

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA AMBIENTAL

**ANÁLISE DA AUTOSSEMELHANÇA DE ATRATORES
POR ESPECTRO DE DIMENSÃO DE CORRELAÇÃO:
RELEITURA DE GRASSBERGER-PROCACCIA**

IAN MAXIME CORDEIRO BARROS DA SILVA

Prof. Dr. SÉRGIO ROBERTO DE PAULO
Orientador

Cuiabá, MT
Fevereiro 2023

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA AMBIENTAL

**ANÁLISE DA AUTOSSEMELHANÇA DE ATRATORES
POR ESPECTRO DE DIMENSÃO DE CORRELAÇÃO:
RELEITURA DE GRASSBERGER-PROCACCIA**

IAN MAXIME CORDEIRO BARROS DA SILVA

*Dissertação apresentada ao
Programa de Pós-graduação
em Física Ambiental da
Universidade Federal de Mato
Grosso, como parte dos
requisitos para obtenção do
título de Mestre em Física
Ambiental.*

Prof. Dr. SÉRGIO ROBERTO DE PAULO
Orientador

Cuiabá, MT
Fevereiro 2023

AGRADECIMENTOS

- Aos meus pais, Edward e Helena, por terem me apoiado tanto financeiramente, quanto emocionalmente.
- À minha madrastra, Maria, e aos meus irmãos Ana, Davi e Elias, por me incentivarem a ser uma pessoa melhor.
- Ao Prof. Dr. Sérgio Roberto de Paulo e minha orientadora de coração Profa. Dra. Iramaia Jorge Cabral de Paulo.
- Ao meu primeiro orientador, hoje amigo, Alessandro Michiles.
- A todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Física Ambiental da Universidade Federal de Mato Grosso, onde transmitiram seus conhecimentos.
- Aos companheiros que colaboraram para essa jornada ser mais proveitosa: Amanda, Fabrício, Pauline, Roberta e Vanusa
- Aos amigos Daniel e Giancarlo por estarem presentes nos meus melhores e piores momentos.
- A todos que passaram e passarão na minha vida, pelos ensinamentos e experiencias proporcionados.
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoas de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro durante a realização desta pesquisa.
- **In Memoriam:**

Prof. Dr. José de Souza Nogueira (Paraná)

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	iv
LISTA DE TABELAS.....	v
RESUMO	vi
ABSTRACT	viii
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. OBJETIVO	2
1.1.1. Objetivo Geral	2
1.1.2. Objetivos Específicos.....	2
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	3
2.1. TEORIA DA COMPLEXIDADE	3
2.2. SISTEMAS DINÂMICOS	4
2.2.1. Dimensionalidade.....	5
2.2.1.1. Fractais.....	5
2.2.1.1.1. Conjunto de Cantor	6
2.2.1.1.2. Triângulo de Sierpinski.....	7
2.2.2. Lyapunov.....	8
2.2.2.1. Atratores	9
2.2.2.1.1. Atratores Determinísticos	9
2.2.2.1.2. Atratores Estranhos.....	10
2.2.3. Reconstrução do Espaço de Fase.....	12
2.2.4. Dimensões	13
2.2.4.1. Dimensão de Capacidade D_0	13
2.2.4.2. Dimensão de Informação D_1	15
2.2.4.3. Dimensão de Correlação D_2	17
2.3. SÉRIES TEMPORAIS	18
2.4. TEOREMA DE TAKENS.....	19
3. MATERIAL E MÉTODOS	23
3.1. ÁREA DE ESTUDO	23
3.2. METODOLOGIA E COLETA DE DADOS	24
3.2.1. Obtenção do intervalo de tempo de defasagem (τ).....	25
3.2.2. Notação Vetorial	26

3.2.3. Grassberger-Procaccia x Espectro de Dimensionalidade	27
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	34
4.1. Atratores Reconstruídos por meio do Espaço de Tempos Defasados ..	37
4.2. Análise comparativa da dimensionalidade dos atratores no espectro de dimensão de correlação.....	39
5. CONCLUSÃO	55
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	56
APÊNDICE A – COMPARAÇÕES ENTRE GP E EDC	62

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Alguns conjuntos de fractal Fonte: adaptado de McClure, 2016.....	6
Figura 2 – Ilustração do Conjunto de Cantor Fonte: adaptado de McClure, 2016	7
Figura 3 – O triângulo de Sierpinski Fonte: adaptado de McClure, 2016	8
Figura 4 – Atrator de Lorenz, exemplo de atrator estranho	11
Figura 5 – Exemplo de box-counting em três conjuntos: (a) dois pontos, (b) uma curva, (c) uma área cercada por uma curva fechada. Fonte: adaptado de Nayfeh e Balachadran, 2008.....	14
Figura 6 – $X(t)$ corresponde a serie temporal original, enquanto $X_t - \tau$ e $X_t - 2\tau$ são obtidos do deslocamento τ e 2τ da original. (imagem de Sugihara et al., 2012).....	21
Figura 7 – Com os valores de X_t , $X_t - \tau$ e $X_t - 2\tau$ reconstrói-se o atrator de $X(t)$. (imagem de Sugihara et al., 2012)	21
Figura 8 – Mapa da localização da área de estudo.....	23
Figura 9 – Torre no local de estudo Fonte: Ferreira, 2018.....	24
Figura 10 – Atrator reconstruído de T40 em abril/01, estação de transição e em dezembro/03, estação chuvosa.	28
Figura 11 – Gráfico $\log C \times \log R$ de T40 em abril de 2001	29
Figura 12 – Exemplo de análise por picos em uma escala reduzida na variável micrometeorológica radiação líquida, imersão 2, mês de abril.....	30
Figura 13 – Exemplo de picos ao ampliar a escala	31
Figura 14 – Exemplo de platô na variável micrometeorológica radiação líquida, imersão 4, escala reduzida.....	32
Figura 15 – Exemplo de platô na variável micrometeorológica radiação líquida, na imersão 4, ao ampliar a escala.....	33
Figura 16 – Dimensões 3, 6 e 12 da variável T40 em abril de 2001. Na coluna à esquerda, o original, à direita a releitura.	35
Figura 17 – Umidade Relativa do Ar, PAR_i e R_n na dimensão 12 em abril de 2001, à esquerda original e à direita releitura.	36
Figura 18 – RH abr/01 e dez/03	37
Figura 19 – T40 abr/01 e dez/03	37
Figura 20 – PAR_i abr/01 e dez/03.....	37
Figura 21 – R_n abr/01 e dez/03	38
Figura 22 – Análise gráfica da evolução de RH nos meses secos	40
Figura 23 – Análise da evolução de RH na estação seca	42
Figura 24 – Evolução da dimensionalidade de T40 no período de seca	44
Figura 25 – Evolução gráfica de T40 na estação chuvosa	46
Figura 26 – Evolução gráfica de R_n na estação seca	48
Figura 27 – Evolução gráfica de R_n na estação seca	50
Figura 28 – Evolução gráfica da PAR_i na estação seca	52
Figura 29 – Evolução gráfica da PAR_i na estação chuvosa.....	54

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável RH na estação seca	39
Tabela 2 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável RH na estação chuvosa.....	41
Tabela 3 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável T40 na estação seca	43
Tabela 4 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável T40 na estação chuvosa	45
Tabela 5 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável Rn na estação seca	47
Tabela 6 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável Rn na estação chuvosa.....	49
Tabela 7 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável PARi na estação seca	51
Tabela 8 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável PARi na estação chuvosa	53

RESUMO

A década de 1980 foi primordial para avanços significativos no campo dos sistemas dinâmicos, com pesquisas focadas nas dimensionalidades de atratores estranhos, que são sensíveis a condições iniciais, e reconstrução de atratores por espaços de tempos defasados. Nesse sentido, destacam-se os trabalhos de Takens (1981) e Grassberger-Procaccia (GP) (1983), norteadores de parte significativa dos artigos até o tempo presente. Estudar a dimensionalidade do espaço de fase é importante para determinar o intervalo da possível dinâmica de comportamento e entender a evolução do sistema, visto que estão relacionados. De natureza semelhante, a dimensionalidade de um atrator nos dá uma estimativa do número de graus de liberdade ativos no sistema, ou seja, o número de. Apesar dos excepcionais resultados verificados na literatura, o algoritmo de GP apresenta ruídos, tornando a análise gráfica uma incumbência árdua. Assim, o presente trabalho propõe uma alternativa para análise chamada de Espectro de Dimensão de Correlação (EDC), atuando como um atenuador dos ruídos os quais são mais intensos em dimensões mais baixas, mostrando-se uma possibilidade válida, bastando obter um intervalo adequado para r . Ao contrário de GP, o EDC é aplicável a atratores que não são autossemelhantes, tomando como exemplo as variáveis micrometeorológicas. Os comportamentos avaliados foram dos dados de temperatura, umidade relativa do ar, radiação líquida e índice de radiação fotossinteticamente ativa obtidos na Fazenda Maracaí, a 50 km de Sinop/MT, nas estações chuvosa e seca, totalizando 7 meses. Os resultados evidenciaram uma componente estocástica não detectada até então e ocorrências de mais de um pico, chegando a três no caso da radiação líquida. Apesar disso, quanto maior a escala temporal, menor a disparidade entre os algoritmos.

Palavras-chave: algoritmo; dimensionalidade; sistemas dinâmicos; variáveis micrometeorológicas.

ABSTRACT

The 1980s were crucial for significant advances in the field of dynamical systems, with research focused on the dimensionality of strange attractors (sensitive to initial conditions) and the reconstruction of attractors by time-lagged spaces. In this sense, Takens (1981) and Grassberger-Procaccia (GP) (1983) stand out, guiding a significant part of the scientific papers for the time being. Studying the dimensionality of the phase space is important to determine the range of potential behavior dynamics and to understand the system evolution, since they are related. Similar in nature, the dimensionality of an attractor gives us an estimate of the number of active degrees of freedom in the system. Despite the exceptional results found in the literature, the GP algorithm presents noise, making the graphical analysis an arduous task. Thus, the present work proposes an alternative for analysis called Correlation Dimension Spectrum (CDS), acting as an attenuator of the noises which are more intense in lower dimensions, proving to be a valid possibility, provided that an adequate interval for r is given. Unlike GP, CDS is useful even to not self-similar attractors, as is the case for micrometeorological variables. The behaviors evaluated were from temperature, relative air humidity, net radiation and photosynthetically active radiation index data obtained at Fazenda Maracaí, 50 km from Sinop/MT, in the rainy and dry seasons, totaling 7 months. The results showed a stochastic component not detected until now and occurrences of more than one peak, reaching three in the case of net radiation. Despite this, the larger the time scale, the smaller the disparity between the algorithms.

