fazendo com que reconheçam que essa disciplina está inserida em vários campos do conhecimento	Artigo menciona uma das profissões muito usadas no passado, que na maioria das vezes as tecelãs não tinham nenhum conhecimento acadêmico de matemática, as realizam muito, inclusive a geometria de fractal com seus fabulosos trabalhos. Este artigo trouxe a simplicidade de como pode ser simples e prático utilizar o cotidiano das pessoas fazendo modelagem com suas profissões com uso da aplicação de conteúdos matemáticos que as vezes aparenta nem ter aplicação na realidade. Uma aula envolvendo modelagem, dessa forma que propõe o trabalho, com certeza, terá uma maior participação dos alunos, pois a compreensão é maior. Muitos chegam a não participar ou demonstrar pouco interesse por não entender e nem relacionar com seu cotidiano aqueles conteúdos trabalhados em sala.
--	---	--	--	-----------------------------------	---	---	---

REIS (2015) IMPA Ciência e Natura	Uma Árvore de Pitágoras Explorando os Fractais no Ensino Médio	A Matemática tem sua beleza estética como um dos principais atrativos. Há tempos padrões geométricos despertam a curiosidade de muitos matemáticos. É nesse universo da Geometria que um tema vem ganhando cada vez mais espaço, trata-se dos Fractais. Trabalhar essas estruturas fantásticas no Ensino Médio resgata a importância de mostrar a beleza presente na Matemática, além disso, o conteúdo é praticamente esquecido pelas escolas e quase sempre deixado de lado na elaboração dos currículos. Neste trabalho, propomos uma breve análise do fractal conhecido como Árvore de Pitágoras, mostrando como é possível trabalhar temas como Progressões Geométricas e Aritméticas de forma a despertar a curiosidade do aluno.	O estudo dos fractais abre muitas portas no tocante ao ensino de Matemática. A beleza dos fractais serve como incremento para buscar no aluno interesse no estudo da Matemática. Privá-lo de conhecer e vislumbrar os fractais é um erro inconcebível. BARBOSA (2005) nos lembra que o estudo da Geometria Fractal ajuda tanto na compreensão de conteúdos presentes no currículo escolar como no despertar da existência do belo na natureza e na Matemática, fatores que ajudam substancialmente o aluno a desenvolver de forma mais eficiente conceitos matemáticos "desinteressantes" do ponto de muitos livros didáticos atuais.	Não menciona participantes	Busca por uma aula de matemática, usando fractais prazerosa, significativa, ricas em conhecimentos, ampliando a visão dos alunos no tocante a aplicabilidade acerca dos conteúdos trabalhados dentro e fora da sala de aula, sempre explorando a realidade e a forma de cada aluno aprender. A geometria de fractal além de trazer belezas geométricas, amplia com certeza, o interesse pela matemática, mostrando onde pode ser aplicado.	Mostramos como os conceitos de Progressão Geométrica, Análise Combinatória e Noções de Geometria Plana podem ser bem explorados usando os fractais como base. Concluímos o trabalho na certeza de que o universo dos fractais é capaz de expandir a visão dos alunos sobre as belezas e aventuras no mundo das descobertas que a Matemática pode proporcionar. Tornar a Matemática uma disciplina prazerosa é o caminho para uma prática pedagógica mais eficiente	O presente artigo fortalece a compreensão da progressão geométrica, área, perímetros. Traz uma abordagem chamativa, ilustrativa em sala buscando atenção e compreensão mais eficaz por parte dos alunos. A aula será mais significativa quando for interessante, onde eles possam relacionar o conteúdo trabalhado com as figuras dos quadrados e triângulos que vai se formando a cada interação na árvore pitagórica. Funde arte, beleza, criatividade, inspiração, observação pelos alunos, deixando de ser aula insignificante, massacrante, desestimulante, quase sem nenhuma participação dos alunos.
--	---	--	--	-----------------------------------	---	---	--

LOPES JM, SALVADOR BALIEIRO FILHO IF (2013) Revista Eletrônica de Educação	O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e resolução de problemas	O presente artigo é uma proposta pedagógica que propõem ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais, utilizando problemas contextualizados como o Triângulo, Tapete de Sierpinski, oportunizando aos alunos a construção e reconstrução. Após a interação, sugerimos a forma algébrica como forma de fixar e sintetizar, os conteúdos trabalhados	será utilizado os conhecimentos prévios dos alunos, para ler, entender e desenvolver os exercícios usando triângulo e Tapete de Sierpinski. O Professor será o mediador, instigando seus alunos a pensar, sempre desenvolvendo uma pergunta com outras perguntas, forçando a raciocinar sobre o problema, criando seu próprio método de resolução. A fixação dos conteúdos torna-se mais simples e fácil para compreender o processo matemático.	O artigo não menciona participantes, apenas ensina a forma como deve ser empregada em sala de aula	Elaborados exercícios contextualizados, onde coloca os alunos a pensar qual forma melhor para resolver, sempre priorizar pelos conhecimentos prévios de cada participante. Depois socializa entre os participantes, mostrando a eles que cada aluno tem uma determinada forma de organização do pensamento matemático.	Espera-se que torne mais fácil a fixação dos conhecimentos matemáticos, pois contextualiza o aprendizado, valorizando cada conhecimento prévio. Torna o aluno, como centro da produção do conhecimento e o professor apenas como mediador e ajustador do conhecimento.	O presente artigo traz uma abordagem contextualizada dos problemas antes da introdução da probabilidade geométrica. Deixa o aluno pensar, criar a melhor forma ou estratégia de como será a resolução do problema analisado. O interesse é tornar bem maior na participação e resolução dos problemas para a posterior compreensão da geometria de fractal envolvida na contextualização.
--	---	--	---	---	---	---	--

ROZELAINE DE FATIMA FRANZI (2018) UFAL Debates Educação	Proposta de ensino de geometria por meio de fractal e o software geogebra	O presente artigo visa trabalhar os conteúdos de geometria de fractal com recurso computacional utilizando o recurso Geogebra. Este recurso permite a criação das figuras fractais, facilitando a compreensão e sua construção de uma forma eficaz e simples. Traz os alunos a pensar sobre a rugosidade das figuras construídas, compreendendo as iterações feitas e acompanhando a autossimilaridade, dimensão e rugosidade passo a passo.	Foi apresentado e discutido com os alunos acerca da geometria de fractais e suas particularidades em relação a geometria Euclidiana. Ressaltando a autossimilaridade, dimensionalidade e rugosidade. Diante das explicações foram mostradas as iterações na construção do fractal por meio do triângulo de Sierpinski, detalhando os níveis de iterações. Foi apresentado aos alunos o programa Geogebra para auxiliar na construção dos fractais. A metodologia foi bem-vista na fixação do conteúdo, percepção das diferenças entre uma e outra geometria que no caso é a Euclidiana.	Foram participantes deste artigo, alunos do ensino médio.	Empregado o ensino computacional com programa geogebra, para mostrar os passos que acontece na iteração de cada nível, compreendendo com melhor eficiência e fixação do conteúdo proposto.	Foi detectado o interesse no novo, gerando uma curiosidade, interesse na construção e iteração da figura proposta. A fixação do conteúdo, mediante o programa computacional, foi considerável, pois a fixação, questionamentos e análise de como está acontecendo com a figura é imediata, compreendendo que no infinito, o fractal só resta rugosidade, sem nenhuma parte continua.	O programa em questão trás o aplicativo geogebra no auxílio e observação de construção por parte dos alunos. Prende mais a atenção e a simulação dos conteúdos, facilitando para ambos, professor e alunos. A aplicação ajuda rapidamente da compreensão mais acentuada, devido ver a construção de todos os níveis e compreendendo as características relatadas dos fractais.
---	--	---	--	--	---	---	---

FARIA MALTEMPI (2012) UNESP Revista Eccos	E	Padrões fractais: conectando matemática e arte	O presente artigo traz um padrão matemático na arte para buscar a criatividade dos alunos em analisar as formas que existem nos desenhos, buscando entender como funciona a dinâmica dos desenhos, compreendendo melhor sua lei de formação e construção. Dessa forma torna se mais atraente a aula ministrada e os desenhos produzidos ficam mais acessível sua construção. mostrar aos alunos que a matemática juntamente com a geometria de fractal vem para torna mais visível e atraente as formas encontradas na arte e demais disciplinadas que integram a composição do ensino médio.	O referido artigo recorreu ao Software para mostrar a composição dos desenhos relacionando com as características fractais, como a autossimilaridade, complexidade, dimensão fracionada, reforçando que uma parte do desenho está associada matematicamente ao todo, pela construção passo a passo de cada figura fractal, com ênfase no processo de construção de cada, destacando sempre as características fractais. A metodologia traz uma maior participação dos presentes devido incentivar sua criatividade natural através da construção e observação dos desenhos criados, analisados, dentre outros.	Alunos do ensino médio, que demonstraram uma participação maior relacionando as aulas tradicionais, encontraram facilidades na operação do software Geogebra e entenderam a construção e desconstrução de cada figura, ficando mais evidente as características fractais em cada construção, fixando com maior rapidez e eficiência as características fractais.	Foi realizado através dos softwares Geogebra para uma maior eficiência e observação na construção das figuras fractais. Cada aluno teve oportunidade de observar e analisar cada passo aplicado no software e os acontecimentos, e pode ir retornando a figura inicial para compreender os caminhos da construção fractal.	o objetivo do artigo foi almejado, pois, abriu uma nova proposta de ensino, através dos fractais, tornando a aula e a participação dos alunos maior, deixando de ser uma aula apenas estressante e cansativa, sem aplicações na vida real ou em algo que possa chamar atenção. O software permite com precisão e a construção das figuras com detalhes precisos, envolvendo uma series de matérias utilizadas no ensino médio, explorando a imaginação de todos envolvidos	O ensino de matemática e arte não serão mais os mesmos. Com essa abordagem utilizando o Software Geogebra e a geometria de fractal, torna se a aula mais pratica na aplicação, compreensão do que está sendo estudado e construído no software, reforçando para os alunos os passos da criação das figuras e a relação com quais conteúdos estão diretamente ligados, deixando de ser uma aula monótona e sem participação por completa dos alunos. Essa geometria fractal veio para fazer a integração com todas as demais do currículo de ensino, ampliando interesse em busca na natureza de formas geométrica que contenha as características fractais.
---	-----------------	---	--	---	---	---	---	--

AMALRAHIF SULEIMAN (2019) Ensino da Matemática Debate	Fractais: possibilidades pedagógicas na escola básica	O presente artigo reforça a necessidade de acrescentar no currículo de ensino básico a geometria de fractal, como ferramenta para compreensão dos fenômenos naturais e geométricos, buscando o interesse dos alunos, com forma de ampliação dos conhecimentos já existente, mas ainda não explorados. Com recursos computacionais é possível tornar as aulas de matemática muito mais atraente e participativos, abordando conteúdo que ainda não gerava interesse algum, sendo um deles o triângulo de Pascal e a construção das figuras fractais destacando suas características.	Com a evolução computacional, torna-se possível a criação de programas para facilitar a vida dos professores e gerar em sala a participação maciça dos alunos, com aulas contextualizadas usando a geometria recente, fractal, através do uso de software destinados a isso. A geometria de Fractal trouxe sentido a muitos elementos que ainda não tinham uma explicação plausível que atendia a necessidade do professor e o interesse dos alunos. Hoje é possível mostrar a diferença das duas geometrias em questão, a Euclidiana e a Fractal, sendo que uma complementa a outra. A fractal veio mostrar a parte que mais aproxima da natureza, como a autossimilaridade, dimensão fracionada, rugosidade tem algoritmo capaz de mostrar a construção de cada um. Dessa forma abre a possibilidade de os alunos entender melhor o ensino da matemática, não sendo mais a disciplina que mais reprova e desestimula os alunos.	O artigo não relata participantes e uma proposta para aplicação na educação básica com forma de uma maior integração entre professores, alunos e conteúdo.	A aplicação através de recursos computacionais, ampliou as formas de abordagem e criação dos elementos matemáticos em especial a parte geométrica, tanto a euclidiana e a geometria moderna atual de fractais. Dessa forma fica mais claro para os alunos a diferença, as formas e a criação ricas em detalhes da geometria de fractal relacionando aos conteúdos que antes não tinham nenhuma ou quase nada de aplicabilidade na vida. Hoje a possibilidade de compreender os fenômenos da natureza, a construção dele via computador e as características de cada um, mostrando as aplicações nas diferentes áreas do conhecimento.	O artigo espera-se uma maior participação e compreensão dos alunos no que tange a construção e a aplicação dos temas abordados, tornando a matemática prazerosa de aprender, mostrando as possibilidades de aplicação no cotidiano, no mercado de trabalho, enfim no dia a dia de cada um.	Ensino presente artigo traz a inovação da geometria com utilização dos recursos computacionais, possibilitando uma melhor fixação e aprendizagem pelos alunos, ampliando a participação juntamente com o nível de interesse de cada um. Com a evolução da informática trouxe benefícios gigantescos para todas as áreas do conhecimento, tomando o estudo, mas significativo e com aplicações reais, principalmente a geometria de fractal, onde fica bem explícito suas características inconfundíveis, como a autossimilaridade, dimensão fracionada, rugosidade em seu todo.
--	--	--	--	---	--	---	--