Keywords: algorithm; dimensions; dynamical systems; micrometeorological variables

1. INTRODUÇÃO

As medidas de dimensionalidade que permeiam o estudo de sistemas dinâmicos são importantes para caracterização de atratores, todavia existem poucos trabalhos no que diz respeito a área de ciências ambientais. Ao ser feito um estudo nessa área, pode-se compreender de melhor forma o comportamento do sistema terrestre, avaliando o quantitativo de variáveis necessárias para modelar um determinado fenômeno, se é determinístico, caótico ou caoticamente estável, ou ainda se o atrator representativo do fenômeno é estável o suficiente para não ser descaracterizado pela ação antrópica.

Como será visto, atrator é uma tendência de comportamento do sistema, ou seja, caso o atrator se desloque ou sua característica seja alterada, é possível chegar a um ponto em que não há volta, termo muito utilizado pelos cientistas ao se referir a mudanças climáticas. Outrossim, propicia novas intervenções nesse sentido, como a caracterização de atratores nos diferentes biomas do país e análises temporais (como era o atrator de determinado local em determinada época, como é hoje).

Os trabalhos de maior prestígio no que concerne o cálculo de dimensões e espaço de tempos defasados possuem uma abordagem pouco acessível a quem não tem uma base matemática, falando a respeito de conceitos como difeomorfismo, variedades e funções holomorfas com simbologias muito profundas e pouco práticas, frustrando assim um eventual interesse nessa linha de pesquisa.

Outro fator que colabora para dificuldade de entendimento do assunto é a falta de padronização dos termos, por exemplo, a dimensão de capacidade pode também ser chamada de Hausdorff, *box-counting* ou fractal, ainda que façam parte de um mesmo espectro (dimensões métricas). Realizar um levantamento bibliográfico considerando todas as possíveis nomenclaturas consome um tempo considerável. As formas mais comuns de serem encontradas são d_H , d_b , D_0 , d_f , todas com diferenças irrisórias. Com o intuito de aprimorar o entendimento do leitor sobre o assunto de forma mais acessível, a presente dissertação utilizará como padrão D_0 para dimensão de capacidade, D_1 para dimensão de informação e D_2 para dimensão de correlação.

Grassberger e Procaccia redigiram vários artigos na década de 1980 sobre dimensionalidade e nomeiam o meio mais popular de estimar a dimensão de correlação de um atrator, o algoritmo de Grassberger-Procaccia (GP). Entretanto, ao menos em sistemas ambientais complexos, mostra-se instável em escalas pequenas e não se aplica a atratores que não são autossemelhantes. Por atratores não autossemelhantes, entende-se que são aqueles que apresentam algum espalhamento apesar de apresentarem uma tendência, de certa forma, definida.

1.1. OBJETIVO

1.1.1. Objetivo Geral

- Apresentar um modo alternativo de análise de dimensionalidade aplicável tanto para pequenas escalas temporais quanto a atratores não autossemelhantes

1.1.2. Objetivos Específicos

- Confeccionar o algoritmo do Espectro de Dimensão de Correlação (EDC);
- Efetuar medidas comparativas entre os dois algoritmos nas variáveis micrometeorológicas temperatura, umidade relativa, radiação líquida, radiação fotossinteticamente ativa nas diferentes estações (seca e chuvosa);
- Analisar o espectro de dimensionalidade;
- Definir os regimes em que estão os atratores, se determinístico ou caótico, por picos ou platôs;
- Reconstruir os atratores das variáveis micrometeorológicas pelo método dos espaços defasados, conforme Takens, visando auxiliar na interpretação dos espectros gerados por ambos os algoritmos;

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. TEORIA DA COMPLEXIDADE

A Teoria da Complexidade (TC) nos permite entender melhor diversos sistemas, como células, seres humanos, ecossistemas florestais e organizações, que são compreendidos de forma parcial por métodos científicos tradicionais (Zimmerman et al. 2001). Apesar de ser um campo de estudo relativamente novo, abrange uma ampla variedade de disciplinas nas ciências físicas, biológicas e sociais, tendo implicações profundas na forma em que pensamos e agimos dentro do mundo (Schneider e Somers, 2006). Isso é especialmente importante nos estudos de organizações, mudança organizacional e liderança, em que a TC pode oferecer ideias de como organizações podem ser mais sustentáveis, adaptáveis e inovadoras (Uhl-Bien et al., 2007).

A teoria e seus conceitos relacionados emergiram em meados do final do século 20 em múltiplas disciplinas, incluindo o trabalho de Prigogine e seu estudo sobre estruturas dissipativas em termodinâmicas de não-equilíbrio, Lorenz em seu estudo de sistemas climáticos e percursos causais não-lineares (em outras palavras, o efeito borboleta), Teoria do Caos e seu novo ramo na matemática, bem como o pensamento evolucionário informado pelas perspectivas de Lamarck sobre aprendizado e adaptação (Schneider e Somers, 2006).

Enquanto essa multiplicidade de influências apresentam um desafio em relação ao entendimento de sua origem, a TC pode também ser entendida de forma geral como o estudo de Sistemas Complexos Adaptativos (SCA). A palavra “complexo” implica diversidade, por meio de um grande número e ampla variedade de partes interdependentes, porém autônomas. “Adaptativo” se refere à habilidade do sistema de alterar, mudar e aprender baseado em experiências passadas. A parte “sistemas” se refere ao conjunto de partes conectadas e interdependentes; uma rede. Enquanto há muitos SCA existindo em diferentes escalas, a TC revela que há princípios comuns e interrelacionados que podem ser observados por todos esses sistemas (Zimmerman, Lindberg e Plsek, 2001). **A seção a seguir tratará sobre sistemas dinâmicos, os quais são o cerne do trabalho.**

2.2. SISTEMAS DINÂMICOS

Sistema dinâmico é um sistema que muda com o passar do tempo. **QUAL SISTEMA DINAMICO?** Um sistema dinâmico determinístico modela a evolução de $x(t)$, em que t é tempo e $x(t)$ é um vetor com dimensão finita ou infinita. Um sistema dinâmico de tempo contínuo tem a forma $dx(t)/dt = F(x(t))$, para uma função F qualquer, enquanto um sistema dinâmico de tempo discreto tem a forma $x(t + 1) = F(x(t))$ para uma função F qualquer. Um sistema físico pode ser descrito por seu espaço de fase, assim, cada ponto no espaço de fase representa uma descrição instantânea do sistema em um dado ponto no tempo.

Se uma mudança infinitesimal $\delta x(0)$ é feita nas condições iniciais (em $t = 0$), haverá uma mudança correspondente $\delta x(t)$ no tempo t . Considerando λ o expoente de Lyapunov, **o qual será detalhado mais adiante**, se, para algum $\lambda > 0$ temos $|\delta x(t)| \propto |\delta x(0)|e^{\lambda t}$ (em outras palavras, se $\delta x(t)$ cresce exponencialmente com t), então diz-se que existe sensível dependência às condições iniciais. Isso significa que pequenas mudanças no estado inicial são ampliadas, eventualmente se tornando trajetórias distintas (Mizrach, 1992). **Tal expoente é utilizado de forma ampla na literatura, tendo em vista que faz a análise de estabilidade dos atratores.**

Um sistema dinâmico é caótico se para todas (ou quase todas) as condições iniciais $x(0)$ e quase todos $\delta x(0)$ o sistema exibe dependência sensível às condições iniciais. A evolução de sistemas caóticos é **multifacetada** e essencialmente aleatória por testes estatísticos padrão. Apenas a previsão em curto prazo de sistemas caóticos é possível, mesmo que o modelo seja conhecido com certeza (Barkoulas, 1998). Caos foi primeiramente observado por J. Hadamard em 1898 e, em 1908, H. Poincaré percebeu as implicações nas previsibilidades do tempo, um tópico abordado por Edward Lorenz (Chang, 2008) em um famoso artigo de 1963 que revitalizou o interesse no caos. Lorenz e outros mostraram que teoricamente não é possível fazer previsões de tempo aceitáveis para mais de uma ou duas semanas a frente.

Há dois tipos de sistemas dinâmicos físicos. Quando o sistema perde energia devido ao atrito, como acontece na maior parte dos sistemas físicos naturais, o sistema é dissipativo. Se não há perda de energia devido ao atrito, o sistema é conservativo. Um sistema dissipativo sempre aproxima, conforme $t \rightarrow \infty$, de um estado assintótico (Chatterjee, 1992). **É de suma importância saber de que forma representar**

graficamente esses sistemas para se ter uma noção de sua evolução, se é cíclica ou aleatória e, ainda, sua dimensionalidade, pois sabe-se que, pela geometria euclidiana, as dimensões de um ponto, reta, quadrado. E em relação aos sistemas dinâmicos, como é feito para saber a dimensão de um atrator? Antes, deve-se saber o que é dimensionalidade e o que é dimensão.

2.2.1. Dimensionalidade

Uma importante característica da geometria fractal é permitir a caracterização de irregularidades em diferentes escalas que a geometria euclidiana clássica não permite. Como resultado disso, muitas características fractais têm sido identificadas, dentre as quais a dimensão fractal é uma das mais importantes.

Partindo dos trabalhos de Euclides, sabe-se que a dimensão de um ponto é considerada 0, a dimensão de uma reta 1, a dimensão de um quadrado 2 e a dimensão de um cubo 3. Grosso modo, pode-se dizer que a dimensão do conjunto descreve quanto espaço o conjunto preenche. Constrói-se a teoria da dimensão fractal partindo da definição euclidiana básica para as definições matematicamente mais *intrincadas* de Hausdorff e *box-counting*, que serão comentadas na seção 2.2.4.1.

A principal indagação feita é o motivo de múltiplas definições de dimensão. Isso é simplesmente porque uma certa definição pode ser útil para um propósito, mas não para outro. Em muitos casos as definições são equivalentes, mas quando não são, são suas propriedades particulares que as fazem mais apropriadas para a tarefa em questão.

2.2.1.1. Fractais

O termo fractal, do latim *fractus* (quebrado), foi criado por volta de 1975 por Benoit Mandelbrot para descrever de forma intuitiva um objeto complicado, irregular ou fraturado. Mandelbrot inspirou-se em objetos da natureza, como a forma de uma nuvem ou o curso de um rio, mas suas ideias tiveram muito precursores no campo da matemática pura.

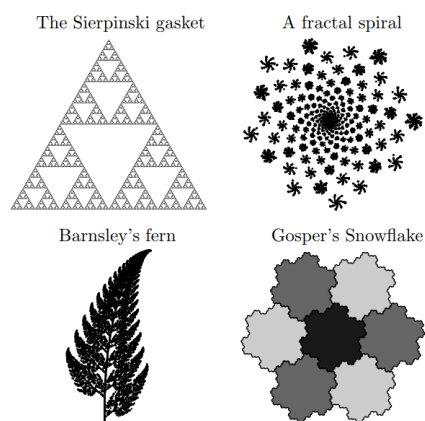


Figura 1 – Alguns conjuntos de fractal

Fonte: adaptado de McClure, 2016

Embora sejam diferentes na aparência, todos esses objetos têm características comuns: primeiramente, são conjuntos de pontos no plano gerado por algum processo matemático. Acima de tudo, todos tem estrutura detalhada em infinitos níveis de ampliação. Essa é a ideia central da geometria fractal na perspectiva de Mandelbrot, enquanto os objetos básicos da geometria euclidiana não possuem tal propriedade.

2.2.1.1.1. Conjunto de Cantor

Cantor construiu seu conjunto nos anos 1880 para ajudá-lo a resolver um problema na série de Fourier. Enquanto o conjunto parecia não natural para os matemáticos da época, tornou-se um exemplo central em análise real, ramo da análise matemática que estuda o comportamento dos números reais, das sequências e séries de números reais e das funções reais. A análise real surgiu da necessidade de prover provas rigorosas às ideias intuitivas do cálculo tais como convergência, limite, continuidade, derivadas, integrais e sequências de funções (McClure, 2016). A construção segue a seguinte sequência: começando com o intervalo unitário $I = [0,1]$, o conjunto de todos os números reais incluindo 0 e 1, remova o terço do meio aberto $(1/3, 2/3)$ do intervalo I para obter os dois intervalos $I_1 = [0, 1/3]$ e $I_2 = [2/3, 1]$, então remova os terços do meio abertos para obter os intervalos $I_{1,1} = [0, 1/9]$, $I_{1,2} = [2/9, 1/3]$, $I_{2,1} = [2/3, 7/9]$ e $I_{2,2} = [8/9, 1]$. Repetindo esse processo de forma indutiva, obtém-se 2^n intervalos de comprimento $1/3^n$ no n -ésimo estágio. O conjunto de cantor C consiste em todos esses pontos em I os quais nunca são removidos em

estágio algum. De forma mais precisa, se C_n denota a união de todos os intervalos restantes depois do n -ésimo estágio da construção, então

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

Esse processo está ilustrado na Figura 2

É claro que C deve ser autossimilar, já que o efeito da construção nos intervalos I_1 e I_2 é o mesmo efeito no intervalo I interior, mas em uma escala menor. Assim, C consiste em duas cópias de si mesmo em uma escala de fator $1/3$



Figura 2 – Ilustração do Conjunto de Cantor

Fonte: adaptado de McClure, 2016

2.2.1.1.2. Triângulo de Sierpinski

Um processo similar pode ser usado para construir o triângulo de Sierpinski, também chamado de junta de Sierpinski. Começa-se com um triângulo equilátero preenchido e fechado. Os segmentos de reta que unem os pontos médios dos lados desse triângulo dividem-no em quatro subtriângulos equiláteros. Pode-se descartar um no meio, manter os outros e então repetir o processo nos triângulos restantes, conforme ilustrado na figura abaixo

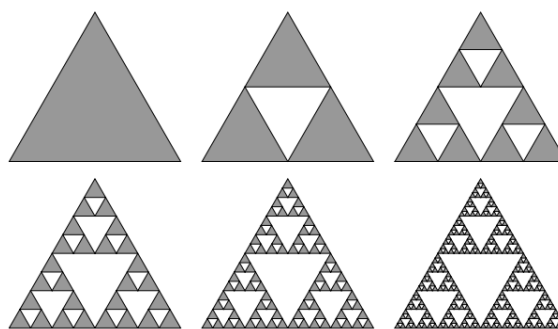


Figura 3 – O triângulo de Sierpinski

Fonte: adaptado de McClure, 2016

Muitos dos comentários sobre o conjunto de Cantor são aplicáveis ao triângulo de Sierpinski. É um conjunto autossimilar consistindo em três cópias de si, cada uma em um fator de escala de $1/2$. Suas propriedades dimensionais são, de certa forma, entre a dimensão 1 e 2.

2.2.2. Lyapunov

Os números ou expoentes de Lyapunov (homenagem a Aleksandr Mikhailovich Lyapunov, 1857-1918, matemático russo) quantificam as propriedades médias de estabilidade da órbita em um atrator. Para um ponto atrator fixo de um mapeamento, os números de Lyapunov são simplesmente os valores absolutos de autovalores da matriz Jacobiana avaliados nesse ponto. Como a noção é geral, pode-se expandir essa noção para atratores mais complexos.

Podem ser utilizados para obter a medida da sensibilidade às condições iniciais, características de comportamento caótico. O expoente λ pode ser prontamente calculado para um mapa de uma dimensão, tal como o mapa logístico. Se é permitido a um sistema evoluir partindo de dois estados com diferenças sutis, x e $x + e$, então depois de n iterações sua divergência poderá ser caracterizada aproximadamente como

$$\varepsilon(n) \approx \varepsilon e^{\lambda n}$$

em que o expoente λ de Lyapunov dá a taxa média de divergência e ε representa a função iterativa estudada. (A média deve ser tomada sobre várias “condições iniciais” espalhadas ao longo da trajetória.) Se $\lambda < 0$, as trajetórias levemente separadas convergem e a evolução não é caótica. Caso $\lambda > 0$, trajetórias próximas divergem, a evolução é sensível as condições iniciais e, portanto, caóticas.

2.2.2.1. Atratores

2.2.2.1.1. Atratores Determinísticos

Farmer (1982) define atrator como um subconjunto do espaço de fase de um sistema dinâmico dissipativo que “atrai” pontos de outras regiões do espaço de fase na área do atrator. Uma vez que o ponto entra no atrator, não sai. Uma propriedade conveniente observada em muitos experimentos numéricos é que quase toda condição inicial em uma dada área de atração produz as mesmas médias temporais e assim as mesmas medidas assintóticas de probabilidade. Ruelle e Bowen provaram que a medida de Lebesgue, **a qual se refere a uma extensão das noções clássicas de comprimento e área para conjuntos mais intrincados**, de um atrator de um fluxo suave é zero. Esse resultado sugere que talvez a dimensão de um atrator seja, de forma geral, menor que o espaço de fase que o contém. Para trajetórias no atrator, essa redução de dimensão acarreta uma redução seguida da informação necessária para especificar uma condição inicial. Para o caso mais geral, o número de variáveis necessárias para descrever uma trajetória é N , mas para trajetórias em um atrator esse número pode ser menor que N . As diversas dimensões definidas buscam fornecer os conceitos de “informação necessária para especificar uma condição inicial” e “graus de liberdade no atrator” mais precisos.

Milnor (1985) reúne uma série de definições de atratores, sendo a primeira delas a de Auslander, Bhatia e Seibert, 1964:

“No estudo das propriedades topológicas de equações diferenciais ordinárias, a teoria da estabilidade de conjuntos compactos invariantes (os quais podem ser considerados generalizações de pontos críticos e ciclos limite) desempenha um papel fundamental. Pela estabilidade de Lyapunov (ou apenas estabilidade) do conjunto compacto invariável M , queremos dizer que toda órbita começando suficientemente próxima a M permanecerá em uma dada vizinhança de M . O conjunto M é assintoticamente estável se é estável e é um ‘atrator’ – ou seja, todas as órbitas e, uma vizinhança ... de M se aproximam de M .”

A palavra “atrator”, aplicada a um único ponto invariável em um fluxo suave, foi utilizada antes por Coddington e Levinson (1955) e por Mendelson (1960). Entretanto, atratores consistindo em mais de um ponto parece ter sido inicialmente estudado nesse artigo de Auslander-Bhatia-Seibert. Eles consideraram de forma

explícita o caso instável, no qual uma órbita que começa arbitrariamente próxima ao atrator pode percorrer um caminho distante antes de convergir de volta ao atrator.

Em um sistema com F graus de liberdade, um atrator é subconjunto do espaço de fase de dimensão F para o qual praticamente todas as trajetórias suficientemente próximas são “atraídas” assintoticamente. Como o volume é contraído em fluxos dissipativos, o volume de um atrator é sempre zero, porém isso deixa espaço para estruturas extremamente multifacetadas. No caso de o fluxo não ser dissipativo, o volume será diferente de zero.

2.2.2.1.2. Atratores Estranhos

O termo atrator estranho foi introduzido por Ruelle e Takens em 1971. Informalmente, um atrator de sistema dinâmico é um subconjunto do espaço de fase para o qual o sistema evolui e um atrator estranho é um atrator de dimensão fractal (Theiler, 1990). De maneira formal, um conjunto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^E$, com infinitos pontos, é um atrator estranho para o mapa $F : \mathbb{R}^E \rightarrow \mathbb{R}^E$ se existir um conjunto U com as seguintes propriedades (Ruelle, 1980):

1. U é uma vizinhança de dimensão E de Ω , ou seja, para cada ponto $x \in \Omega$ existe uma esfera centrada em x e inteiramente contida em U . Em particular, $\Omega \subset U$;
2. Para cada ponto inicial $x(0) \in U$, o ponto $x(t) \in \Omega$ para todo $t > 0$ e $x(t)$ é arbitrariamente próximo a Ω para todo t suficientemente amplo. (Isso significa que Ω está atraindo.);
3. Existe uma dependência sensível à condição inicial sempre que $x(0) \in U$. (Isso torna Ω um atrator estranho.)
4. Pode-se escolher um ponto $x(0)$ em Ω tal que, para cada ponto y em Ω existe um ponto $x(t)$ arbitrariamente perto de y para um t positivo. (Essa condição de *indecomponibilidade* diz que Ω não poderá ser dividido em dois atratores distintos.)

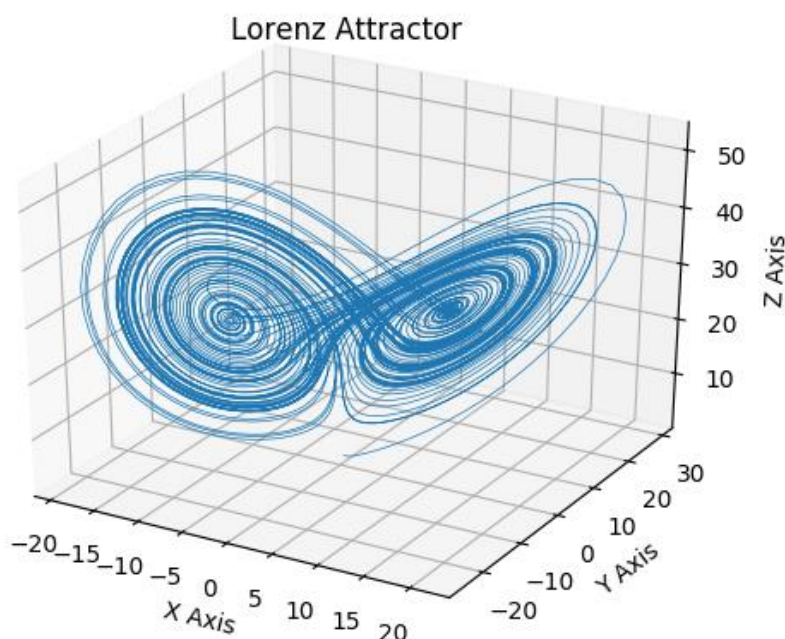


Figura 4 – Atrator de Lorenz, exemplo de atrator estranho
Fonte: https://matplotlib.org/3.1.0/gallery/mplot3d/lorenz_attractor.html

Na figura 4 é possível ver o atrator de Lorenz, um exemplo de atrator estranho. Para ver como um atrator estranho surge em sistemas dissipativos, imagine como estado inicial uma pequena esfera. Após um pequeno aumento de tempo, a esfera pode evoluir para um elipsoide, tal que o volume do elipsoide seja menor que o volume da esfera. Entretanto, o comprimento do maior eixo do elipsoide pode exceder o diâmetro da esfera. Assim, com o passar do tempo, a esfera pode comprimir em algumas direções e expandir em outras. Para que o sistema permaneça limitado, a expansão em uma dada direção não pode continuar indefinidamente, então a “dobra” ocorre. Se o padrão de compressão, expansão e dobradura continuar, as trajetórias que estão inicialmente próximas podem divergir rapidamente com o tempo, criando assim uma dependência sensível as condições iniciais. A quantidade de compressão ou expansão em várias dimensões são quantificadas pelos expoentes de Lyapunov (Chatterjee, 1992).