PEREIRA BORGES (2016) ULBRA Revista Ensino de Ciências e Matemática	E A geometria dos fractais no ensino de matemática: uma revisão bibliográfica categorizada das pesquisas brasileiras dos últimos dez anos	O presente artigo faz a revisão dos últimos dez anos acerca da geometria não euclidiana e as dificuldades voltadas aos professores do ensino médio, haja vista de muitos desconheciam tanto a geometria euclidiana e muito menos a não euclidiana. Explorar os vários campos que podem ser empregados essa geometria fazendo a diferenciação delas, propondo uma forma atraente e instigante de ensinar geometria no ensino médio, pois a matemática já é vista como cansativa, aterrorizante, complexa, etc. Traz a geometria de Fractal com integrador de várias disciplinas, mostrando uma abordagem mais significativa, concreta e prazerosa de ensinar e chamar a atenção dos alunos.	Foi realizado uma revisão bibliográfica dos últimos dez anos de pesquisa e publicação acerca da geometria de fractais. Essa pesquisa foi realizada com artigo publicados e pesquisados em revista on line, por tornar mais fácil o acesso. Foi dividido em categorias onde trata da geometria euclidiana e não euclidiana, tenha aplicabilidade no ensino da matemática, mostrando a construção dos níveis iniciais da geometria de fractais, reforçando as características de tal geometria e fazendo a comparação com a Euclidiana.	Professores do ensino fundamental e ensino médio.	Foi feito a revisão bibliográfica dos últimos dez anos, com ênfase em ensino dos fractais no ensino médio, na formação de professores, nos programas computacionais, softwares de geometria, tanto euclidiana como a não euclidiana. Esta análise serviu para escolha dos m artigos que seja mais didático, voltado para o cotidiano dos alunos do ensino médio.	O artigo relata que muito professores nem conheciam tal geometria e muito menos sua aplicabilidade. Muitos deles nem na licenciatura viram ou ouviram falar da Geometria Euclidiana e muito menos aplicação. Para grande parte dos participantes mudaram suas visões sobre a aplicação e a contextualização da geometria e viram um excelente possibilidade de conquista da atenção dos alunos na construção inicial da geometria de fractais, usando materiais concreto e também os softwares, em especial o Geogebra, enriquecendo as suas aulas.	O artigo alcançou seu objetivo inicial, pois levou a muito professores o conhecimento e aplicação das duas geometrias, e ele sendo os multiplicadores desse conhecimento em sala. Muitos alunos não tem o interesse as vezes, em participar das aulas de matemática, devido serem monótonas, sem criatividade, sem estímulos que possa chamar sua atenção. Esta geometria da natureza traz o estímulo que faltava nas aulas de geometria, pois aumenta o interesse na construção das figuras, analisando como elas iniciam e como vão se tornando permitindo que possam pensar como ficara essa figura na infinidade, como será sua área, perímetro, qual está sendo sua razão da progressão geométrica, por que não perde a característica original, dentre outros.
--	---	--	--	--	---	--	---

FONTE: Autor

Com base na amostra de duas dissertações que abordam os fractais nos processos de ensino - aprendizagem, é possível observar que as pesquisas destacam a relevância dos fractais como ferramenta para a compreensão de conceitos matemáticos e para o desenvolvimento da criatividade e da curiosidade científica dos estudantes. Além disso, as dissertações ressaltam a importância do uso de materiais concretos e tecnologias digitais para a exploração e a representação dos fractais.

Em relação aos 16 artigos que abordam os fractais nos processos de ensino aprendizagem, é possível observar que as pesquisas apresentam diferentes abordagens, objetivos e metodologias, evidenciando a diversidade de possibilidades de exploração dos fractais no contexto educacional. Entre os principais temas explorados pelos artigos estão a utilização de softwares educacionais, jogos e materiais manipulativos para a uso e exploração dos fractais, a relação entre a geometria fractal e a natureza, e a aplicação de fractais em diferentes áreas do conhecimento, como a física, a biologia e a arte etc.

Já o artigo que aborda a caracterização dos fractais apresenta uma revisão teórica sobre o conceito de fractal e suas principais propriedades matemáticas, enfatizando a importância da dimensão fractal como uma medida da complexidade e da irregularidade de estruturas geométricas. O artigo destaca ainda a aplicação dos fractais em diversas áreas do conhecimento, como a física, a biologia, a economia e arte, e resalta a relevância dessa geometria como ferramenta para a compreensão da complexidade do mundo natural e para o desenvolvimento de novas tecnologias.

Em geral, as pesquisas analisadas evidenciam a relevância dos fractais como ferramenta para a compreensão de conceitos matemáticos e para o desenvolvimento da criatividade e da curiosidade científica. Além disso, as pesquisas destacam a importância do uso de materiais concretos e tecnologias digitais para a exploração e a representação, bem como a relação entre a geometria fractal e a natureza. As pesquisas também evidenciam a diversidade de possibilidades de exploração dos fractais no contexto educacional, tanto em termos de temas quanto de metodologias.

Uma das principais contribuições das pesquisas sobre fractais nos processos de ensino aprendizagem é a possibilidade de promover uma aprendizagem que esteja relacionada aos interesses e experiências dos estudantes e que permita a construção de novos conhecimentos a partir dos conhecimentos prévios. Nesse sentido, o uso dos

fractais pode ser uma ferramenta muito útil para incentivar, a experimentação e a exploração, favorecendo uma aprendizagem mais ativa e participativa.

Além disso, as pesquisas evidenciam que o uso dos fractais pode ser uma alternativa para superar algumas das dificuldades comuns no ensino de matemática, como a abstração excessiva e a falta de contextualização dos conteúdos. Por meio dos fractais, é possível explorar conceitos matemáticos de forma mais concreta e visual, o que pode ajudar a compreender e aplicar esses conceitos em situações reais.

As pesquisas sobre fractais nos processos de ensino aprendizagem também destacam a importância do papel do professor nesse processo. O professor precisa estar preparado para utilizar os fractais de forma efetiva em sala de aula, escolhendo materiais adequados, criando atividades desafiadoras, sendo orientador dos estudantes na construção de seus próprios fractais. Além disso, o professor deve estar aberto a experimentar novas abordagens pedagógicas e a explorar as possibilidades que os fractais oferecem para a aprendizagem.

Uma das características mais promissoras dos fractais é que eles podem ser encontrados em muitos sistemas naturais, como nuvens, rios, oceanos, montanhas, árvores, entre outros. Essa presença dos fractais na natureza está relacionada às propriedades de autossimilaridade e auto afinidade, que permitem que os mesmos padrões se repitam em diferentes escalas e em diferentes partes do sistema. Ela tem sido utilizada para descrever e modelar esses padrões em diversos sistemas naturais, possibilitando uma compreensão da complexidade e da diversidade da natureza manifesta em importantes aplicações em áreas como a ecologia, a geologia, a climatologia e a conservação ambiental etc.

4. METODOLOGIA

De acordo com Delizoicov et al. (2002, p.55), a metodologia usada na composição da sequência didática, teve como referência os três momentos pedagógicos dos autores, constituídos pela problematização inicial, considerando como ponto inicial de discussão o contexto vivenciado pelos integrantes no processo ensino aprendizagem; a organização do conhecimento, onde o professor intervém trazendo a complexidade do tema, fazendo correlação com os conhecimentos prévios;

a aplicação dos conhecimentos, fazendo uso dos conhecimentos correlacionados para interpretação e análise de situações problemas explanados.

4.1 Metodologia de Ensino

A pesquisa foi conduzida na Escola Estadual Porfíria Paula de Campos, situada no município de Várzea Grande, com um grupo composto por 20 estudantes do terceiro ano do ensino médio que se disponibilizaram a participar da intervenção no contraturno. A metodologia de ensino adotada fundamentou-se nos três momentos pedagógicos descrito pelos autores Delizoicov, Angotti e Pernambuco (2002), seguindo uma abordagem qualitativa, com base nos dados coletados durante a aplicação da intervenção.

Do grupo inicial de 20 estudantes que se disponibilizaram a participar da intervenção, somente 10 estiveram presentes devido a fatores externos, tais como trabalho como menor aprendiz, cursos preparatórios para o Enem, responsabilidade com irmãos menores, dentre outros. Devido ao fato, estendeu convite os estudantes do segundo ano do ensino médio para participar da intervenção, mas nenhum deles manifestou interesse em participar. Dessa forma, a intervenção foi realizada tão somente com 10 integrantes.

Justificativa para essa pequena amostra de estudantes se baseia nos dois anos (2020 e 2021) de pandemia do Covid 19, onde as aulas foram totalmente remotas, em alguns casos através de apostilas sem orientação de professores. Ainda para agregar, grande parte dos estudantes não tinham acesso à internet de qualidade ou nem acesso algum para assistir as aulas remotas. Esse fato colaborou para o aumento do desestímulo em estudar ou participar de algo voltado a educação, seja presencial ou a distância.

Problematização Inicial:

Momento este que, constitui em apresentar aos estudantes questionamentos e contextos pertinentes ao tema em questão, com o objetivo de estimulá-los a compreender e integrar-se ao meio em que vivem, bem como buscar conexões com o tema, ainda desconhecido por eles.

Nesse sentido, a metodologia pedagógica adotada visa estimular a livre expressão das ideias e pensamentos abstratos dos estudantes em relação aos componentes abordados em sala de aula, tais como brócolis, samambaia, couve-flor, figuras de nuvem, raios, costa terrestre de algum continente, sistema renal e células cancerígenas identificadas em tomografias computadorizadas ou ressonâncias magnéticas.

Através da apresentação de indagações e contextos reais, os estudantes são incentivados a refletir sobre a importância e a complexidade do tema em estudo, bem como a relacioná-lo com aspectos do cotidiano e do mundo que os cerca. Esse processo de integração e conexão é fundamental para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa que pode possibilitar transformação na percepção e a compreensão dos alunos em relação com o tema.

Organização do Conhecimento:

Neste momento, foi aplicada a intervenção sendo utilizados os conhecimentos científicos para introduzir a temática dos fractais. Foram apresentadas informações sobre a origem e o estudo da geometria fractal, bem como suas amplas aplicações em diversas áreas do conhecimento, em especial na da educação, com possibilidades de contemplar matemática, física, química, biologia, artes, geografia, história, astronomia, astrologia, entre outros. Dessa forma, ventila-se possibilidades de ocorrer a interdisciplinaridade muito falada, pouco e as vezes nem aplicada.

Os conceitos abordados são embasados em conhecimentos científicos, e o objetivo é despertar a atenção e a compreensão dos estudantes para o tema. Utilizando a experiência de professor sendo o elo na compreensão dos conceitos de fractais e na conexão com as aplicações práticas na realidade, a fim de motivar a participação ativa e o engajamento, que tanto espera.

Essa intervenção foi fundamental para a efetividade da aprendizagem, pois permitiu que os estudantes compreendessem de maneira mais complexa o conteúdo estudado, além de se sensibilizarem para a importância do tema na atualidade. Foi um momento importante de troca de conhecimentos e análise de aplicações dessa geometria nos conteúdos de matemática e física, e demais, até então não trabalhados.

Aplicação do Conhecimento:

Este momento buscou discutir de forma sistemática o conhecimento agregado pelos estudantes ao longo da intervenção, tendo como objetivo examinar e apreciar as questões iniciais propostas, que serviram de base para o ponta pé inicial, bem como outras situações em que esses conceitos possam ser aplicados, com a interpretação possibilitada pelos conceitos já apresentados no início do estudo.

Portanto, trata-se de uma etapa fundamental para a consolidação da aprendizagem, pois permitiu aos estudantes refletir sobre os conceitos estudados e sua aplicação prática em diversas situações, bem como avaliar o próprio processo de aprendizagem.

Durante essa etapa, os estudantes foram incentivados a expor suas opiniões e perspectivas sobre o tema, a fim de enriquecer o debate e ampliar o olhar sobre as possibilidades de aplicação desse novo conceito de geometria.

4.1.1 Primeiro Momento pedagógico: Problematização Inicial

No decorrer de 5 horas-aula, distribuídos em três dias, sendo 2 horas-aula no primeiro dia e 1,5 horas-aulas nos demais, foi apresentado aos estudantes, materiais que permitiram a exposição do problema inicial da pesquisa, sem detalhamento prévio do objetivo desta. Essa apresentação consistiu na exposição de amostras de diversos materiais, tais como uma muda de samambaia, uma unidade de brócolis, uma unidade de couve-flor, um estilingue, folhas de árvores frutíferas, fotos de nuvens, globo terrestre, sistemas respiratório e renal humanos, estrela-do-mar, zebra, borboletas, árvores, tigre, onça, ressonância magnética na detecção de alguma anomalia, sistema circulatório humano, entre outros. Esses materiais foram apresentados com o objetivo de colher as impressões, indagações, narrativas, considerações sem nenhuma interferência do professor.

Com o intuito de analisar e apresentar o problema acima citado, foi proposta a seguinte indagação: diante dos materiais apresentados, quais as correlações que poderiam citar com algum conteúdo matemático que eles já haviam estudado? Dentre as várias considerações apresentadas pelos estudantes, destacam-se ramificações, ampliações, reduções, somatório de “pernas”, geometria euclidiana, princípio da

contagem, probabilidade, porcentagem, semelhança, perímetro, áreas, artes, gráficos de funções, entre outros.

Teve estudante que resolveu, sem manifestação do professor, dividir os brócolis, o couve-flor, em partes menores, para analisar e observar sobre suas características, da parte com o todo, compreendendo o processo de similaridade, pois a parte menor é réplica, sem ausência de nenhuma característica. As ondulações constantes em ambos, possibilitou uma analogia com montanhas, nuvens, raios, costa terrestre, sistema renal, pois, contempla a rugosidade, irregularidade, presentes nesses objetos. Alguns só observaram, ainda sem entender o porquê da exposição, ainda sem explicação, diferente das aulas vivenciadas até este momento, por não colocar o estudante no centro do processo de ensino aprendizagem. A criatividade surgiu com os demais objetos, como a samambaia, desenhos, com início de aplicação com conhecimento matemático, físico, ampliando o campo de observação, mas também teve aqueles que não se dispuseram a falar ou relacionar, pois ainda não tinha compreendido a real intenção, ficando apreensivos, pois a relação ainda não detalhada, possibilita dúvidas e angústias, por não ter até então, uma aula dessa magnitude. A nova metodologia de ensino, até então não exposta a eles, possibilita aguçar seus conhecimentos prévios, e relacionar com conteúdo aplicados ou não pelos professores da referida escola.

Apontam Muenchen e Delizoicov (2012, p.88-89) que a problematização inicial apresentada aos estudantes tem como objetivo fundamental de transmitir a transição entre concepções menos elaboradas para concepções fundamentadas, fomentando a apreensão de conhecimentos que ainda não possuem. Prosseguem os citados autores ao afirmarem que contextualizar o conhecimento à realidade dos estudantes reflete uma das vertentes demonstradas no primeiro momento pedagógico, e essa situação é confirmada quando as indagações do mundo real se conectam à vida, contemplando a realidade nas quais estão inseridos.