Físicos que estudam sistemas dinâmicos querem distinguir comportamentos irregulares, porém de baixa dimensionalidade, de comportamentos que são irregulares

porque são essencialmente estocásticos, com muitos graus de liberdade eficazes (Theiler, 1990). Calcular a dimensão fractal do atrator auxilia na distinção, já que a dimensão fractal basicamente estima o número de variáveis independentes envolvidas no processo (Badii, 1985), ou seja, a dimensão fractal pode ser interpretada com o número de graus de liberdade do sistema (Ruelle, 1990). Uma dimensão fractal finita não inteira indica a presença de dinâmicas complexas determinísticas (Krakovska, 1995). A conexão entre atratores estranhos e fractais foi descrita de forma sucinta em (Grassberger, 1983):

“Tipicamente, um atrator estranho surge quando o fluxo não contrai um elemento de volume em todas as direções, mas se estende em outras. Para se manter confinado a um domínio limitado, o elemento de volume é “dobrado” ao mesmo tempo, de tal forma que após algum tempo se torna uma estrutura multilaminada. Um estudo mais aprofundado mostrou que finalmente se torna (localmente) parecido com um conjunto de Cantor em algumas direções e é, dessa forma, um fractal no sentido de Mandelbrot (Mandelbrot, 1977).”

2.2.3. Reconstrução do Espaço de Fase

O conceito de reconstrução do espaço de fase foi introduzido na teoria de sistemas dinâmicos de forma independente por Packard et al (1980), Ruelle e Takens (1981). Na realidade, em análise de séries temporais, essa ideia é um tanto quanto antiga, remontado ao trabalho de Yule (1927). A contribuição importante feita na teoria dos sistemas dinâmicos foi a demonstração de que é possível preservar invariantes geométricas, como os autovalores de um ponto fixo, a dimensão fractal de um atrator ou o expoente Lyapunov de uma trajetória. Isso foi demonstrado numericamente por Packard et al. e analiticamente por Takens.

A essência que subjaz a reconstrução do espaço de fase é o passado e futuro de uma série temporal abarcarem informações sobre variáveis de estado não observadas que podem ser utilizadas para definir um estado no tempo presente. As informações sobre o passado e futuro contidas em uma série temporal pode ser encapsulada em um vetor de atraso, no qual assumiremos que o tempo de amostragem é uniforme,

$$x(t) = \left(x(t + \tau m_f), \dots, x(t), \dots, x(t - \tau m_p) \right)^T$$

T representa a transposição, e adota-se a convenção que os estados são representados por vetores coluna. A dimensão de vetor de atraso é $m = 1 + m_p + m_f$. O número de amostras extraídas do passado é m_p e do futuro é m_f . Se $m_p = 0$, então a reconstrução é preditiva, caso contrário, é mista. O tempo entre coordenadas, τ , é chamado de tempo de defasagem.

Takens estudou o mapa de reconstrução defasado Φ , que mapeia os estados de um sistema dinâmico de dimensão d em vetores de atraso de dimensão m :

$$\Phi(s) = \left(h(f^{\tau m_f}(s)), \dots, h(s), \dots, h(f^{-\tau m_p}(s)) \right)^T$$

Mostrou que, de forma genérica, Φ é uma imersão quando $m \geq 2d + 1$. Imersão é uma transformação linear suave de coordenadas com uma inversa suave. Se Φ é uma imersão, então uma dinâmica suave F é induzida no espaço reconstruído de vetores:

$$F'(x) = \Phi \circ f' \circ \Phi^{-1}(x)$$

Os estados reconstruídos podem ser utilizados para estimar F e, como F é equivalente a dinâmica original f , podemos utilizá-lo para qualquer propósito que usaríamos a dinâmica original, tal como previsão, computo da dimensão, pontos fixos, entre outros.

2.2.4. Dimensões

As seções a seguir servirão para melhor compreensão geral de cada definição de dimensão.

2.2.4.1. Dimensão de Capacidade (D_0)

A forma mais simples de atribuir uma dimensão a um conjunto que pode produzir uma dimensão fractal para certos tipos de conjuntos é a chamada dimensão de capacidade, de Hausdorff ou de *Box-counting* D_0 . Assume-se que exista um conjunto N_0 de pontos que estão em um espaço cartesiano de dimensão d . Cobre-se o conjunto com cubos de aresta r . Quando $d = 2$, os “cubos” são quadrados e quando $d = 1$ os cubos são intervalos. $N(r)$ é o número mínimo de cubos necessários para cobrir o conjunto. Repetimos o processo para valores decrescentes de r . Então, a dimensão de capacidade D_0 é dada por

$$D_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log \left(\frac{1}{r} \right)}$$

caso o limite exista; caso contrário, D_0 é indefinido.

A figura 5 ilustra a aplicação de *box-counting* em três conjuntos:

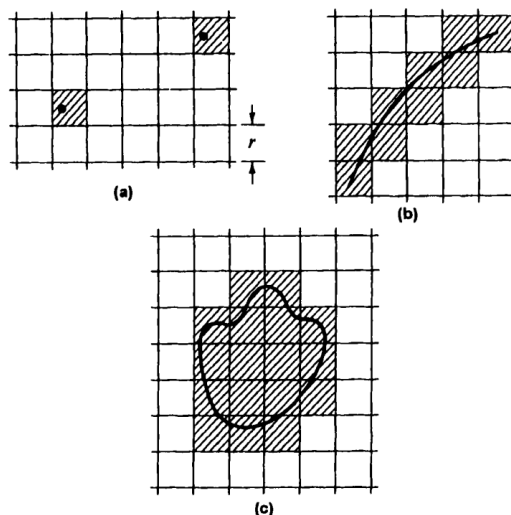


Figura 5 – Exemplo de *box-counting* em três conjuntos: (a) dois pontos, (b) uma curva, (c) uma área cercada por uma curva fechada.

Fonte: adaptado de Nayfeh e Balachadran, 2008

Também chamada de dimensão fractal, de Hausdorff ou Hausdorff-Besicovitch, são dimensões em que valores não inteiros são permitidos. Objetos cujas dimensões de capacidade sejam diferentes de sua **dimensão topológica** são chamados de fractais. A dimensão de capacidade de um espaço métrico compacto X é um número real D_0 tal que se $n(r)$ denota o número mínimo de conjuntos de diâmetros menores ou iguais a r , então $n(r)$ é proporcional a r^{-D} conforme $r \rightarrow 0$. De forma explícita,

$$D_0 = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log r}$$

(se o limite existe), em que N é o número de elementos formando uma cobertura finita do espaço métrico relevante e r é limitado ao diâmetro dos conjuntos envolvidos (informalmente, e é o tamanho de cada elemento utilizado para cobrir o conjunto, o qual é levado a aproximar de 0).

Se cada elemento de um fractal é igualmente provável de ser visitado, então $D_0 = D_1$, em que D_1 é a dimensão de informação (conforme descrito na seção 2.2.4.2).

A dimensão de capacidade satisfaz

$$D_2 \leq D_1 \leq D_0$$

sendo D_2 a dimensão de correlação (ver seção 2.2.4.3).

2.2.4.2. Dimensão de Informação (D_1)

A dimensão de capacidade (ou dimensão de medida natural) é um conceito puramente métrico e não utiliza informação alguma sobre o sistema dinâmico. Ela nos dá o dimensionamento do número de cubos necessários para cobrir o atrator sem considerar o número de pontos em cada cubo. No entanto, para um atrator estranho, a frequência de visita da trajetória varia de cubo a cubo. De fato, conforme $r \rightarrow 0$, órbitas típicas passarão a maior parte do tempo em uma quantidade pequena dos cubos necessários para cobrir o atrator. Consequentemente, o sistema de *box-counting* trata todos os cubos necessários para cobrir o atrator igualmente, independentemente de sua importância. Além disso, ainda que tal sistema seja simples, também é ineficiente. Conforme é feita uma varredura na dimensão de imersão, precisamos construir e verificar o vazio da ordem de $(1/r)^d$ cubos em cada resolução r . Claramente, o esforço computacional aumenta rapidamente conforme $r \rightarrow 0$ e d aumenta, no entanto, deve-se reconhecer que há algoritmos rápidos para determinar a dimensão do atrator pelo sistema de *box-counting* (Leibovitch e Toth, 1989).

Com a intenção de superar as limitações do sistema de *box-counting*, Grassberger (1983) e Henstchel e Procaccia (1983) introduziram outras definições que levam em conta a frequência relativa de visita de uma trajetória típica para os diferentes cubos necessários para cobrir o atrator e são também mais eficientes que o sistema de *box-counting*.

De forma análoga ao sistema de *box-counting*, cobre-se um conjunto N_0 , cuja dimensão é desejável, por um conjunto de $1, 2, \dots, N$ esferas de raio r . Depois, conta-se o número $N_i(r)$ de pontos em cada uma das esferas i e determina-se a probabilidade $P_i(r)$ de encontrar um ponto na i -ésima esfera por

$$P_i(r) = \frac{N_i(r)}{N_0}$$

em que $P_i(\varepsilon)$ é a medida natural, ou probabilidade de o elemento i estar populado, normalizado de tal forma que

$$\sum_{i=1}^N P_i(r) = 1$$

Definindo a “função de informação” como

$$I(r) = - \sum_{i=1}^N P_i(r) \ln[P_i(r)]$$

A grandeza $I(r)$ pode ser interpretada como a quantidade média de informação necessária para especificar o estado considerado do sistema com precisão r . Quando o logaritmo de base 2 é utilizado, $I(r)$ tem unidade de *bits*. Em termos de $I(r)$, a dimensão de informação é

$$\begin{aligned} D_1 &= - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{I}{\ln(r)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{P_i(r) \log[P_i(r)]}{\log(r)} \end{aligned}$$

Se cada elemento é igualmente provável de ser visitado, então $P_i(r)$ é independente de i e

$$\sum_{i=1}^N P_i(r) = N P_i(r) = 1$$

então

$$P_i(r) = \frac{1}{N}$$

e

$$\begin{aligned} D_1 &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \log\left(\frac{1}{N}\right)}{\log r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log(N^{-1})}{\log r} \\ &= - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log(r)} \\ &= D_0 \end{aligned}$$

Sendo D_0 a dimensão de capacidade.

Dessa forma, satisfaz

$$D_2 \leq D_1 \leq D_0$$

O que faz sentido, já que existe a possibilidade de D_1 ser igual a D_0 . Para essa ideia ficar mais clara, façamos um exercício mental: considerando uma garrafa de água como a dimensão de capacidade, o líquido seria a dimensão de informação e as moléculas de água seriam a dimensão de correlação. Caso a garrafa esteja completamente cheia, $D_2 = D_1 = D_0$. Se estiver cheia até a metade, $D_2 = D_1 < D_0$.

2.2.4.3. Dimensão de Correlação (D_2)

O conceito de dimensão de correlação foi introduzido em 1983 por Grassberger e Procaccia e por Hentschel e Procaccia como uma alternativa computacional atraente a D_0 (dimensão de *box-counting* ou Hausdorff). A dimensão de correlação tem sido de grande importância para físicos e mesmo em 1999 as referências sobre o cômputo da dimensão de correlação eram vastas. Os artigos de Grassberger e Procaccia introduzindo a dimensão de correlação foram motivados pelo estudo de atratores estranhos, um tópico em sistemas dinâmicos.

Segundo (Grassberger 1983, Hentschel 1983), se o limite

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log C(r)}{\log r}$$

Em que $C(r)$ é a integral de correlação e r é o raio da esfera/hiperesfera existir, então D_2 é chamado de dimensão de correlação de Ω .

Partindo do princípio de que D_2 exista, então D_2 independe da norma utilizada para definir a distância entre dois pontos. Também $C(r) \sim r^{D_2}$ conforme $r \rightarrow 0$, em que “ $\sim$ ” significa “tende a ser aproximadamente proporcional a”. No entanto, a existência de D_2 não implica em $C(r) \propto r^{D_2}$, já que essa proporção pode falhar em se manter, mesmo quando $r \rightarrow 0$. Para $r > 0$, a função $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$\Phi(r) = \frac{C(r)}{r^{D_2}}$$

Não se pode concluir que $\Phi(r)$ se aproxima de um valor constante conforme $r \rightarrow 0$, mas a existência de D_2 implica $\lim_{r \rightarrow 0} \log \Phi(r) / \log r = 0$ (Theiler, 1988).

Um grande diferencial ao se calcular D_2 em vez de D_0 (dimensão de Hausdorff ou *box-counting*) é a redução de memória necessária, já que não há necessidade de construir cubos cobrindo Ω . Com *box-counting* também é necessário examinar cada cubo para determinar se contém algum ponto; isso pode não ser prático, especialmente se r for muito pequeno. Outra vantagem, é o intervalo de $\log C(r)$ ser o dobro de

$\log B_D(s)$ (logaritmo baseado no diâmetro da “caixa”) ou $\log B_R(r)$ (logaritmo baseado no raio da “caixa”). Para Eckmann, 1985, a dimensão de correlação foi considerada um meio bastante sólido e bem-sucedido de determinar a dimensão de um atrator estranho e foi observado que o método “não é inteiramente justificado matematicamente, mas ainda assim é bastante sólido”.

Existem algumas abordagens possíveis para computar D_2 a partir de N pontos $x(n), n = 1, 2, \dots, N$. Inicialmente, poderíamos pegar o menor r possível, chamá-lo de r_{min} e estimar D_2 por $\log C(r_{min})/\log r_{min}$. O problema desse método é a convergência de $\log C(r)/\log r$ para D_2 ser muito lenta (Theiler, 1990). Uma segunda possibilidade (Theiler, 1988) é tomar a inclinação local da curva $\log C(r)$ contra $\log r$ usando

$$\frac{d \log C(r)}{d \log r} = \frac{\left(\frac{dC(r)}{dr}\right)}{\left(\frac{C(r)}{r}\right)}.$$

Em seguida, a terceira abordagem possível (Theiler, 1988) é escolher dois valores r_1 e r_2 , em que $r_1 < r_2$ e usar a estimativa secante de dois pontos

$$D_2 \approx \frac{\log C(r_2) - \log C(r_1)}{\log r_2 - \log r_1}.$$

Enquanto a terceira abordagem evita a convergência logarítmica lenta, requer que sejam escolhidos r_1 e r_2 , os quais devem tender a zero. Essa abordagem foi analisada por Theiler (Theiler, 1993) e comparada a outros métodos para estimar D_2 .

Entretanto, sem sombra de dúvidas, o método mais popular de estimar D_2 é o método de Grassberger-Procaccia. As etapas são (i) computar $C(r)$ para um conjunto de raios positivos $r_m, m = 1, 2, \dots, M$, (ii) determinar um subconjunto desses valores M de r_m sobre os quais a curva $\log C(r_m)$ em função de $\log r_m$ é praticamente linear e (iii) estimar D_2 conforme a curva de melhor encaixe se alinha ao longo dos pontos ($\log r_m, \log C(r_m)$) sobre esse subconjunto de M pontos.

2.3. SÉRIES TEMPORAIS

Ao estudar um fenômeno, encontra-se com certa frequência um conjunto de dados em que as observações são feitas de acordo com a ordem de tempo. Essa sequência de tempo ordenado é chamada de série temporal. Muitos são os exemplos

de tais conjuntos de dados, tais como as taxas de desemprego mensais, de crimes ambientais, desmatamento, queimadas etc. A característica fundamental de uma série temporal é que suas observações estão correlacionadas. A maior parte dos métodos estatísticos padrões baseados em amostras aleatórias não são aplicáveis para sistemas complexos fora do equilíbrio, sendo necessários diferentes métodos. Alguns desses métodos são descritivos, enfatizando principalmente a descrição de uma série temporal baseada em métodos não-estocásticos. A outra abordagem – ou seja, a abordagem estocástica – é tratar a série temporal como a realização de um processo estocástico de série temporal ou modelo, e o principal objetivo de analisar séries temporais nessa abordagem é construir um possível processo subjacente e utilizá-lo para previsão, inferência e controle (Wei, 2013.).

Podem ser decompostas em três partes: tendência, componente estacionário e ruído, a componente tendência é responsável por mudanças na natureza da série temporal ao longo do tempo e os processos de séries temporais com tendências são não-estacionários, assim, média, variância, ou ambos são uma função do tempo. É necessário levar em conta as tendências em processos dinâmicos para testar hipóteses com dados de séries temporais (Ghil et al, 2002).

2.4. TEOREMA DE TAKENS

Para a grande maioria dos fenômenos naturais e experimentais, tanto o espaço de fase como a descrição matemática do sistema são desconhecidos. Nesses casos, a reconstrução de atratores mostra-se uma metodologia que permite reconstruir o espaço de fase e desenvolver métodos preditivos a partir de informações incompletas (Muñoz, 2021).

Suponhamos que estamos estudando um fenômeno caracterizado por um sistema de equações diferenciais com n variáveis, unicamente somos capazes de obter medidas discretas no tempo sobre a evolução temporal de uma de suas variáveis. A base formal para a reconstrução do atrator é mencionada no Teorema de Takens enunciado a seguir:

“ Seja M uma variedade compacta de dimensão m . Para qualquer par (φ, y) em que $\varphi : M \rightarrow M$ seja um difeomorfismo diferenciável (uma função invertível que mapeia uma variedade diferenciável a outra de tal forma que tanto a função como sua

inversa são diferenciáveis) e $y: M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, uma propriedade genérica do espaço de tempos defasados $(2m + 1)$, $\Phi_{(\varphi, y)} : M \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ dado por

$$\Phi_{(\varphi, y)}(x) = (y(x), y \circ \varphi(x), \dots, y \circ \varphi^{2m}(x))$$

é uma imersão ou encaixe, considerando-se pelo menos C^2 como suave.”

Em outras palavras, suponhamos que uma série temporal $y(1), y(2), \dots, y(n)$ se encontra em um atrator de dimensão d de um sistema dinâmico determinístico de ordem n . Constrói-se o vetor:

$$\mathbf{y}(k) = [y(k), y(k - \tau), \dots, y(k - (d_e - 1)\tau)]^T$$

Usando o método das coordenadas defasadas. Aqui d_e é a dimensão de imersão ou encaixe e τ o tempo de defasagem. O teorema nos diz que as imersões com $d > 2n$ são genéricas de forma que existe um mapeamento suave $f : \mathbb{R}^{d_e} \mapsto \mathbb{R}$ tal que:

$$y(k + 1) = f(\mathbf{y}(k))$$

para todo k inteiro, em que tanto τ quanto T se supõe inteiros.

A variável $y(x)$ mencionada no teorema é o que temos chamado até aqui de $x_1(t)$, a primeira variável dependente do sistema multidimensional de equações diferenciais, que podemos supor é o primeiro x_1 , ou seja, podemos obter uma amostragem de valores da forma:

$$s_0 = x_1(t)$$

$$s_1 = x_1(t + \tau)$$

$$s_2 = x_1(t + 2\tau)$$

$$s_k = x_1(t + k\tau)$$

tomados em intervalos de tamanho τ , como ser visto na figura 5. Este tipo de amostragem dá lugar ao que conhecemos como séries temporais (s_j com $j = 1, 2, 3, \dots, k, \dots$).

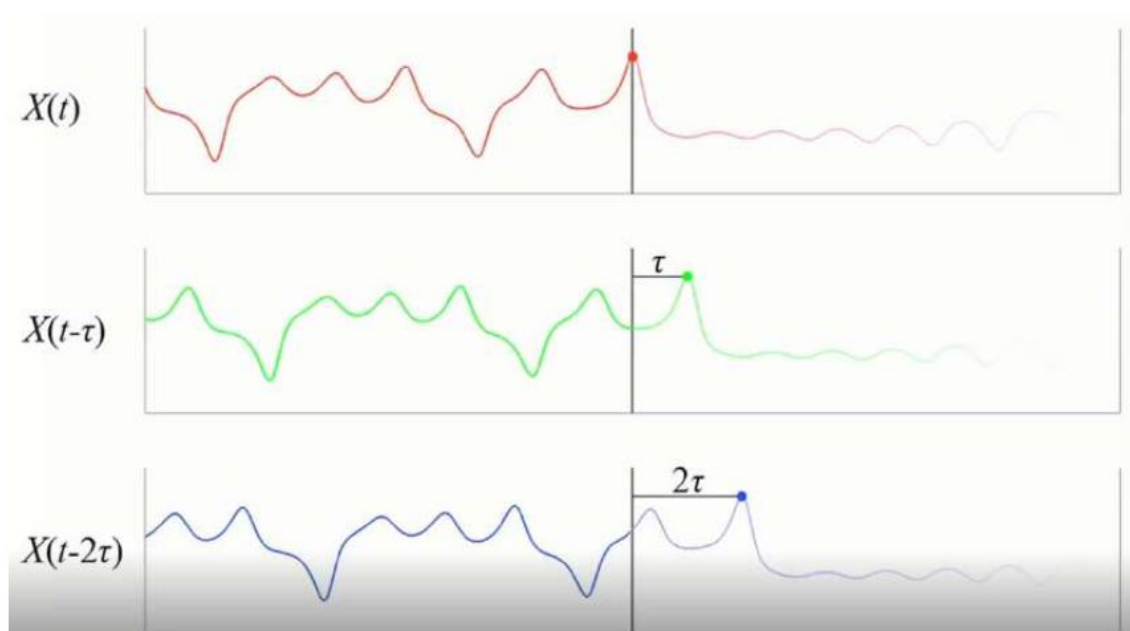


Figura 6 – $X(t)$ corresponde a série temporal original, enquanto $X(t - \tau)$ e $X(t - 2\tau)$ são obtidos do deslocamento (τ e 2τ) da original. (imagem de Sugihara et al., 2012)

A partir dos valores s_j são construídos os chamados vetores defasados de dimensão $2d + 1$ definidos como: $Y_j = (s_j, s_{j-1}, \dots, s_{j-2d})$, em que d corresponde a dimensão do atrator do sistema, conforme pode ser observado na figura 7.