Nesse estágio da intervenção e comparando com as impressões dos estudantes, verifica-se que os conceitos de simetria, ramificação e similaridade foram abordados em maior ou menor grau, havendo casos em que os estudantes não conseguiram verificar no material apresentado, nenhum conceito matemático que eventualmente pudessem ter estudado. Diante do exposto relatado, torna evidente que nem todos

presentes, consegue correlacionar os objetos com algum conteúdo já estudados na área de exatas. Diante disso, pode se relatar que cerca de 50% dos estudantes conseguiram identificar vários conceitos matemáticos. Nesse sentido segue uma sequência de figuras que confirmam o exposto

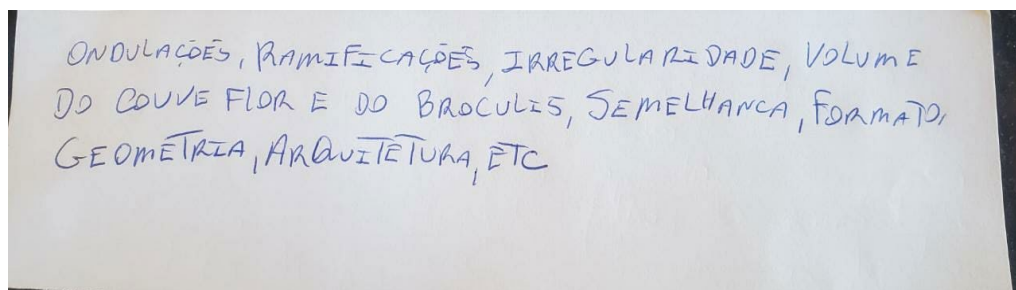


Figura 38 - Considerações do estudante A

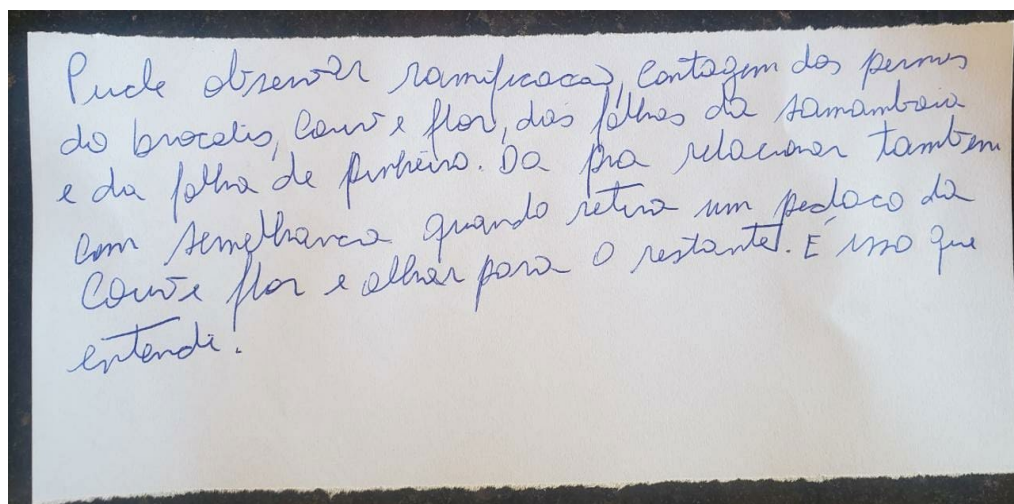


Figura 39 - Considerações do estudante B

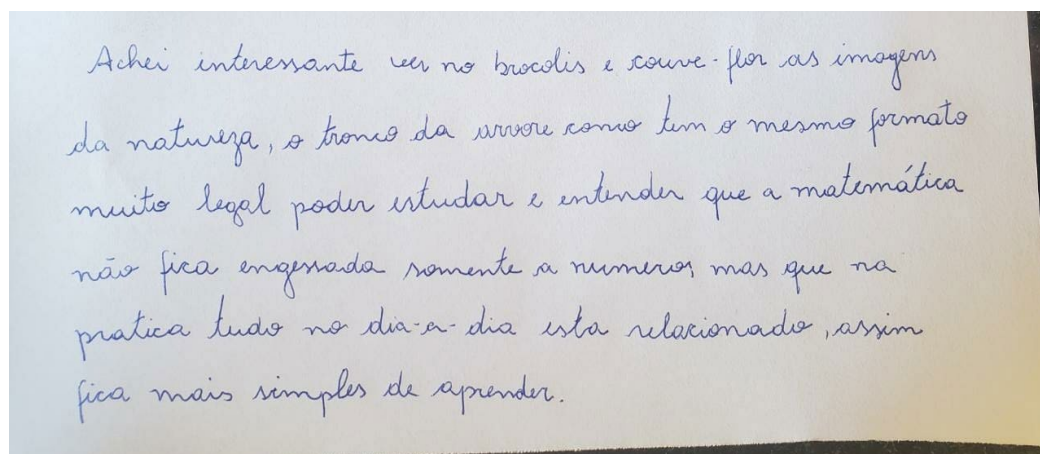


Figura 40 - Considerações do estudante C

Do exposto, verifica-se que o primeiro momento pedagógico, os estudantes com comportamento apreensivos e dúvidas ainda não sanadas e timidez em expressar o que estavam pensando com essa nova forma de observar os objetos que compunham os elementos a serem analisados. Perceberam que a natureza tem uma lei de formação de difícil alteração e ainda relacionar com conteúdo que até então não possuía aplicação concreta, sendo apenas parte do conteúdo no cumprimento de ementa disciplinar, não expondo, as vezes pelo aplicador por não conhecer ou até mesmo ter pesquisado ou estudado, aplicações em situações reais. Dessa forma, pode se dizer que fundamentos teóricos confirmados, considerando a amplitude das impressões percebidas em suas considerações.

4.1.2 Segundo Momento Pedagógico: A Organização do Conhecimento

Durante 7 horas-aula, distribuídos em 4 dias, sendo que nos dois primeiros dias 2 horas-aula, e nos últimos 1,5 horas-aula, foi apresentado material referente à organização do conhecimento, que visou trazer conhecimento científico sistematizado sobre o tema da geometria de fractais. Os recursos didáticos utilizados foram slides, vídeos aulas, aulas expositivas e materiais impressos com textos e fotos que convergiram aos princípios fundamentais da geometria de fractais. 1 hora aula feita apresentação de slides, em seguida ocorreu debate para uma fixação expressiva. Teve estudantes que conseguiram relacionar com conteúdo matemático, já estudados, fixando melhor a compreensão e o aprofundamento do tema com ênfase na teoria dos autores. Mas também tiveram estudantes que ainda permaneceram dúvidas, mas a timidez ou até mesmo criticidade em relacionar, impediram de se manifestar, por talvez achar que poderia ser alvo de críticas ou até mesmo chacota, por não conseguir fazer tal relação. Mas uma vez, foi oportunizado a eles a falarem, pois o momento e para exposição de ideias, mesmo que errôneas. Mesmo assim permaneceram inertes. 1 hora aula foi exposto o vídeo sobre fractais e a construção iterativa. Após os vídeos tiveram alguns questionamentos que à tona, essa nova forma de geometria não trabalhada em sala, relação direta com a natureza, lei de formação dos fractais iterativos, da natureza, enfim, dos raios, chuvas, nuvens etc. diante do debate e intervenção do professor, pode se dizer que reduziram as dúvidas. 2 horas-aula foi realizada uma mesa redonda para ouvir cada estudante, como forma de coletar

impressões com vários objetos expostos sobre os fractais, como forma de esclarecer e sanar possíveis dúvidas, ainda existentes. 1,5 horas-aula foi aula expositiva, mostrando detalhes dos fractais e como compreender o processo iterativo, demonstrado na lousa com a construção do triângulo de Sierpinski, por remeter a vários conteúdos já estudados, como geometria euclidiana, contagem, progressão geométrica, simetria, área, perímetros, entre outros. 1,5 horas-aula foi realizada nas dependências da escola, fora de sala de aula para analisar e relacionar a natureza com a geometria de fractal. Este momento muitos observaram a formação das arvores, plantas, nuvens, com foco na composição de sua estrutura fractal, evidenciando dimensão, complexidade infinita, irregularidade, até então não observado, estrutura física da escola, completamente aplicada geometria euclidiana, entre outros. Mas também teve estudantes que não se manifestou, deixando uma incógnita. Nesse sentido, os saberes essenciais foram disponibilizados, sob a orientação do professor, para que os estudantes pudessem ter percepção técnica das questões propostas inicialmente no primeiro momento pedagógico.

Espera que este momento descrito, configure uma transição entre o senso comum e a aquisição de conhecimento sistematizado. Com procedimentos de ensino múltiplos, como exposição, espera-se que os questionamentos, dúvidas, inseguranças em expor seja superado e ainda, textos como base para argumentações, trabalhos, entre outros. Ao término da exposição dos fundamentos e conceitos de geometria de fractais, eles demonstraram, curiosidade em saber os critérios utilizados para as iterações que tendem ao infinito de estruturas fractais e questionaram o porquê deste conteúdo de suma importância nos dias atuais não ter sido ainda abordado nas escolas de ensino fundamental e médio, tanto nas particulares e como nas públicas, seja federal, estadual ou municipal.

Durante a apresentação dos fundamentos e conceitos da geometria dos fractais, os estudantes foram munidos de referencial teórico para uma percepção mais efetiva em relação aos novos conhecimentos que puderam agregar. Considerando a fluidez em que o andamento dessa fase se caracterizou, sendo esperado que eles integrem os conhecimentos prévios com os novos apresentados.

4.1.3 Terceiro Momento Pedagógico: Aplicação do Conhecimento

Utilizando 08 horas-aula, distribuídos em dois dias, sendo 4 horas-aula, com direito a intervalo de 15 minutos a cada 2 horas-aula, foi apresentado aos estudantes, material referente à aplicação do conhecimento, visando trazer a aplicação do conhecimento que foi apresentado no momento anterior que versa sobre a organização do conhecimento.

O objetivo deste momento é dotar os estudantes das propriedades de utilização dos conhecimentos adquiridos com relação a situações reais, e não apenas visando somente solucionar ou encaminhar soluções de atividades propostas em livros ou textos.

Retomar o problema inicial é de extrema importância para que se possa fazer uma análise criteriosa quanto ao entendimento em relação ao exposto no segundo momento pedagógico. As 8 horas-aulas foram distribuídas em dois dias em forma de oficina para confecção dos modelos iterativos. No início gerou muita dúvida e ao mesmo tempo, curiosidade perceptível. Muitos não tinham realizado até aquele momento qualquer modelo iterativo, mesmo que intuitivamente. Teve até citações da gravidez do início ao final, pois começa a ampliação de todos os órgãos que compõe o corpo humano sem mudança de forma. Isso possibilita um novo olhar sobre a realidade, com ênfase na análise dos conceitos e fundamentos explanados, discutidos, redefinidos, que envolvam situações e o vasto conhecimento que os fractais possibilitam, relatado no momento pedagógico anterior.

Diante do exposto, foi utilizado modelos iterativos de fractais, como a Curva de Cantor, Curva de Peano, Curva e Ilha de Koch, Triângulo e Tapete de Sierpinski e esponja de Menger.

Iniciou-se a construção de diversos modelos fractais iterativos, ressaltando a sua aplicação em relação aos conteúdos matemáticos: perímetro, área, logaritmo, funções, progressões, sequências, probabilidades, estatística, limites, dimensionalidade, fracionalidade, conjuntos, análise combinatória, geometria plana e espacial, entre outros. Essa etapa aprimora a fixação dos conceitos e forma da geometria de fractais. A maioria teve facilidades em construir, mas ficaram com dúvidas acerca da dimensão fractal, sendo que observaram que os objetos iniciam com dimensão inteira, aplicando as iterações, passam a ter fracionalidade, requisitando auxílio do professor para ser sanadas. Os questionamentos iniciaram no conjunto de

Cantor, pois a dimensão é 1 e aplicando as iterações, as réplicas cada vez menores. Os questionamentos e observações persistiram em todos, mas o que mais tiveram dificuldade em construir foi a Curva de Peano. Para eles, como que de um segmento de reta, torna uma figura completamente diferente do início, e ainda, início com dimensão 1 e com as iterações, passa a ter dimensão 2. Esse modelo levou quase 2 horas para acontecer a construção de todos com imperfeições aparentes visíveis e muita dúvida aparente, devido ao nível de abstração ser elevado, requisitando um olhar mais detalhista e uma criticidade e observação avançada.

Conforme Sallum (2005, p.4) a geometria de fractais fomenta a curiosidade dos estudantes, possibilitando desenvolver os processos iterativos, disponibilizando elementos para a elaboração de fórmulas gerais, estrutura algoritmos, caracterizando áreas e perímetros em figuras com dimensão fracionada, subsidiando conceitos fundamentais de limites, progressão geométrica e utilização de tabelas.

O interesse dos estudantes vai ao encontro das diversas relações que as geometrias de fractais têm com outras vertentes das ciências em questão, eliminando lacunas deixadas pela limitação da Geometria Euclidiana. Desta forma conforme Barbosa (2002, p.4) é possível ter uma dimensão precisa da costa terrestre, raios, árvores, nuvens, enfim os sistemas ambientais, analisar uma tomografia ou ressonância magnética e verificar possíveis células cancerígenas ou não. Referendando uma apreciação das formas que existem no ambiente, oportunizando ampla compreensão das iterações abundante, o que resultam em melhor observação e compreensão dos fenômenos que se dão nos diversos ambientes que a natureza contempla.

Mostramos a construção através de aulas expositivas e vídeos, pedindo para iniciar o procedimento descrito juntamente com seu algoritmo.

I. Conjunto de Cantor.

Foi chamado de “Poeira de Cantor” sendo uma das primeiras estruturas fractais reconhecidos e implementado pelo matemático George Cantor.

Segue o algoritmo iterativo abaixo:

- i- Considerar um segmento de reta unitário;
- ii- Dividir esse segmento em três partes iguais e extrair a parte central;
- iii- Aos segmentos restantes, aplica-se o passo anterior e assim sucessivamente.

Os procedimentos foram executados pelos estudantes utilizando folha de papel A4, régua, tesoura, lápis, borracha, esquadro.

Foram produzidas tiras com a dimensão pré-estabelecidas, representando segmento de retas, para poder realizar as iterações acima relatadas, mostrando claramente a réplica reduzida dos segmentos de retas, porém menor a cada iteração, produzindo a ideia de poeira de cantor, reforçando os conceitos de similaridade, fracionalidade e dimensão complexa com tendência ao infinito.

Segue sequência de figuras que representam os trabalhos desenvolvidos pelos estudantes referentes ao Conjunto de Cantor.



Figura 41 - Conjunto de Cantor do Estudante A

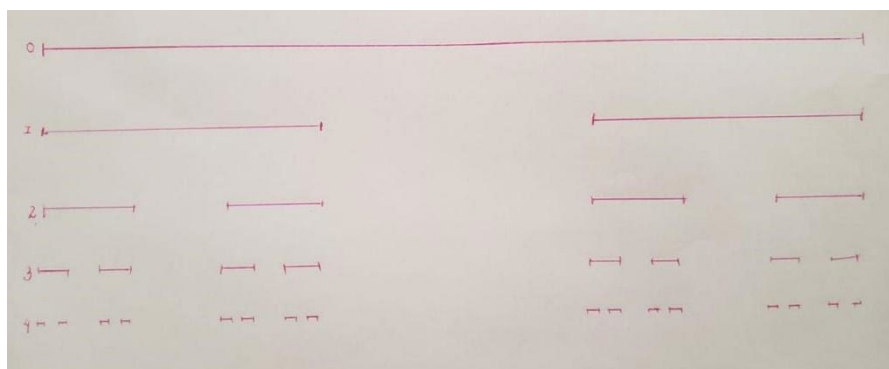


Figura 42 - Conjunto de Cantor do Estudante B

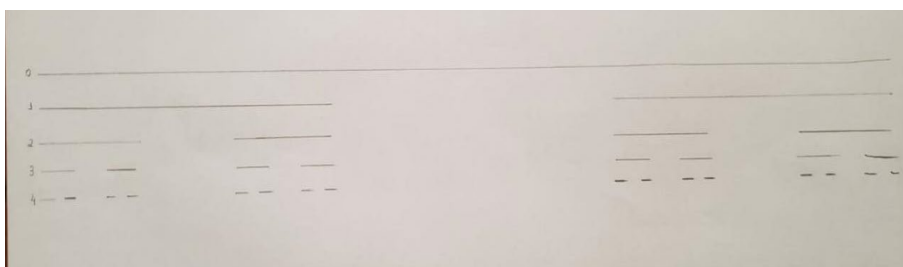


Figura 43 - Conjunto de Cantor do Estudante C

Como já demonstrado por Cantor, o resultado acima demonstrado traduz o executado é evidenciado abaixo pelo algoritmo: a conexão com o termo geral de uma progressão geométrica é sintetizada na tabela abaixo:

Iterações	Quantidade de segmentos
Nível 0	1
Nível 1	2
Nível 2	4
Nível 3	8
...	...

Figura 44 - Iterações do Conjunto de Cantor

FONTE: Google imagens

Os números que constituem as quantidades de segmentos a saber (2, 4, 8, ...) em cada iteração estruturam uma sequência numérica não nula, na qual se evidencia a razão constante entre os termos, o que por si só, já evidencia uma progressão geométrica. No caso da sequência gerada, a razão seria 2, generalizando, para se determinar a quantidade de segmentos que o fractal em tela, redundará em n iterações se aplicar a fórmula do termo geral de uma PG : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ onde a_n é o termo geral, n é o número de termos, a_1 é o primeiro termo e q é a razão entre os termos da referida progressão geométrica. Nesta etapa, 100 % dos estudantes conseguiram entender e identificar conceitos matemáticos nas iterações realizadas.

II. Triângulo de Sierpinski

Foi apresentado o algoritmo para a elaboração do Triângulo de Sierpinski que consiste em: considerar preliminarmente um triângulo equilátero e que no próximo passo, apropria-se dos pontos médios dos lados do referido triângulo e com origem nestes pontos concebem-se quatro triângulos equiláteros, extraíndo-se o triângulo central, ofertando a ideia de “retirada da área central”. repetir o mesmo procedimento nos três triângulos restantes, e assim sucessivamente, conforme a figura abaixo:



Figura 45 - Iterações do Triângulo de Sierpinski

FONTE: Google imagens

Os procedimentos foram executados pelos estudantes utilizando folha de papel A4, régua, esquadro, lápis de cor, lapiseira, tesoura e compasso na elaboração desse fractal e suas interações. Demonstrada segundo a sequência de figuras abaixo:

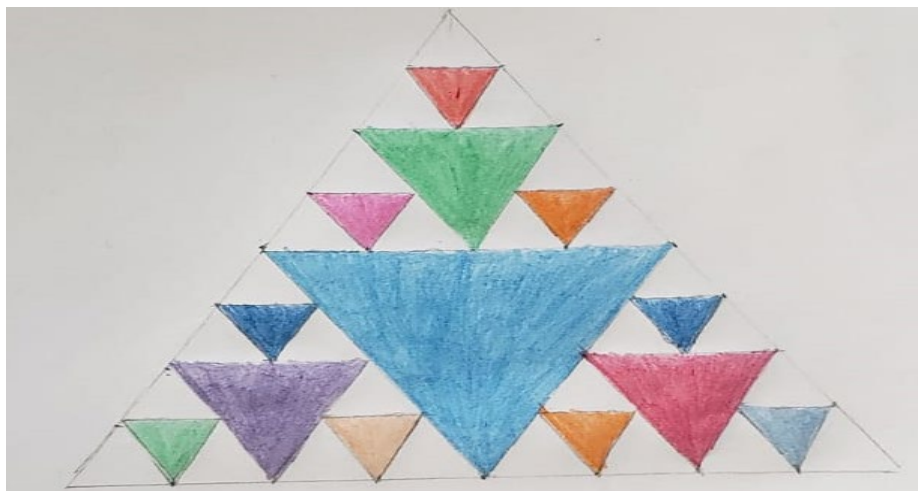


Figura 46 - Triângulo de Sierpinski do estudante A

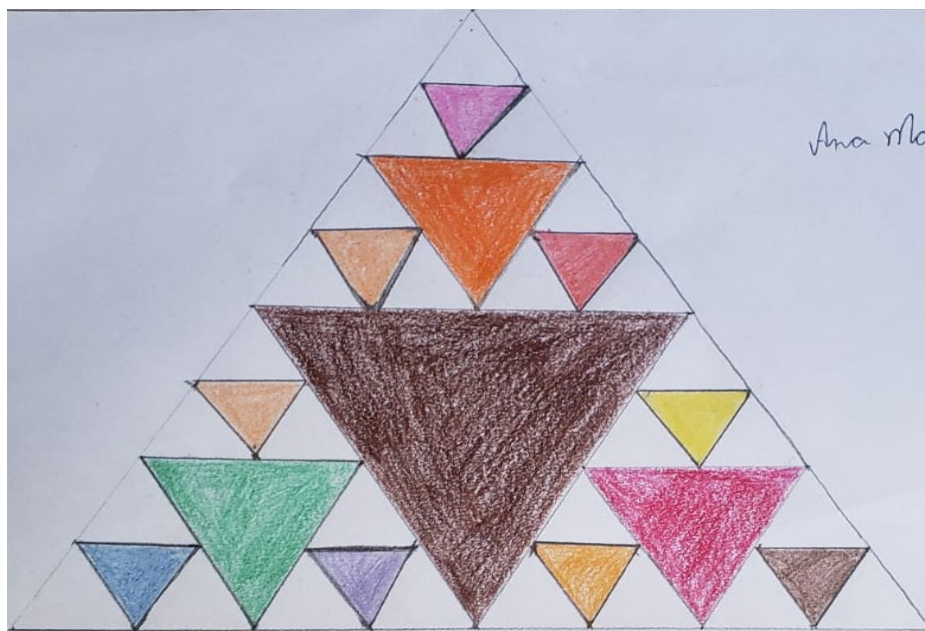


Figura 47 - Triângulo de Sierpinski do estudante B

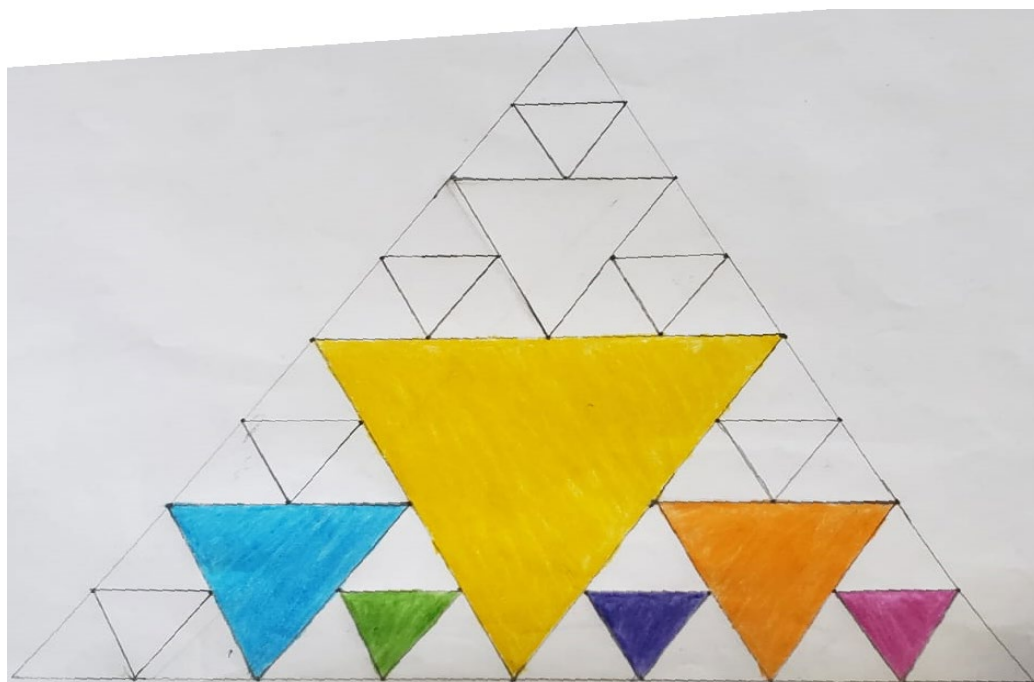


Figura 48 - Triângulo de Sierpinski do estudante C

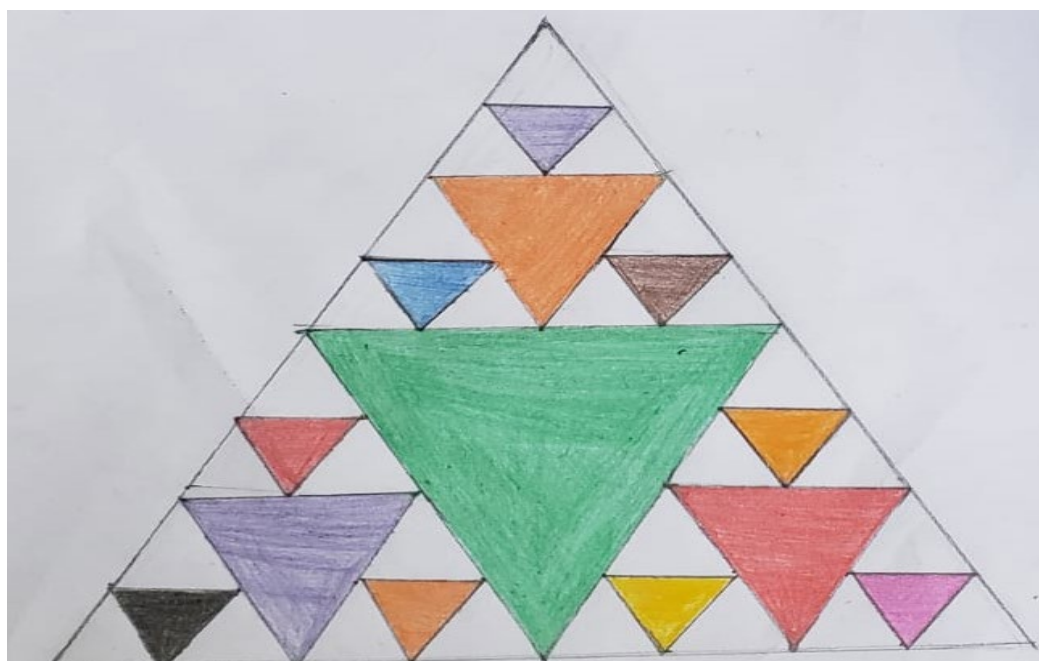


Figura 49 - Triângulo de Sierpinski do estudante D

A iteração observada pelos estudantes cursistas foi: ao tomarem o triângulo inicial obtiveram três triângulos com lados de dimensão equivalente à metade do triângulo inicial, com redução na ordem de grandeza 2 e o número de peças 3, tem-se então que:

$3 = 2^d$, $2 = 2^1$ e $2^2 = 4$, logo a dimensão do Triângulo de Sierpinski seria entre 1 e 2 e pode ser calculado através de operações com logaritmos abaixo:

$$\log 3 = \log 2^d \Rightarrow \log = d \cdot \log 2 \Rightarrow d = \frac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow d \approx 1,6$$

que constitui dimensão fracionada. Nesta etapa, 80 % dos estudantes conseguiram agregar os conhecimentos em relação ao trabalho executado, fazendo relação na compreensão dos conteúdos de Progressão Geométrica, ficando evidente de que o processo busca o infinito, sendo réplicas, mantendo todas as características do modelo Triângulo Inicial.