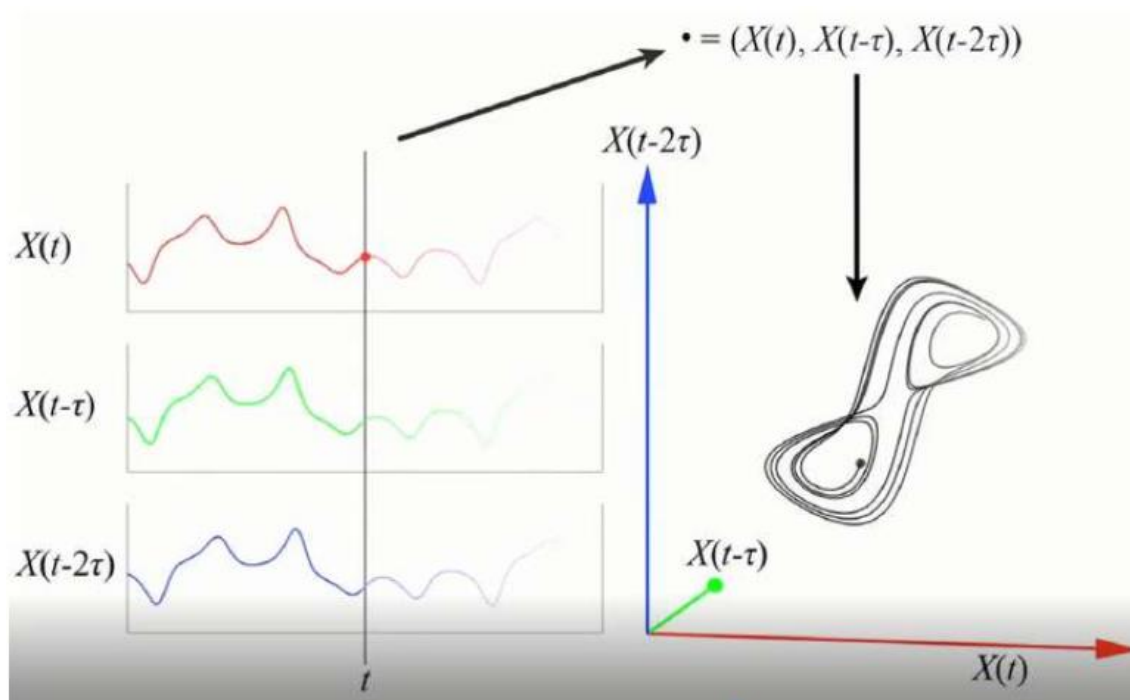


Figura 7 – Com os valores de $X(t)$, $X(t - \tau)$ e $X(t - 2\tau)$ reconstrói-se o atrator de $X(t)$. (imagem de Sugihara et al., 2012)

O teorema demonstrado por Takens em 1981 nos diz que a órbita que segue os estados no espaço de fase n -dimensional, é equivalente a órbita seguida por vetores defasados no espaço $2\tau + 1$. A escolha de τ determina a exatidão do atrator reconstruído. Fraser e Swinney (1986) sugerem usar o primeiro mínimo local da função de informação mútua entre as séries com atraso e sem atraso para obter um valor de τ que possa fornecer informação máxima.

Para reconstrução de órbitas, é necessário determinar o intervalo do tempo defasado (τ), assim como a dimensão de imersão (d). O nível de caos do sistema se infere a partir dos cálculos dos expoentes de Lyapunov.

3. MATERIAL E MÉTODOS

3.1. ÁREA DE ESTUDO

O estudo foi realizado a 50 km nordeste de Sinop, Mato Grosso, Brasil ($11^{\circ}25.15'S$; $55^{\circ}19.50'W$), na Fazenda Maracaí, pertencente à Maracaí Florestal e Indústria Ltda., em floresta de transição Cerrado-Amazônia, com árvores entre 25-28 m e 423 m acima do nível do mar. A temperatura média de 30 anos na área de Sinop é $24^{\circ}C$ com pequenas variações sazonais, e chove aproximadamente 2000 mm/a com uma estação seca entre maio e setembro. A climatologia sazonal para a floresta semidecídua ecotonal, é similar a floresta úmida e savana, no entanto, a floresta semidecídua tipicamente recebe cerca de 200 mm de chuva a menos por ano que a floresta úmida no norte de Mato Grosso e leste de Rondônia e 500 mm mais chuva que a savana próxima a Brasília (Vourlitis et al., 2002). A temperatura de ar média é similar para floresta semidecídua e úmida, no entanto, a savana é tipicamente $2-3^{\circ}C$ mais frio que a floresta semidecídua. Além disso, é uma área de transição entre Amazônia e Cerrado.

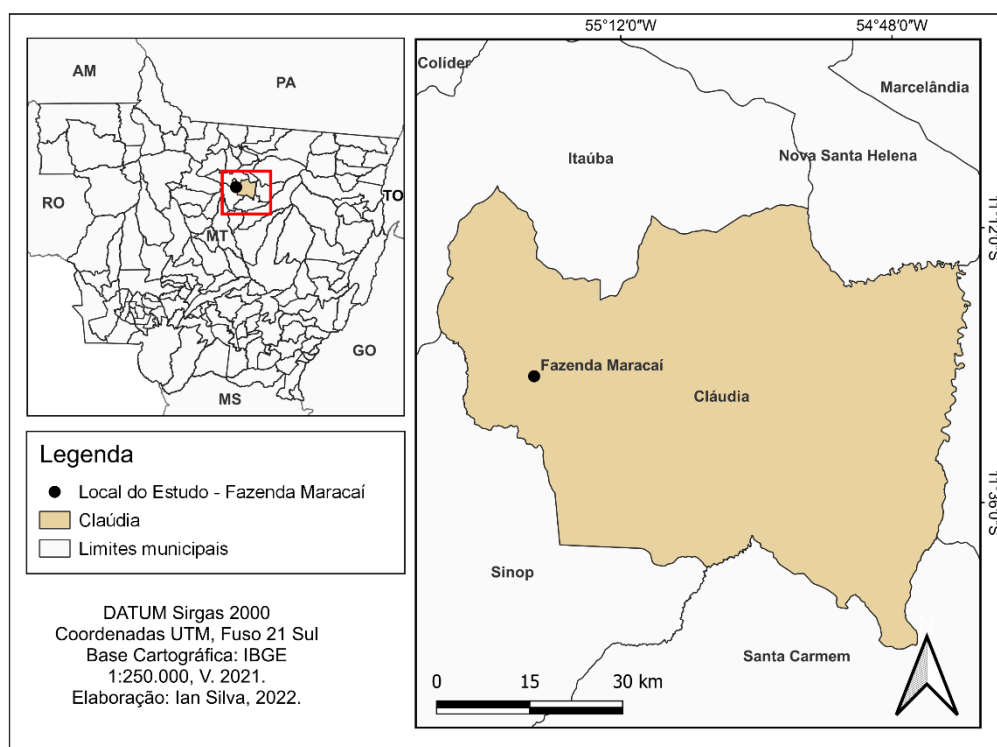


Figura 8 – Mapa da localização da área de estudo

3.2. METODOLOGIA E COLETA DE DADOS

Na Fazenda Maracaí foram instalados piranômetros (LI200SA Pyranometer Sensor) em torres micrometeorológicas, a 42 m de altura, para medição da radiação solar global. As medidas de temperatura e umidade do ar foram realizadas por psicrômetros (HMP 35, Vaisala, Inc., Helsinki, Finland) instalados também a 42 m.

Os dados micrometeorológicos obtidos foram armazenados por um sistema de aquisição de dados, um Datalogger (CR10X, Campbell Scientific, Inc., UT, USA), programado para fazer leituras das medidas a cada 30 segundos e armazenar uma média a cada 30 minutos.

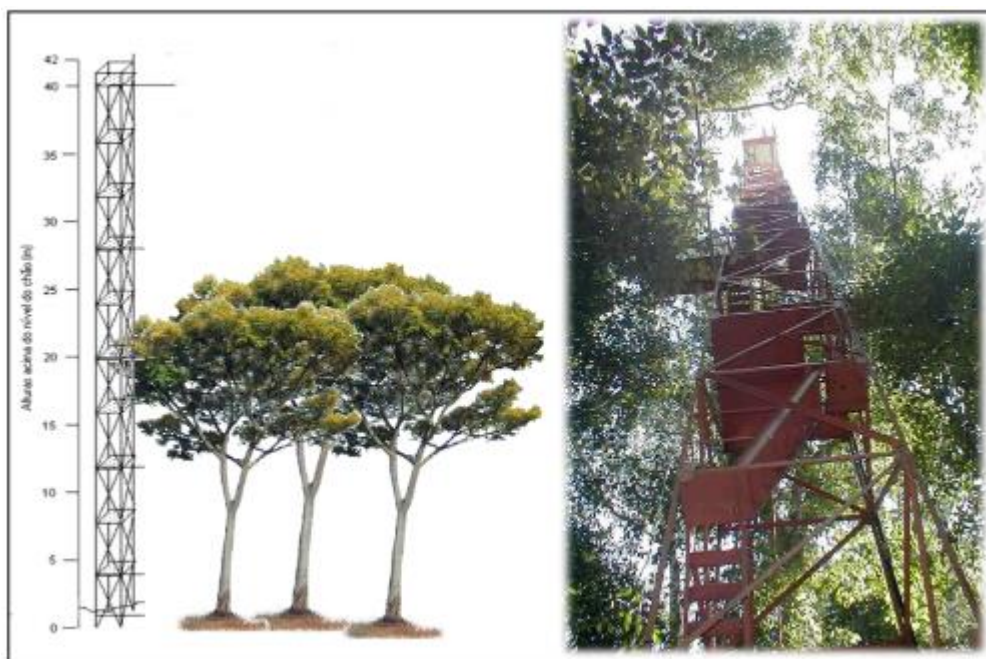


Figura 9 – Torre no local de estudo
Fonte: Ferreira, 2018

As variáveis analisadas neste estudo foram T40 (Temperatura do ar na altura de 40 m), RH (Umidade Relativa do Ar), Rn (Radiação Líquida) e PARi (Índice de Radiação Fotossinteticamente Ativa). Os 7 meses utilizados como referência compreendem o período entre 2001 e 2003, com ocorrência de El Niño moderado em 2002-2003 segundo o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), sendo eles abril e maio (2001), junho (2002), agosto, setembro, novembro e dezembro (2003). Tais meses foram selecionados em virtude de serem os que menos apresentaram ou não apresentaram falhas ao serem extraídos os dados.