III. Tapete de Sierpinski

Essa estrutura fractal consiste em um conjunto formado pela união de oito subconjuntos não correspondentes e justapostos, sendo que cada um deles é correspondente à retração do conjunto inicial pelo coeficiente $\frac{1}{3}$. O referido fractal carrega em si autossimilaridade, propriedades irregulares e iteração infinita, tais considerações foram expostas durante o segundo momento.

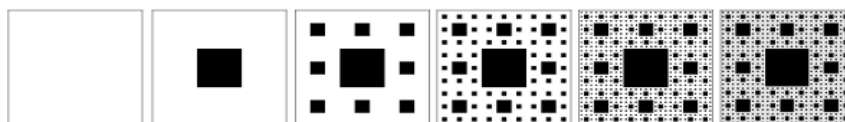


Figura 50 - Iterações Tapete de Sierpinski
FONTE: Google imagens

Na montagem do Tapete de Sierpinski pelos estudantes cursistas foram utilizados os seguintes materiais: folha A4, lápis de cor, régua, lápis e esquadro. Abaixo a sequência de figuras produzidas por eles.

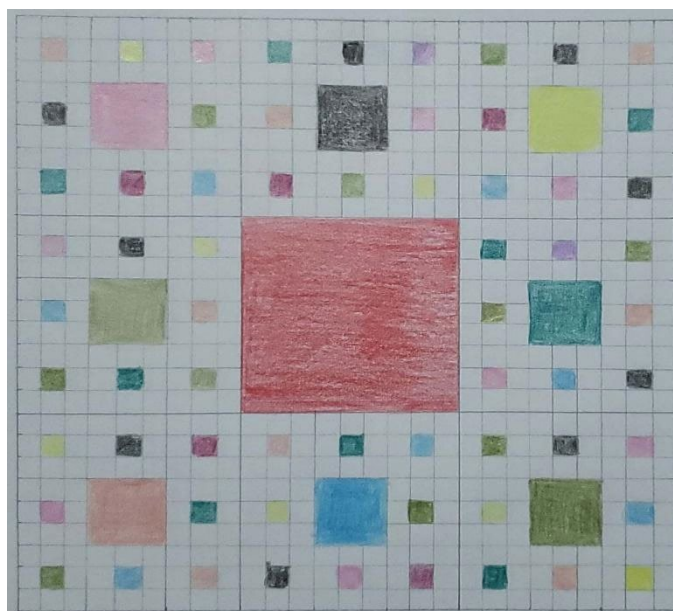


Figura 51 - Tapete de Sierpinski do estudante A

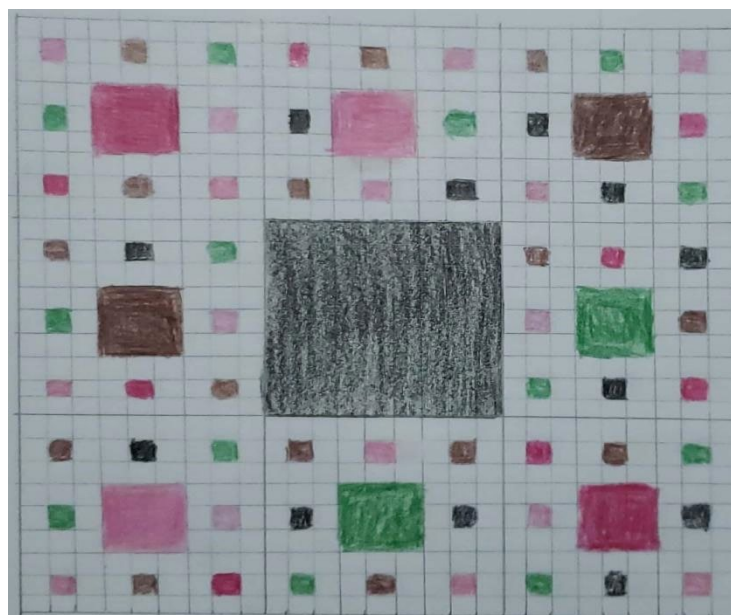


Figura 52 - Tapete de Sierpinski do estudante B



Figura 53 - Tapete de Sierpinski do estudante C

O algoritmo desenvolvido consiste no valor da área esvaziada no Tapete de Sierpinski que ocorre pela soma das áreas dos quadrados em face das n iterações resultantes de uma série geométrica convergente.

- A área do quadrado inicial corresponde ao lado l^2 .
- Nota-se que dá sequência de figuras iterativas, observa-se que em relação a área:
na primeira iteração será $\frac{1}{3}$ do quadrado de seu lado;
na segunda iteração será $\frac{1}{9}$ do quadrado de seu lado;
na terceira iteração será $\frac{1}{27}$ do quadrado de seu lado.
- Feita as iterações de forma sucessiva, obter-se-á uma série geométrica que converge, tendendo para zero.

Tais considerações foram expostas de forma didática no segundo momento pedagógico com os estudantes. Nesta etapa, 60% dos estudantes compreenderam a aplicação dos conceitos nas iterações, esse percentual poderia ser maior, devido a alguns deles não se manifestarem suas considerações. Diante disso, ocorre possibilidade de possível dúvidas, sanadas posteriormente acerca da quantidade de quadradinhos em cada iteração realizada. Só tiveram a percepção dos conceitos de

fractais embutidos, após a verificação do material produzido por eles, ficando visível a iteração realizada no material.

IV. Curva de Peano

Na montagem da Curva de Peano pelos estudantes cursistas foram utilizados os seguintes materiais: folha A4, lápis, esquadro, lápis de cor e régua.

O algoritmo utilizado para a construção dessa estrutura fractal consiste em:

- tomar um segmento de reta de tamanho l ;
- dividi-lo em três partes iguais, no $\frac{1}{3}$ médio;
- Construir um retângulo, constituindo dois quadrados, superior e inferior ao terço médio, que corresponde justamente ao lado do segmento original.
- Observa-se que formou nove segmentos de tamanho $\frac{1}{3}$ do original;
- reitera-se o procedimento, de forma sucessiva.

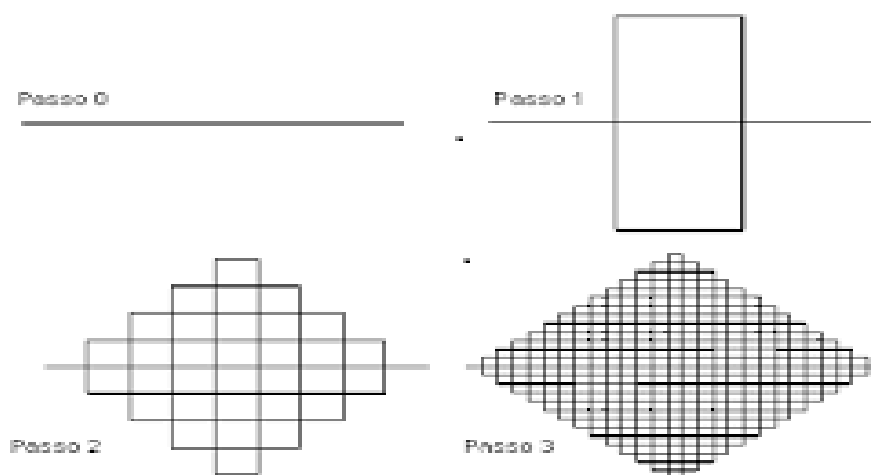


Figura 54 - Iterações da curva de Peano

FONTE: Google imagens

Nesta etapa houve maior dificuldade na produção das interações tendo um percentual de 30% dos estudantes que assimilaram com insegurança e imperfeição em relação aos conceitos e a construção do material. Dado o nível de abstração desse fractal, a dificuldade de compreensão ficou mais evidenciada. Muitos deles questionaram que, a partir de um segmento de reta é possível “criar o que eu quiser,

sem nenhuma lei ou algoritmo?”. Com interferência do professor, foi explanada requer uma lei de formação, que antes da geometria fractal eram considerados “monstros matemáticos”, por não ter uma explicação lógica e convincente que encaixavam nos padrões de formação geométrica daquela época. Os questionamentos demonstram que houve interesse em pelos menos observar e tentar compreender esse novo conceito de fractais, no entanto, tiveram a percepção dos conceitos de autossimilaridade, iteratividade e replicância que estavam presentes no material produzidos.

V. Curva de Koch

Na montagem da Curva de Koch pelos estudantes foram utilizados os seguintes materiais: folha A4, lápis e régua.

O algoritmo utilizado para a construção dessa estrutura fractal consiste em:

- toma-se um segmento de reta de tamanho l ;
- divide-se o referido segmento em três partes iguais, extrai-se a segmento central;
- troca-se a segmento retirado por um triângulo equilátero sem base de acordo com a figura abaixo.

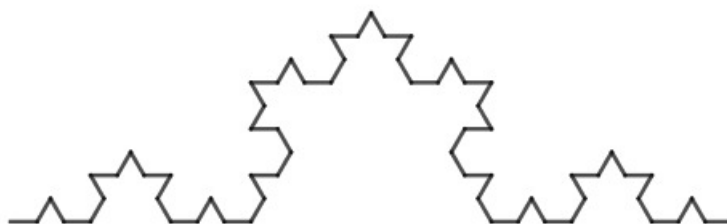


Figura 55 - Iterações da Curva de Koch

FONTE: <https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>, (2023)

- Observa-se que no estágio inicial da iteração, tem-se um segmento de reta;
- Na iteração seguinte, 4 segmentos com dimensão correspondente a $\frac{1}{3}$ da dimensão do segmento inicial.
- Observa-se que o número de partes similares é 4 e o fator de redução é 3.

Do algoritmo estruturado acima, decorre que a igualdade válida é: $4 = 3^d$, onde será a dimensão da curva, objeto da iteração.

Recorrendo aos logaritmos, especificamente na propriedade de uma potência temos que:

$$\log 4 = \log 3^d \Rightarrow \log 4 = d \cdot \log 3 \Rightarrow d = \frac{\log 4}{\log 3} \Rightarrow d \approx 1,3, \text{ portanto,}$$

converge para uma dimensão não inteira.

As considerações teóricas dessa estrutura fractal foram expostas aos estudantes, no segundo momento pedagógico, na apresentação do conhecimento sistematizado. Nesta etapa 100% dos estudantes compreenderam e produziram o fractal, pois ficou claro o conceito exposto, apropriando assim dos referidos conceitos que fundamentam a teoria da geometria de fractal.

VI. Cartão tridimensional

Na construção dessa estrutura fractal os estudantes utilizaram folha A4, cartolina, lápis de cor, régua, tesoura. Há uma tendência lúdica na construção desse modelo fractal.

O roteiro abaixo foi executado pelos estudantes para a elaboração do cartão tridimensional.

- utilizando uma folha de papel A4, de comprimento a e largura b , de acordo com a figura abaixo:

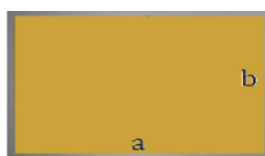


Figura 56 – Retângulo
FONTE: Google imagens

- assinalar o ponto médio da base b , resultando em dois retângulos 1 e 2;

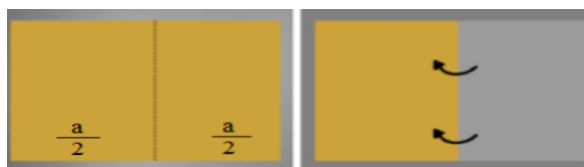


Figura 57 - Primeiro passo da construção do Cartão tridimensional
FONTE: Google imagens

- dobrar a folha, dividi-la ao meio, como mostra a figura abaixo:

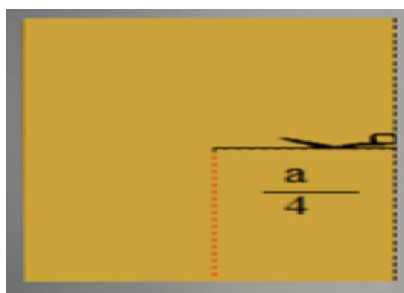


Figura 58 - Segundo passo da construção do Cartão tridimensional
FONTE: Google imagens

- efetuar dobra com o segmento que foi cortado para a parte interna de si:

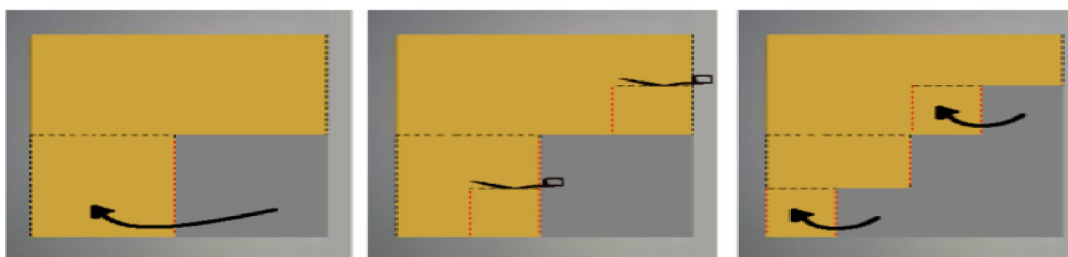


Figura 59 - Terceiro passo da construção do Cartão tridimensional
FONTE: Google imagens

- reiterar o processo mostrado anteriormente tantas vezes quanto for possível;
- Cole a folha A4 em uma cartolina colorida para resultar em um fundo destacável para o cartão tridimensional.

Nesta etapa, 30% deles conseguiram realizar a produção do cartão tridimensional sem ajuda do professor ou colegas. Abaixo a construção do Cartão tridimensional.

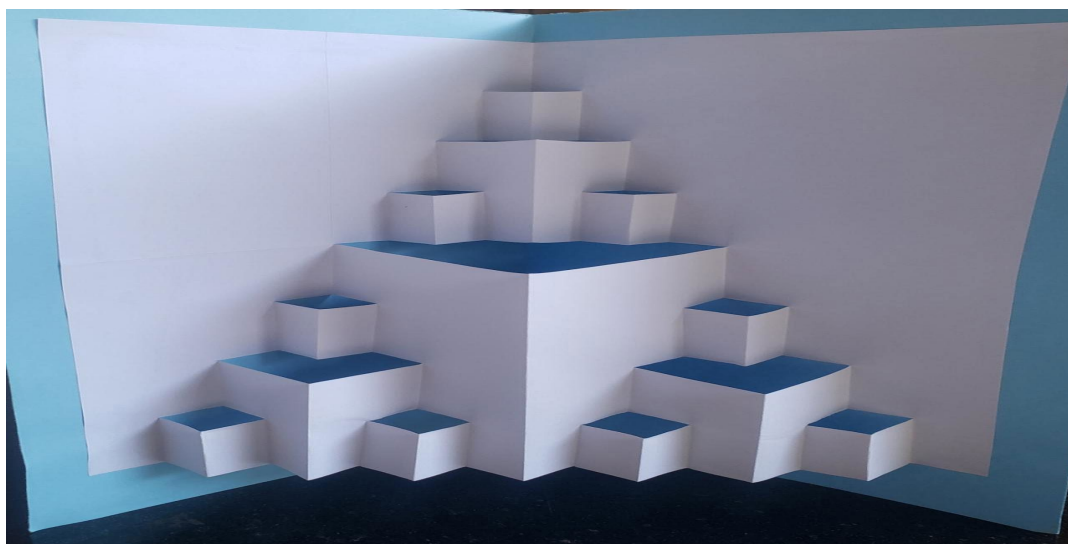


Figura 60 - Cartão tridimensional do Estudante A

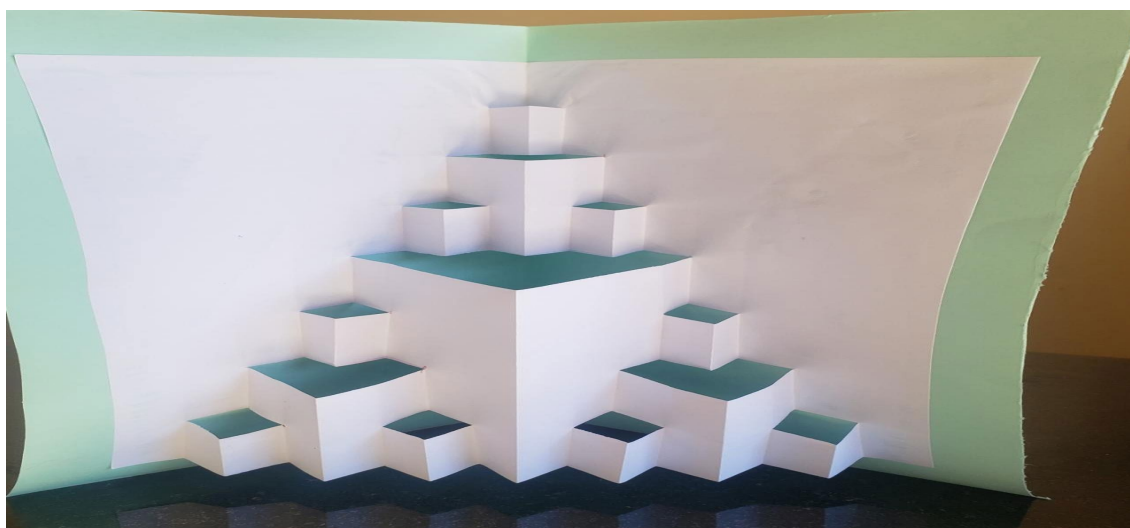


Figura 61 - Cartão tridimensional do Estudante B

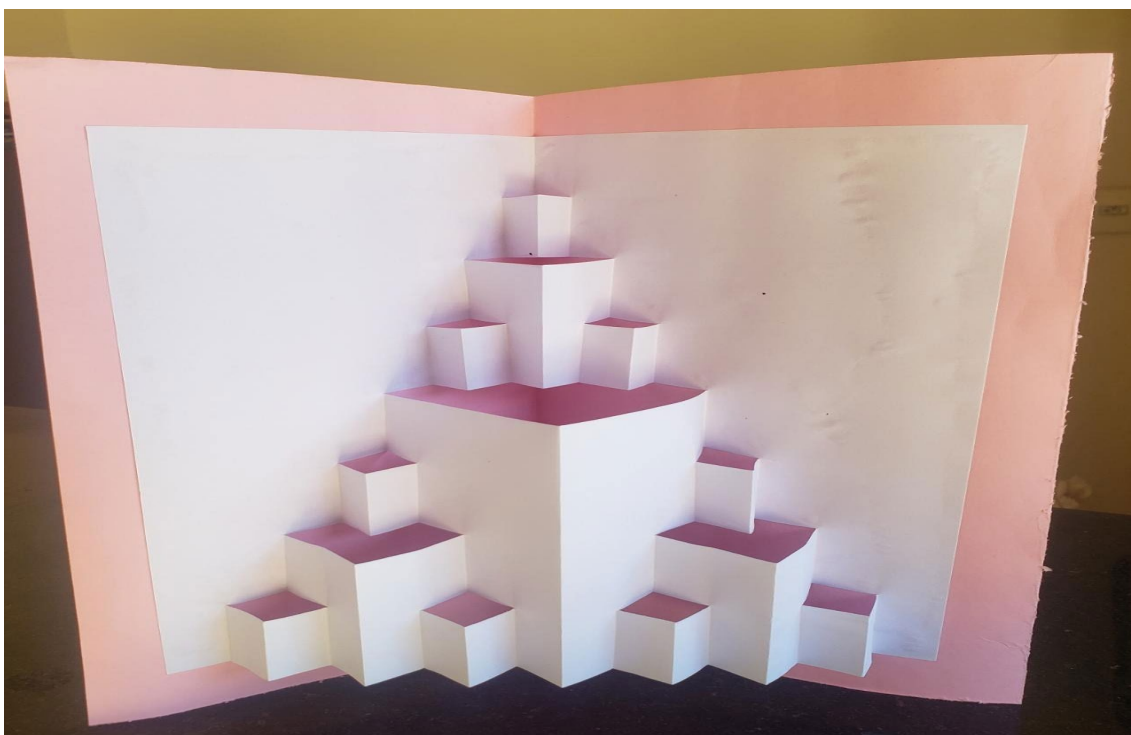


Figura 62 - Cartão tridimensional do Estudante C

4.2 Metodologia da Pesquisa

Na seção 2.3, vimos que para fractais obtidos de forma iterativa, a sua dimensão pode ser calculada pela equação $D = \frac{\log(n)}{\log(m)}$, onde n é a quantidade de partes similares produzidas após tomar o fator de redução m . No entanto, como proceder para calcular a dimensão de um fractal que não seja iterativo como, por exemplo, os da natureza? Certamente, a fórmula acima não se aplica nesses casos.

4.2.1 Critérios para análise qualitativa dos dados

Bogdan e Biklen (1994, p.16) afirmam que os dados qualitativos se apresentam materializados em aspectos de detalhes consistentes a locais, pessoas e narrativas, e de elaborado processamento estatístico que se constrói ao longo do próprio processo de observação.

Diante do exposto, a pesquisa contempla os fundamentos acima citados, na elaboração e implementação da sequência didática, com forma de analisar os aspectos qualitativos e quantitativos, na compreensão pelos estudantes, de conteúdo nas diversas áreas do conhecimento.

Segundo Bardin (2016, p. 17) a análise de conteúdo se fundamenta em uma técnica metodológica que se aplica em discursos dispostos dos mais variados modos, englobando toda forma que contemplem esses discursos.

A referida análise terá três fases:

- pré-análise;
- categorização;
- tratamento dos resultados.

Considerando a Análise do Conteúdo foram estruturados Indicadores e Categorias de Análise para a apreciação dos dados formados durante Sequência Didática, com base nos princípios orientadores da Geometria de Fractais segundo a teoria de Mandelbrot (1989) e Angotti (1999) já fartamente demonstradas ao longo da pesquisa, combinadas às teorias do ponto de vista pedagógico quanto as suas aplicações fundamentadas nos três momentos pedagógicos já devidamente analisados conforme tabela abaixo:

Tabela 3 - Análise de conteúdo: Indicadores e Categorias

Indicadores	Categoria de Análise
Impressões iniciais dos estudantes sobre Geometria de Fractais através da disponibilização de questões e exibição, materiais concretos, como brócolis, samambaias, couve-flor e fotos. Superfícies irregulares e rugosidades de elementos da natureza	A correlação com elementos da Matemática e da Física e o conhecimento prévio dos estudantes. Percepção dos estudantes sobre a Geometria de Fractais Reconhecimento de formas fractais em elementos da natureza
Apresentação dos conhecimentos sistematizados pertinentes a caracterização dos sistemas ambientais Autossimilaridade. Complexidade Infinita. Irregularidade. Dimensão	Compreensão de conceitos e definições sobre Geometria de Fractais e seus elementos constitutivos. Compreensão dos estudantes sobre a caracterização dos sistemas ambientais, incluindo os conceitos de autossimilaridade, complexidade infinita, irregularidade e dimensão

	Reconhecimento pelos estudantes de sistemas ambientais que apresentam características fractais
Execução com base nas habilidades e competências de modelos apreciados no referencial e sua relação com as impressões iniciais apreciadas. Recursividade. Iteratividade dos modelos fractais	Ênfase nos processos de ensino e aprendizagem dos estudantes, destacando a interdisciplinaridade combinada aos novos saberes científicos incorporados por eles com a aplicação da Geometria de Fractais. Compreensão dos estudantes sobre a execução dos modelos iterativos fractais e sua relação com as habilidades e competências apresentadas no referencial Identificação de elementos de recursividade e iteratividade presentes nos modelos fractais

4.2.2 A correlação com elementos da Matemática e da Física e o conhecimento prévio dos estudantes.

Na aplicação do estudo da geometria de fractais, evidencia a percepção ao término do primeiro momento pedagógico que alguns conceitos intuitivos como similaridade, simetria, ramificação, perímetro, área, contagem, conjuntos, puderam ser constatados pelos estudantes em relação a geometria euclidiana, bem como outros.

Neste momento, mesmo que intuitivamente o entendimento de fractais, quando fomentados durante o primeiro momento pedagógico, a maioria dos estudantes convergiram para os conceitos mencionados.

Tal fato pode ser corroborado conforme declaração de alguns cursistas descritos abaixo.

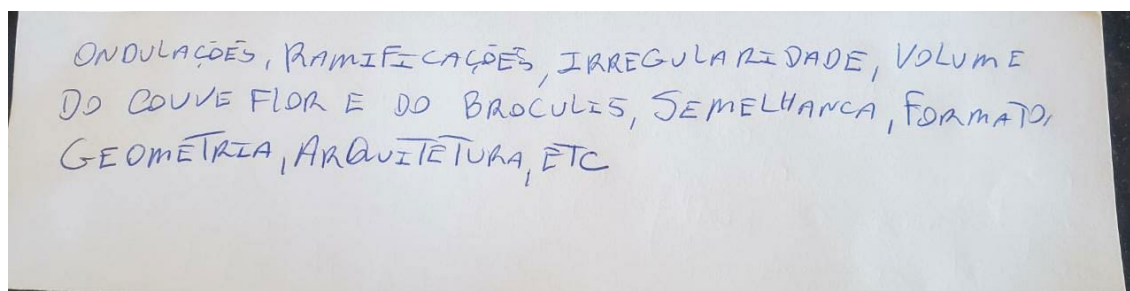


Figura 63 - Considerações do estudante A

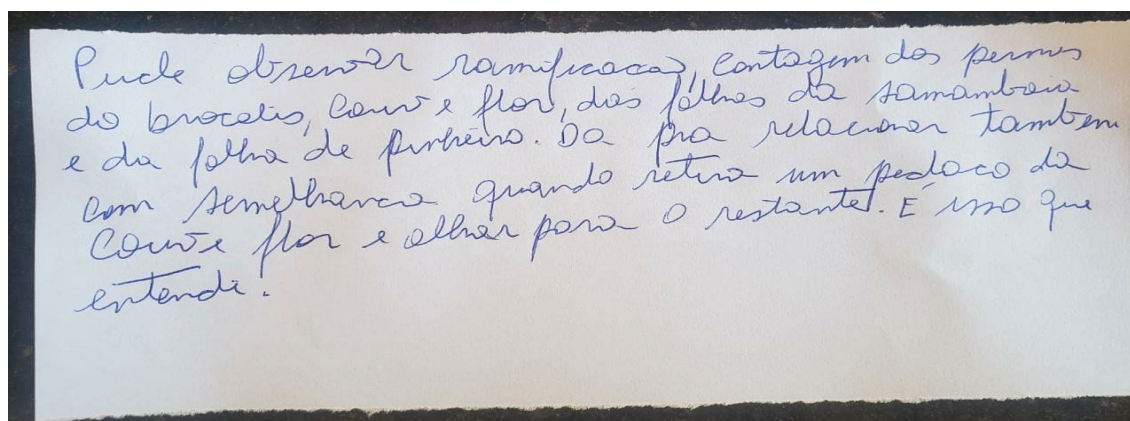


Figura 64 - Considerações do estudante B

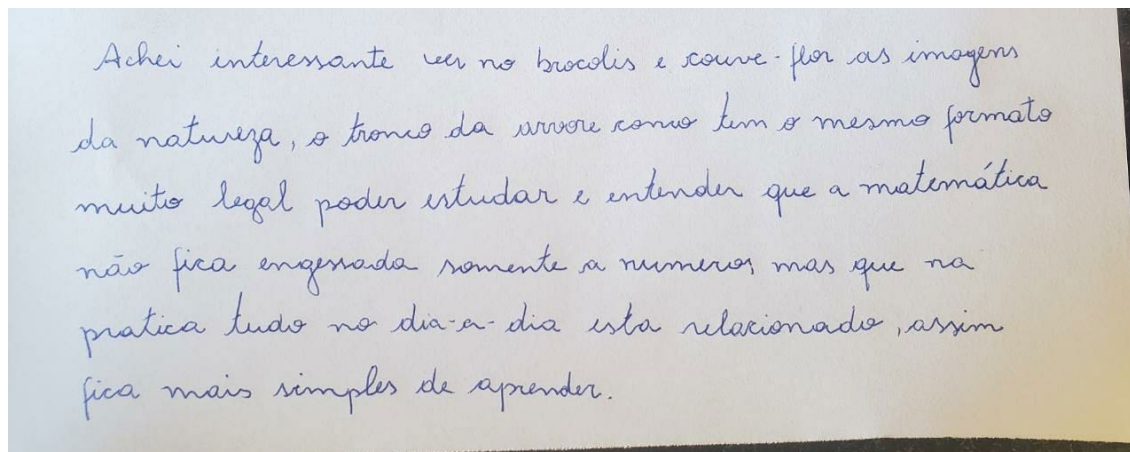


Figura 65 - Considerações do estudante C

4.2.3 Compreensão de Conceitos e Definições sobre Geometria de Fractais e seus Elementos Constitutivos

Durante o segundo momento pedagógico foram introduzidos os conhecimentos sistematizados sobre a geometria de fractais em direção a iteratividade, similaridade, dimensão fracionada, complexidade infinita.