3.2.1. Obtenção do intervalo de tempo de defasagem (τ)

Como foi visto, é possível reconstruir um espaço de fase multidimensional a partir dos valores ou medidas de uma única série de tempo escalar. Para uma quantidade finita de dados livres de ruído, o tempo de defasagem τ , em princípio, pode ser escolhido de forma arbitrária. No entanto, a qualidade do espaço de fase depende dos valores de τ , que foi demonstrado nos experimentos realizados em outros trabalhos, como o de Fraser e Swinney (1986).

A priori, não existe critério adequado para escolher o tamanho do intervalo de tempo defasado τ , porém, Fraser e Swinney (1986) e Wang et al. (2007) verificaram que a informação mútua de uma série temporal se converte em uma excelente opção para a escolha de tal constante.

O espaço de fase é obtido ao expandir uma série temporal escalar $s(t)$ em uma série de tempo vetorial $X(t)$ usando o tempo de defasagem τ da seguinte maneira:

$$\tau : X(t) = \{x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t)\}$$

em que

$$x_n(t) = s(n + t\tau)$$

Conforme mencionado, no início, τ pode ser escolhido arbitrariamente, porém, se for muito pequeno, em uma reconstrução bidimensional, na presença de ruído, $x_0(t)$ e $x_1(t)$ serão semelhantes, o que implicará em todas as trajetórias simulando estar na linha $x_0 = x_1$. Para evitar tais situações, τ deve ser escolhido de tal forma que x_0 e x_1 sejam independentes.

A informação mútua mede a dependência geral de duas variáveis. Estamos interessados em medir a dependência dos valores $x(t + \tau)$ e $x(t)$. Consideramos que a atribuição $[s, q] = [x(t), x(t + \tau)]$ pode ser considerada um sistema mais geral (S,Q). Se S e Q são contínuas, define-se informação mútua como

$$I_\tau(S, Q) = \int P_{sq}(s, q) \log \left(\frac{P_{sq}(s, q)}{P_s(s)P_q(q)} \right) dsdq$$

em que $\log$ é um argumento adimensional, portanto a integral não depende das coordenadas escolhidas. I_τ mede a capacidade de prever o valor que Q assumirá dado que S assumiu s . Como se deseja que $x(t + \tau)$ produza informação nova, tudo se reduz a minimizar $I(\tau)$ para $\tau = 1, 2, \dots, \tau$.

É importante lembrar que a informação mútua não é uma função das variáveis s e q , mas sim uma função da distribuição de probabilidade conjunta P_{sq} . É uma medida global da irregularidade de P_{sq} .

Caso contrário, suponhamos então que as variáveis sejam independentes, então:

$$P_s(s) = \frac{P_{sq}(s, q)}{P_q(q)}$$

ao que se segue:

$$\frac{P_{sq}(s, q)}{P_s(s)P_q(q)} = 1 = H(s, q)$$

Podemos utilizar como indicador, ou seja, se $H(s, q) \simeq 1$, então a dependência de s e q é maior e menor caso seja o contrário.

Notemos então que se $H(s, q) \simeq 1$ ao substituí-lo em $I_\tau(S, Q)$, na parte de log teria:

$$\log H(s, q) \simeq \log 1 = 0$$

resultando em $I_\tau(S, Q) = 0$, quer dizer que as variáveis são independentes, de modo que não há relação entre elas. Não obstante, o que se requiere saber é a dependência geral das variáveis, reiterando a importância de $H(s, q) \neq 1$ para que exista uma dependência entre as variáveis.

3.2.2. Notação Vetorial

Prigogine (1985) introduz uma notação vetorial em que X_i é um ponto no espaço de fase cujas coordenadas são $\{X_o(t_i), \dots, X_o[t_i + (n - 1)\tau]\}$. Um ponto de referência X_i é escolhido desses dados e todas as distâncias $|X_i - X_j|$ dos $N - 1$ pontos restantes são computados. Isso nos permite contar os pontos de dados que estão a uma distância r , do ponto X_i no espaço de fase. Repetindo o processo para todos os valores de i , chega-se em

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \theta(r - |X_i - X_j|)$$

sendo θ a função de Heaviside, $\theta(x) = 0$ se $x < 0$ e $\theta(x) = 1$ se $x > 0$. A não-nulidade de $C(r)$ mede a extensão na qual a presença de um ponto de dado X_i afeta a

posição dos outros pontos. $C(r)$ pode então ser referido como a função integral de correlação do atrator.

Suponha que um dado ε pequeno seja fixado e utilizado como parâmetro para examinar a estrutura do atrator. Se este é uma linha, claramente o número de pontos de sonda dentro de uma distância r de um ponto estipulado deve ser proporcional a r/ε . Se for uma superfície, esse número deve ser proporcional a $(r/\varepsilon)^2$ e, de forma mais geral, se for uma variação de dimensão d deverá ser proporcional a $(r/\varepsilon)^d$. Assim, esperamos que para um r relativamente pequeno, $C(r)$ deverá variar como

$$C(r) \sim r^d$$

em outras palavras, a dimensionalidade d do atrator é dada pela inclinação de $\ln C(r) \times x \ln r$ (em função de) em um certo intervalo de r :

$$\ln C(r) = d \ln r$$

A escala logarítmica é necessária para poder verificar quando há a saturação da dimensionalidade.

3.2.3. Grassberger-Procaccia x Espectro de Dimensionalidade

Um dos pressupostos básicos da ciência que subjaz as análises de dimensionalidade de fenômenos por meio de séries temporais é que o atrator característico é autossemelhante, ou seja, que a complexidade do fenômeno não depende da escala temporal considerada. Nessa condição, a relação entre o logaritmo do coeficiente de correlação e o logaritmo do raio das hiperesferas é linear, o que corresponde a uma condição em que, para dimensões de imersão em que o atrator estiver totalmente revelado, a dimensão de correlação é constante e independente da dimensão de imersão (Nicolis e Prigogine, 1989; Grassberger e Procaccia, 1983). Entretanto, atratores relacionados a fenômenos reais e, particularmente, a dados micrometeorológicos não são autossemelhantes (de Paulo et al., 2015). Isso significa que a dimensionalidade do fenômeno dependerá da escala de tempo considerada. Por exemplo, conforme pode ser visto na figura 9, a característica geral do atrator de dados de temperatura em médias a cada meia hora exibe um perfil de ciclo com período de 24 horas, com uma baixa dimensionalidade (entre 1.5 e 2.5) (de Paulo et al., 2015) para períodos de seca em ecossistemas da região central do Brasil. Contudo, dentro de uma escala inferior a 1 minuto há uma dispersão estatística de pontos que sugerem uma dimensionalidade maior, caracterizada pela ausência de ciclos.

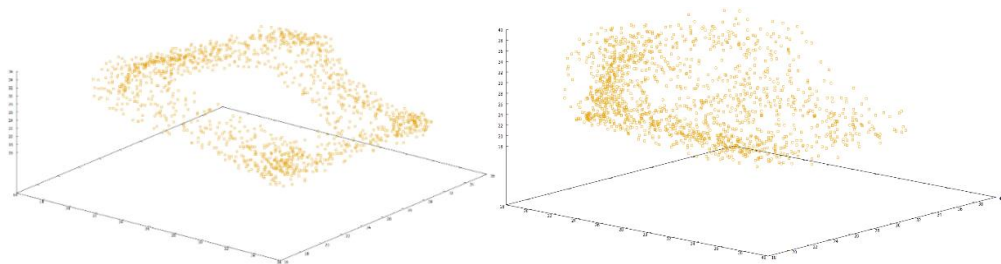


Figura 10 – Atrator reconstruído de T40 em abril/01, estação de transição e em dezembro/03, estação chuvosa.

De modo geral, dados micrometeorológicos devem estar sujeitos a uma dispersão mais estocástica para intervalos de tempo pequenos, onde pequenas flutuações são decorrentes de inúmeros fatores, enquanto a nível horário as leis de conservação da Termodinâmica limitam a complexidade da termodinâmica dos sistemas naturais. Da mesma forma, para escalas de tempo interanuais, outras forças devem ser considerados, como por exemplo os ciclos de atividade solar, que devem proporcionar outros valores de dimensionalidade correspondentes.

Tais efeitos levam a considerar a possibilidade de uma medida “local” de dimensionalidade, ou seja, uma medida que se refira a uma escala de tempo específica. Em termos do algoritmo de Grassberger e Procaccia isso representaria considerar um valor de d específico para cada escala, ou seja, para cada valor do raio das hipersferas. Lembrando que, dentro dos procedimentos da aplicação do Teorema de Takens, um valor específico de raio de hipersfera corresponde a uma escala de tempo específica já que a representação dos atratores é obtida no **espaço de tempos defasados**.

Assim sendo, o script desenvolvido nesta dissertação não considera uma regressão linear dos pontos do gráfico $\log C \times \log r$, mas a diferença entre os valores para dois pontos consecutivos, ou seja:

$$d_i = \frac{(\log C_{i+1} - \log C_i)}{(\log r_{i+1} - \log r_i)}$$

divide também os valores do raio, r , das hipersferas considerados em duzentos intervalos, desde um valor mínimo a um valor máximo escolhidos pelo usuário. Cada um desses valores de r é designado por r_i . O valor de d_i definido acima é o que é denominado neste trabalho de valor “local” de dimensionalidade. Como resultado do script, é obtido um gráfico de valores de $d_i \times r_i$, que é denominado de “espectro de dimensionalidade”. O espectro de dimensionalidade fornece informações sobre a dimensionalidade do atrator para cada escala de tempo.

Basicamente, o espectro de dimensionalidade pode ser composto por dois tipos de lugares geométricos: picos e platôs. A presença de platôs significa que a dimensionalidade tem valor constante entre um intervalo de escalas de tempo, ou seja, que há autossimilaridade limitada a essa escala. Já os picos devem ser interpretados apenas com uma aproximação. O valor de pico da dimensionalidade deve ser interpretado como um limite inferior para a dimensionalidade naquela escala, já que o intervalo r de valores de r não é grande o suficiente para que d convirja para um valor específico, como acontece no caso dos platôs.