Foram abordados os principais pressupostos e parâmetros desta e sua correlação com a geometria euclidiana.

Pude observar os seguintes pontos: intuitivamente no primeiro momento pedagógico eles já apresentavam a compreensão dos conceitos fundamentais da geometria de fractais.

Ao apreciarem o referencial sistematizado, conseguiram agregar o que já possuíam com conhecimentos prévios, relacionando com o teórico apresentado, inclusive listando as múltiplas aplicações que os fractais possibilitam em termos práticos.

Houve a percepção, por parte dos estudantes, da conexão dos fundamentos demonstrados, com tópicos de matemática que já foram estudados em séries anteriores no ensino básico, tais como: progressão aritmética e geometria, semelhança, ângulos, simetria, teorema de Tales, logaritmo, funções, equações, inequações, análise combinatória, probabilidade, estatística, geometria espacial, topologia, geologia, física médica, sistema digestivo, reprodutivo e excretor, fenômenos da natureza, tais como raios, trovões, relâmpagos, brisa, nuvens, tornados, furacões, vulcões em erupção, óptica, hidrografia, dentre outros.

Durante a apresentação do referencial teórico surgiram muitas colocações dos estudantes cursistas que demonstraram articular os conceitos novos com os conteúdos que já haviam estudado anteriormente na escola.

4.2.4 Elaboração das Estruturas Fractais pelos Estudantes e a Aplicação dos Novos Saberes Científicos Incorporados com a Aplicação da Geometria de Fractais.

No terceiro momento pedagógico, os estudantes puderam construir de forma lúdica diversas estruturas fractais estudadas, relacionando-as com a geometria em questão os conceitos abordados durante a intervenção.

É relevante apontar as seguintes situações que pude observar durante a aplicação: os estudantes cursistas demonstraram muita desenvoltura na elaboração de cada estrutura fractal materializada, devido ser um público que realmente tinha interesse em participar, devido sua participação ser realizada no contraturno e ter facilidades com conhecimento matemático.

A maior parte conseguiu executar a montagem das figuras fractais, verificar os parâmetros que envolveram a iteratividade, autossimilaridade, dimensão fracionada e correlação os elementos da natureza (primeiro momento pedagógico). Os estudantes tiveram a percepção da integração do que foi exposto no segundo momento pedagógico e a elaboração de material concreto executado por eles.

5. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática apresentada teve como objetivo proporcionar aos estudantes uma compreensão mais profunda sobre a geometria de fractais e sua relação com a caracterização de sistemas naturais complexos, utilizando conceitos de matemática e física. A partir dos três momentos pedagógicos propostos por Delizoicov, Angotti e Pernambuco, foram elaboradas atividades que buscaram despertar o interesse dos estudantes, desafiá-los a buscar soluções para situações-problema e auxiliá-los na organização dos conhecimentos construídos.

Durante as cinco primeiras aulas, foram apresentados os conceitos fundamentais sobre a geometria de fractais e suas propriedades, além de exemplos de fractais presentes na natureza. Nas aulas seguintes, foram propostas situações-problema que desafiaram os estudantes a aplicar os conceitos estudados na análise de sistemas naturais complexos, utilizando softwares e simulações. Por fim, nas últimas aulas, foram realizadas atividades de síntese e aplicação dos conhecimentos adquiridos, além de uma avaliação formativa e qualitativa da aprendizagem dos estudantes.

A sequência didática teve como ponto forte a utilização de atividades práticas e situações-problema, que permitiram aos estudantes uma aprendizagem mais significativa e contextualizada. Além disso, a utilização dos três momentos pedagógicos propostos por Delizoicov, Angotti e Pernambuco proporcionou uma organização coerente e estruturada das atividades desenvolvidas.

Ressalte-se que a sequência didática proposta apresentou uma abordagem diferenciada para o estudo da geometria de fractais e sua relação com sistemas naturais complexos, utilizando conceitos de matemática e física. Espera-se que os estudantes tenham adquirido uma compreensão mais ampla e aprofundada sobre o tema, além de

terem desenvolvido habilidades importantes para a análise de sistemas naturais complexos.

Observou-se que a utilização dos três momentos pedagógicos com base nos autores Delizoicov, Angotti e Pernambuco foi importante para a aplicação da sequência didática sobre geometria de fractais e sistemas naturais complexos. Esses momentos pedagógicos foram utilizados para apresentar os conceitos fundamentais, propor situações-problema e promover atividades de síntese e aplicação dos conhecimentos adquiridos pelos estudantes. Através desse processo, os alunos puderam construir uma aprendizagem mais significativa e contextualizada, desenvolvendo habilidades importantes para a análise de sistemas naturais complexos.

Além disso, a abordagem diferenciada e prática utilizada na sequência didática pode ter contribuído para despertar o interesse dos estudantes pelo tema e para a aquisição de uma compreensão mais ampla e aprofundada sobre a geometria de fractais e sua relação com a natureza. Essa abordagem pode ter permitido aos estudantes uma compreensão mais concreta e visual dos conceitos apresentados, o que pode ter ajudado a tornar a aprendizagem mais significativa para eles.

No entanto, é importante lembrar que essa consideração é baseada apenas no quadro observado durante a aplicação da intervenção e em uma análise geral do processo de ensino aprendizagem descrito na sequência didática. Outros fatores, como a motivação dos estudantes, a timidez, o contexto da sala de aula e a forma como foi aplicada a sequência pelo professor, também podem ter influenciado no processo de ensino aprendizagem.

6. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

No encerramento da primeira etapa pedagógica, verificou-se que alguns conceitos intuitivos da geometria euclidiana, tais como similaridade, simetria, ramificação, perímetro, área, contagem e conjuntos, foram compreendidos pelos estudantes, dentre outros. Nesse momento, mesmo que o entendimento dos fractais seja intuitivo, a maioria dos estudantes compreendeu-os quando estimulados durante a primeira fase pedagógica. Para isso, disponibilizou-se aos estudantes materiais diversos para observação e análise, como couve-flor, brócolis, samambaia, folder sobre o sistema renal, sistema respiratório, sistema nervoso, tomografia com células cancerígenas, costa terrestre do continente asiático, nuvens, montanhas, vulcão em erupção, dissipação de raios na natureza, entre outros.

Os estudantes observaram atentamente os materiais disponibilizados, buscando relacioná-los com a matemática e a física, além de outras da grade curricular. Alguns deles retiraram uma parte dos brócolis e compararam com o restante, e foi evidenciado que tratava justamente de uma réplica idêntica, em menor tamanho. Reduziram mais ainda e tiveram a mesma percepção. O mesmo processo foi realizado com a folha de samambaia e couve-flor. Diante dos fatos observados, os estudantes começaram a compreender a lei de formação, percebendo que ela não se altera independentemente da escala utilizada, ou seja, uma parte é uma réplica do todo. Mas também teve estudantes que, devido a timidez e não compreender a forma da metodologia empregada, não interagiram, sendo uma incógnita explícita. Diante disso, pode ter duas análises, estão compreendendo tudo ou nada. Feito o incentivo em expor suas observações dos objetos, mas continuaram inerte.

O vídeo apresentado sobre fractais evidenciou a necessidade percebida por Benoit Mandelbrot em entender a geometria da natureza, visto que a geometria euclidiana, trabalhando apenas com dimensão inteira, deixava lacunas para uma explicação mais precisa dos sistemas ambientais. As imagens apresentadas mesclaram arte e matemática, proporcionando belas imagens e apresentando os famosos autores de lindas artes ao longo dos séculos, exemplo, Leonardo da Vinci.

Essa etapa pedagógica permitiu que os estudantes conferissem suas reações a esse novo conteúdo, ainda não explorado. O sistema renal e nervoso foi apresentado, e os estudantes puderam visualizar e entender que se tratava de imagens fractais, já

que uma pequena parte do sistema é legível como uma réplica do todo, principalmente as ramificações das “veias” em ambos os sistemas, evidenciando as características fractais. Essa complexidade torna difícil explicação usando geometria euclidiana, devido não oferecer uma forma geométrica que contemple todos os detalhes explícitos.

Durante o segundo momento pedagógico, foram introduzidos os conhecimentos sistematizados sobre a geometria de fractais, com foco na iteratividade, similaridade, dimensão fracionada e complexidade infinita.

Durante o segundo momento pedagógico, foram abordados os principais pressupostos e parâmetros da geometria de fractais, bem como sua correlação com a geometria euclidiana. A intervenção teve papel fundamental nessa etapa, explicando e aprofundando sobre a geometria de fractais e os estudiosos envolvidos, os quais, antes, eram considerados “monstros matemáticos”, pela ineficiência, incapacidade de uma definição precisa e uma lei de formação e aplicação.

Para reforçar o entendimento das características fractais, os estudantes assistiram novamente os vídeos, buscando uma melhor compreensão desses conceitos. A fixação desses conceitos é de extrema importância para que possam aplicá-los em situações práticas e cotidianas, bem como compreender a geometria da natureza e dos sistemas ambientais de forma mais precisa e abrangente. Essa nova geometria de fractais apresenta uma abordagem mais refinada e detalhada do que a geometria euclidiana, permitindo uma melhor compreensão dos sistemas complexos.

Após a apresentação dos fundamentos da geometria de fractais, foram analisadas as percepções dos estudantes em relação às conexões desses conceitos com tópicos de matemática que já haviam sido estudados em séries anteriores, tais como progressão aritmética e geométrica, semelhança, ângulos, simetria, logaritmo, funções, equações, inequações, análise combinatória, probabilidade, estatística, geometria espacial, topologia, geologia, física médica, sistema digestivo, reprodutivo, excretor, renal, nervoso, fenômenos naturais, como raios, trovões, relâmpagos, brisa, nuvens, tornados, furacões, vulcões em erupção, óptica, hidrografia, dinâmica da ocupação de árvores em uma determinada floresta entre outros.

Durante a aplicação da geometria de fractais, surgiram muitas colocações dos estudantes que demonstraram habilidade em articular os conceitos novos com os conteúdos que já estudados. É relevante apontar algumas situações que foram

analisadas durante a aplicação: os estudantes demonstraram muita desenvoltura na elaboração de cada estrutura fractal materializada, visto que se tratava de um público interessado e em participar, com facilidade para compreender conceitos matemáticos e físicos.

Durante a aplicação da geometria de fractais, a maioria dos estudantes conseguiu executar e desenhar as figuras fractais, verificando os parâmetros que envolveram a iteratividade, autossimilaridade, dimensão fracionada, complexidade infinita e correlação com elementos da natureza. O trabalho de desenhar e realizar as etapas das iterações foi realizado em grupo, o que possibilitou uma integração no processo de ensino-aprendizagem, sem muitas dificuldades para entender os conceitos explícitos nos fractais confeccionados. A curva de Peano foi o mais complexo na visão grupal, devido ao nível de abstração e observação ser elevado. Sua construção não ficou com uma caracterização perfeita, mas conseguiram entender sua construção e o mais importante, as características fractais.

Nessa etapa, cerca de 80% dos estudantes conseguiram compreender a amplitude do uso de fractais, com o uso das montagens das estruturas fractais, mostrando situações relevantes na construção de conhecimentos pertinentes a essa nova vertente matemática, permitindo a correlação com conteúdo já estudados e sua aplicação prática. Esses conteúdos já elencados e discutidos, anteriormente. Para os estudantes, houve um aumento no grau de abstração e observação de conteúdo, a fim de, posteriormente, utilizar em algum contexto, seja real ou complexo.

Os resultados obtidos demonstram que a utilização da geometria de fractais como ferramenta pedagógica pode trazer benefícios significativos para o processo de ensino-aprendizagem, possibilitando aos estudantes uma compreensão mais ampla dos conceitos matemáticos e sua aplicação prática em diversos contextos. Além disso, a execução das atividades em grupo possibilitou uma troca de experiências e conhecimentos entre eles, enriquecendo ainda mais o processo de aprendizagem, demonstrando essa nova forma de abordagem, ventila possibilidades de interdisciplinaridade, caminho este, para um ensino, antes isolados e imperceptível de difícil aplicabilidade no mundo real, usando apenas fórmulas, desprovidos de

contextualização ou relação com conhecimentos prévios, posicionando os estudantes, como parte do processo de ensino aprendizagem.

A Geometria de Fractal, além de beneficiar vários conteúdos na educação, também beneficia várias outras áreas do conhecimento, tais como, medicina, topologia, agrimensura, geologia, engenharias, agronomia, astronomia, entre outros. Essa geometria ainda pouco explorada, é esperado, contribuir muito com a sociedade, pois a cada novo estudo, fica evidenciado sua aplicação em ampliação.

7. CONCLUSÃO

A sequência didática elaborada e testada neste trabalho alcançou os objetivos geral e específicos propostos. Através da aplicação da Geometria de Fractais em sistemas ambientais, foi possível facilitar o aprendizado de conceitos matemáticos e físicos, desenvolver o pensamento lógico na caracterização de sistemas ambientais e disponibilizar elementos para uso em outros contextos educacionais. Os objetivos específicos foram atingidos através da apresentação da dimensão dos fractais na natureza, identificação da importância da interdisciplinaridade entre a Matemática e a Física, busca de estratégias para compreensão da Geometria de Fractais, construção de modelos iterativos fractais e avaliação da participação dos estudantes na compreensão dos conteúdos matemáticos usando fractais como referência.

Os resultados da pesquisa indicam que a primeira etapa pedagógica foi atingida, pois os estudantes compreenderam conceitos da geometria euclidiana e da lei de formação dos fractais ao observar e analisar materiais diversos. Alguns estudantes não interagiram devido à timidez ou falta de compreensão da metodologia empregada. A apresentação do vídeo sobre fractais e sua relação com a geometria da natureza evidenciou a importância de compreender a geometria dos sistemas ambientais, que muitas vezes apresentam características fractais. Esses resultados indicam que a sequência didática proposta foi eficaz em desenvolver a compreensão dos estudantes sobre a geometria de fractais e sua relação com a natureza.

No segundo momento pedagógico, os pressupostos e parâmetros da geometria de fractais foram abordados e relacionados com a geometria euclidiana, com a intervenção do professor sendo fundamental para o aprofundamento do entendimento

sobre a geometria de fractais. Os estudantes assistiram novamente aos vídeos para reforçar o aprendizado e analisaram as conexões dos conceitos com tópicos de matemática e outros conteúdos, indicando que a sequência didática proposta foi eficaz em desenvolver a compreensão dos estudantes sobre a geometria de fractais e sua aplicação em diferentes áreas do conhecimento.

No terceiro momento pedagógico durante a aplicação da geometria de fractais, os estudantes demonstraram habilidade em articular conceitos novos com conteúdo já estudados e conseguiram executar e desenhar as figuras fractais, verificando os parâmetros que envolvem a autossimilaridade, dimensão fracionada e complexidade infinita. A maioria dos estudantes compreendeu a amplitude de uso dos fractais, permitindo a correlação com conteúdo já estudados e sua aplicação prática. A curva de Peano foi o mais complexo, mas os estudantes conseguiram entender sua construção e suas características fractais. Esses resultados indicam que a sequência didática proposta foi eficaz em desenvolver a compreensão dos estudantes sobre a geometria de fractais e sua aplicação em situações práticas.

A sequência didática ancorada nos três momentos pedagógicos sobre geometria de fractais e sistemas naturais complexos mostrou-se eficaz no desenvolvimento do pensamento lógico e na compreensão de conceitos matemáticos e físicos pelos estudantes. A utilização da geometria de fractais como ferramenta para análise e compreensão de sistemas complexos oferece possibilidades de contribuição para novas teorias em diversas áreas do conhecimento. A abordagem prática utilizada na sequência didática pode contribuir para despertar o interesse dos estudantes por temas complexos e para a aquisição de uma compreensão mais ampla e aprofundada sobre geometria de fractais e sua relação com a natureza, possibilitando o desenvolvimento de novas teorias e aplicações em diferentes áreas do conhecimento.

As limitações da pesquisa sobre Geometria de Fractais, que foi realizada com uma turma de 10 (dez) estudantes do ensino médio em uma escola pública que se propuseram a participar no contraturno o que gerou as seguintes limitações apontadas: o tamanho da amostra e o tempo reduzido para aplicação da sequência didática, o que pode dificultar a generalização dos resultados para outros contextos e aprofundamento da análise dos resultados; a dificuldade na coleta de dados em face a pandemia; desestímulo na participação em face dos protocolos utilizados na escola no pós

pandemia. Como sugestão para superar essas limitações, é proposta a realização de pesquisas posteriores em diferentes contextos e com amostras maiores, com um tempo de aplicação mais estendido, além da aplicação de questionários e entrevistas para obter informações mais detalhadas sobre o impacto da sequência didática na aprendizagem e compreensão dos conceitos de geometria de fractais.

Os objetivos e resultados da pesquisa desenvolvida resultou em uma sequência didática para o ensino de Geometria de Fractais em sistemas ambientais. O trabalho se fundamentou na aplicação dessa sequência didática, alcançando os objetivos propostos e permitindo a compreensão de conceitos matemáticos e físicos pelos estudantes. Os resultados indicam que a abordagem prática utilizada na sequência didática pode contribuir para despertar o interesse dos estudantes por temas complexos e para a aquisição de uma compreensão mais ampla e aprofundada sobre geometria de fractais e sua relação com a natureza, oferecendo possibilidades de contribuição para novas teorias em diversas áreas do conhecimento.

Espera-se que a dissertação permita contribuir para a compreensão e difusão da Geometria de Fractais no contexto da educação básica, ampliando o desenvolvimento de habilidades matemáticas e físicas pelos estudantes. No entanto, há ainda um vasto campo de pesquisa a ser explorado no que diz respeito à aplicação da Geometria de Fractais em diferentes áreas do conhecimento, bem como em outras etapas de ensino. Sugere-se, portanto, que futuras pesquisas abordem a utilização de fractais em outras disciplinas, como biologia e geografia, por exemplo, ventilando a interdisciplinaridade como ferramenta pedagógica. Além disso, também se faz necessário investigar a aplicação de fractais em situações cotidianas, a fim de tornar o aprendizado ainda mais significativo para os estudantes e aproximar a Matemática e a Física da realidade em que vivem.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, A. A.O. Os fractais na formação docente e sua prática em sala de aula. Dissertação de mestrado – Departamento de Matemática, PUC, São Paulo, SP, Brasil, 2006.

ALVES, C.M.F.S.J. Fractais: conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário. Dissertação de mestrado – Departamento de Matemática, Universidade de Lisboa, Portugal, 2007.

ALVES, A. D., MENEZES, J. E., NOGUEIRA, R. A. introduzindo a geometria fractal no ensino médio: uma abordagem baseada nas formas dos objetos construídos pela natureza. Latin American Journal of Development, Curitiba, v. 3, n. 4, p. 2847-2857, Jul./Ago. 2021. ISSN 2674-9297

ALVES, R. L., SOUZA, P.V.S., BALTHAZAR, W.F., Fractais em sala de aula: investigando dimensões fracionadas em padrões de Speckle com materiais de baixo custo. Anais da VIII Jornada Científica. IFMT. Volta Redonda, RJ. 2017. Disponível em: <https://portal.ifrj.edu.br/sites/default/files/IFRJ/Volta%20Redonda/Pesquisa/JornadaCientifica/anais_viii_jornada_cientifica_2017_ifrj_campus_volta_redonda.pdf>. Acesso em jul. 2021.

ANDRADE, S. R.M, M. M. L., MESSIAS, C. M. B. O. ANÁLISE DE UM PROJETO PEDAGÓGICO: FRACTAL E TEORIA DO CAOS PARA INTEGRAÇÃO DE CONTEÚDOS. Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação, Araraquara, v. 15, n. 1, p. 206-220, jan./mar. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.21723/riace.v15i1.12263>>. Acesso em: nov.2021.

ANGOTTI, J. A. P. II ENSINO DE CIÊNCIAS E COMPLEXIDADE, 1999. Disponível em < <http://www.abrapecnet.org.br/enpec/ii-enpec/index.html> > . Acesso em nov.2022.

ANGOTTI, José André Peres. Ensino de Física com TDIC. Florianópolis: UFSC/EAD/CFM/CED, 2015 Disponível em: < <http://ced.ufsc.br/files/2016/01/Livro-Angotti.pdf> > Acesso em: jul. 2021.

AZEVEDO, Thiago Salomão. Análise Espaço Temporal da Dimensão Fractal de Matas Ciliares na Alta Bacia do Rio Passa Cinco – Centro Leste do Estado de São Paulo. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro, 2003.

BAIER, Tânia. O nexa geometria fractal – produção da ciência contemporânea tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico. UNESP 2005. Disponível em < <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102079> >. Acesso em: 20 jul. 2022.

BARABÁSI, A.-L. e STANLEY, H.E. Fractal Concepts in Surface Growth. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

BARBOSA, R. M. Descobrindo a Geometria Fractal para a Sala de Aula. Coleção: Tendências em Educação Matemática, Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BOGDAN, Robert.; BIKLEN, Sari Knopp. Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL, Ministério da Educação. BNCC - Base Nacional Comum Curricular. 2019.

BRISANTE, Ilca Maria. Fractais no ensino médio. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. São José do Rio Preto, 2013.

BOGDAN, R. C., BIKLEN, S. K. Investigação Qualitativa em Educação. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

CARVALHO, H. C. Geometria Fractal: Perspectivas e possibilidades para o ensino de Matemática. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal do Pará. Belém, PA: UFPA, 2005.

CÔRTEZ, I., ANTUNES, G. Geometria fractal no ensino médio: teoria e prática. Revista Professor de Matemática. PMO v.2, n.1, 2014. Disponível em: < <https://doi.org/10.21711/2319023x2014/pmo23> >. Acesso em nov.2022.

CURVO, Luís Otávio dos Reis. Teoria de Escala Metabólica (MST): Análise e Investigação de Fatores Restritivos dos Biomas que alteram o Coeficiente Alométrico. 2022. Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física Ambiental, Cuiabá, 2022.

DA SILVA TAVARES, Andréia. ANÁLISE DA EVAPOTRANSPIRAÇÃO E CONDUTÂNCIA COMO PROCESSO DINÂMICO EM DOIS ECOSSISTEMAS AMAZÔNICOS NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA COMPLEXIDADE. Orientadora: Iramaia Jorge Cabral de Paulo. Tese (doutorado) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Física, Programa de Pós-Graduação em Física Ambiental, Cuiabá, 2015.

DELIZOICOV, D; ANGOTTI, J.A.P.; PERNAMBUCO, M.M.C. A. Ensino de Ciências: fundamentos e métodos. São Paulo: Cortez, 2002.

DINIZ, Alex Santos. Uma análise histórica sobre Os Elementos de Euclides. 2020. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologias - CCET. PPGMAT-UFMA.2020.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. (Org.). Dicionário em construção: interdisciplinaridade. 2.ed São Paulo: Cortez, 2002. (2001). V. 01. 272 p.

FERREIRA FILHO, José Roberto. Geometria fractal: da natureza para a sala de aula. Dissertação (Mestrado Profissional) 2015 - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, São Cristóvão (SE), 2015.

FROZZI, J. C. Atributos Físicos, Carbono Orgânico e Dimensão Fractal da textura em Solos sob Ambientes Naturais e Antropizados na Região Sul do Amazonas. UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS - INSTITUTO DE EDUCAÇÃO, AGRICULTURA E AMBIENTE/PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS AMBIENTAIS. UFMA, Humaitá, AM: 2017.

JESUS, J. C. O.; PINTO, G. O.; ALVES, A. S.; ZEBENDE, G. F. Fractais na escola: poeira de Cantor e resistores. In: Simpósio Nacional de Ensino de Física, 16, 2005, Rio de Janeiro, Anais... Rio de Janeiro: SBF. 2005.

MANDELBROT, B.P. Objectos Fractais. Lisboa: Grandiva. 1989.

MENDONÇA, Fernando Antônio Cavalcante. Aplicações da geometria fractal: uma proposta didática para o Ensino Médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2016. Disponível em: < <https://www.repositorio.ufal.br/handle/riufal/2412> >. Acesso em: ago. 2021.

MORAES, Tonny Jader. Dimensão fractal de espécies arbóreas de ecossistema nativo na região do Pantanal mato-grossense. Dissertação 2015. Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física Ambiental, Cuiabá, 2015.

MOTA, Deniz dos Santos. Estudo de fractalidade via relações de escala de espécies vegetais em área de igapó no município de Coari/AM. Tese (Doutorado) 2017. Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física Ambiental, Cuiabá, 2015.

MUECHEN, Cristiane; DELIZOICOV, Demétrio. A construção de um processo didático-pedagógico: aspectos epistemológicos. Revista Ensaio, Belo Horizonte, v.14, n.3, p.199-215, 2012.

MUECHEN, C.; DELIZOICOV, D. Os três momentos pedagógicos e o contexto de produção do livro “Física”. Ciência & Educação, Bauru, v. 20, n. 3, 617-638, 2014.

NEGRI, Marília Gomes. Introdução ao Estudo dos Fractais - Dissertação (Mestrado Profissional) 2014 – Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Goiânia, 2014.

OLIVEIRA, L. H. A. Matemática do Delírio. SUPERINTERESSANTE. São Paulo: Ed. Abril, ano 8, n.10, out. 1994. 92 p.

PEREIRA GUILHERME, Adriano. ABORDAGEM TEÓRICO-EXPERIMENTAL DAS RELAÇÕES DE ESCALA E FRACTALIDADE: UMA APLICAÇÃO DO MODELO “WBE” EM ÁREA DE VÁRZEA DA FLORESTA AMAZÔNICA. 2017. Tese (Doutorado em Física Ambiental) – Instituto de Física, Programa de Pós-graduação em Física Ambiental, Cuiabá, 2017.

PET MATEMÁTICA UNB. Construindo fractais com Geogebra. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=og11Jgw6jZA&t=921s>>. Acesso em fev. 2023.

SALLUM, E.M. Fractais no ensino médio. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 57, p. 1-8, 2005.

SAMPIERI, R.H; COLLADO, C.H; LUCIO, M. P. B., Metodologia de Pesquisa. 5. Ed. Porto Alegre/RS: Penso Editora. 2013.

SILVA, Thiago Martins. Fractais e Sistemas Dinâmicos. 2022. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Faculdade de Ciências e Tecnologia, PPGMATCOM-UNESP, 2022.

UNESCO. Os desafios do ensino de matemática na educação básica. Brasília, UNESCO. São Carlos: EdUFSCar, 2016, p.107. Disponível em: <<http://unesdoc.unesco.org/images/0024/002468/246861por.pdf>>. Acesso em: jan.2023.

VARGAS, A. F., DA SILVA, B. B., LIRA, C. G., LOPES, M. M. APRENDENDO MATEMÁTICA ATRAVÉS DE FRACTAIS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO MÉDIO. XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul. Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014.

XI Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências – XI ENPEC. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC – 3 a 6 de julho de 2017. Os Três Momentos Pedagógicos como possibilidade para inovação didática. Disponível: <<http://www.abrapecnet.org.br/enpec/xi-enpec/anais/resumos/R2589-1.pdf>>. Acesso em jul. 2022.