Objetivando gerar os gráficos utilizados na análise comparativa entre os dois algoritmos, foram utilizados, no *software* R, dois *scripts*: um incluindo *ndat* ao resultado, que leva em conta os próprios pontos no cômputo da dimensão de correlação e outro, excluindo *ndat*. Os dados foram extraídos de uma coluna com cabeçalho X. Ambos os scripts adotaram TAO (tempo de defasagem) igual a 10 (número de dados) e n (dimensão de imersão) variando de 2 a 12. Os intervalos LogR_Min e LogR_Max foram -2 a 2 (T40 e RH), -1 a 3 (Rn) e 0 a 4 (PARi). Dessa forma, para cada variável, os scripts calcularam a matriz de distâncias para n dimensões do Espaço de Imersão, o coeficiente de correlação de Heaviside - diferença entre os algoritmos - e plotou o gráfico de $\log C$ em função de $\log R$. Em seguida, calcularam a razão $\log C / \log R$ e, por fim, plotou o gráfico $\log C / \log R$ em função de $\log R$.

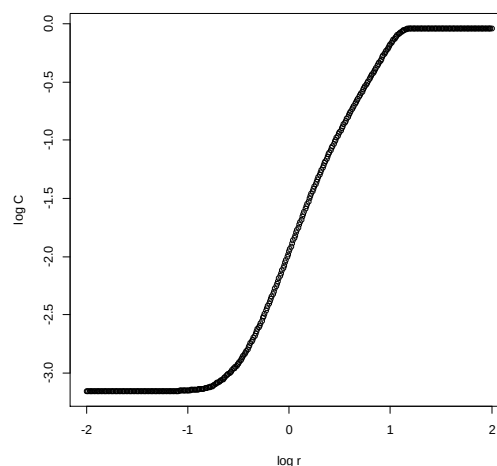


Figura 11 – Gráfico $\log C \times \log R$ de T40 em abril de 2001

A cada dimensão, o tempo médio de execução dos *scripts* em um computador com processador Intel(R) Core(TM) i7-9750H CPU @ 2.60GHz e 32 GB DDR4 de

memória RAM foi 1 minuto, sendo aproximadamente 30 minutos por variável. Considerando-se apenas $\log C / \log R$ em função de $\log R$, foram gerados 22 gráficos (11 de cada algoritmo) das 4 variáveis nos 7 meses, totalizando 616 gráficos. Após obtenção dos resultados, houve necessidade de importá-los ao Excel a fim de realizar uma análise apurada, por meio de picos e platôs. Por pico, considerou-se os valores mais proeminentes e por platô, região em que há certa estabilidade. A seguir, exemplos de como foram feitas as análises:

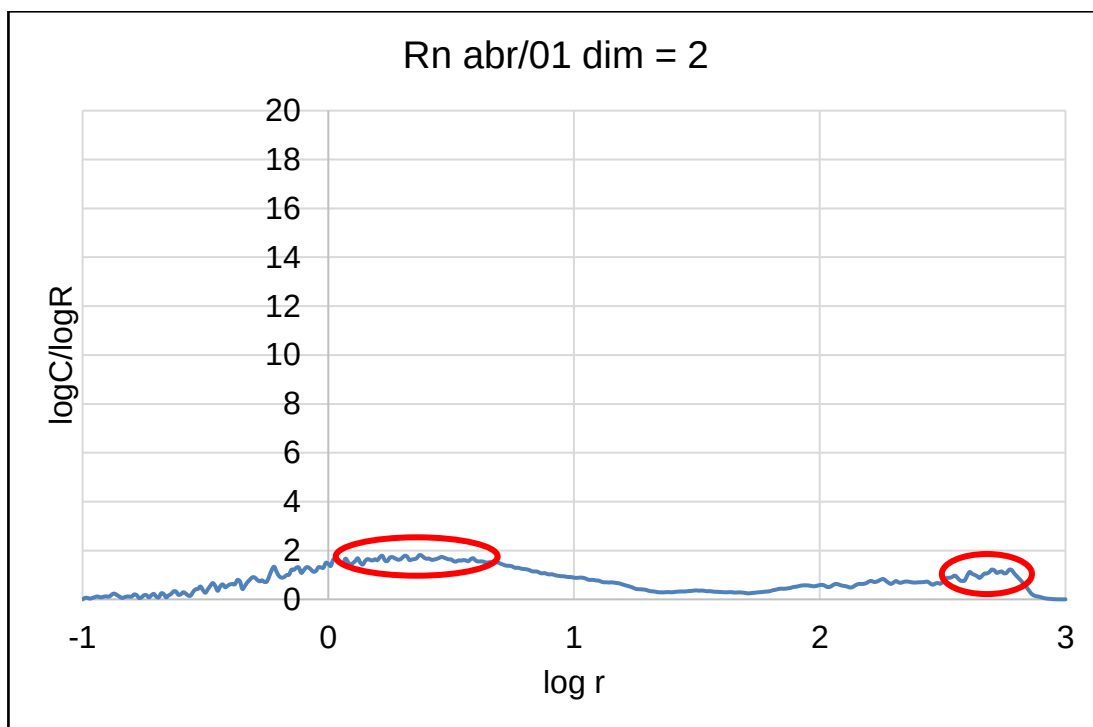


Figura 12 – Exemplo de análise por picos em uma escala reduzida na variável micrometeorológica radiação líquida, imersão 2, mês de abril.

Ao analisar o padrão da variável nessa escala, foi possível verificar duas proeminências, as quais estão circunscritas.

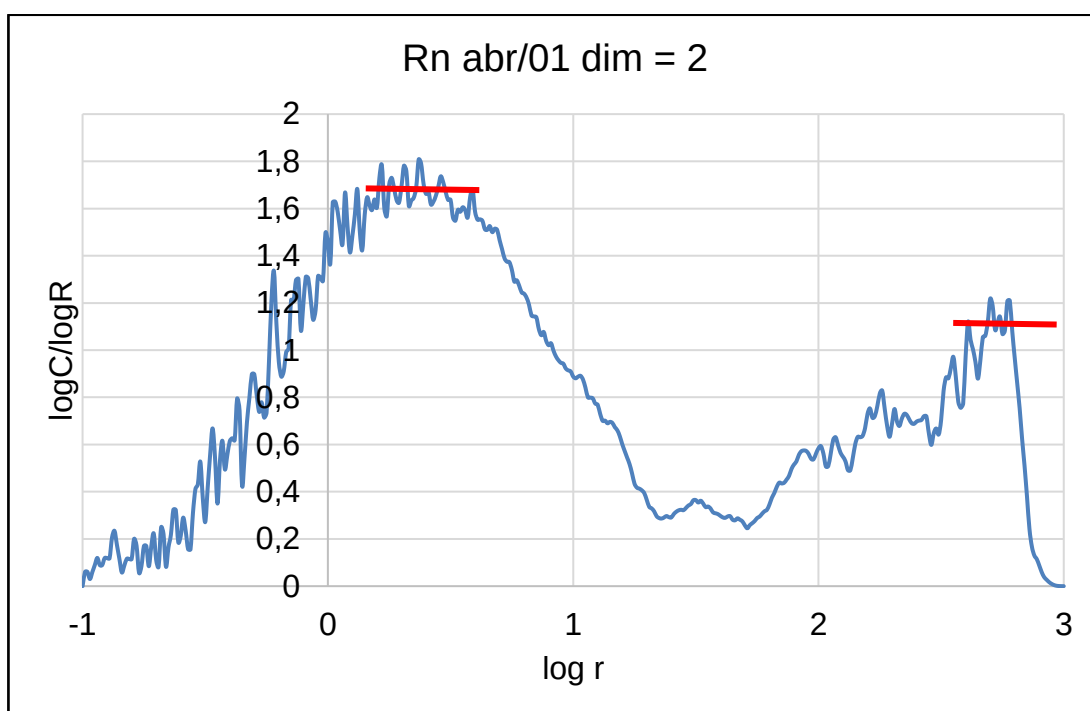


Figura 13 – Exemplo de picos ao ampliar a escala

Porém, ao reduzirmos o intervalo do eixo das abscissas, nota-se a presença de ruídos e é possível determinar os picos de forma mais precisa. A determinação do valor numérico dos picos é feita de forma subjetiva, pegando um “valor médio”, conforme sinalizado na figura acima. Pelo exemplo, os valores dos picos seriam 1,7 e 1,1. Abaixo, exemplo de platô.

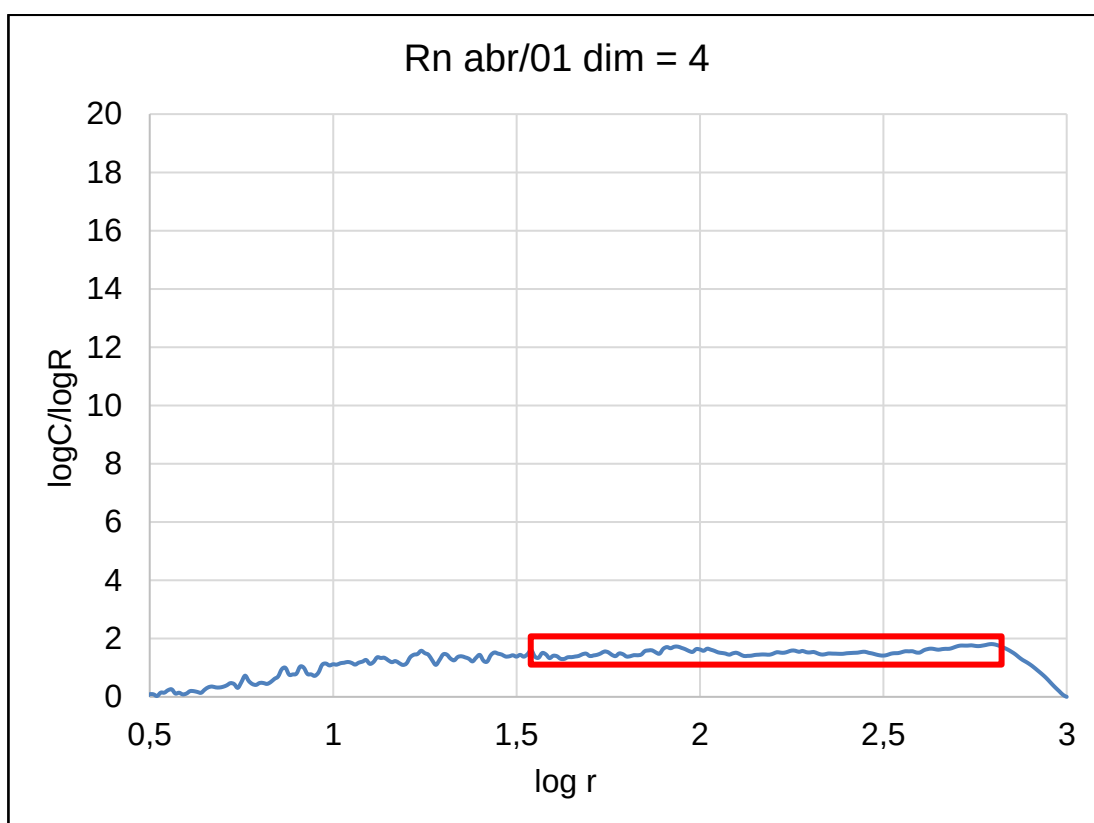


Figura 14 – Exemplo de platô na variável micrometeorológica radiação líquida, imersão 4, escala reduzida

Nessa escala, o padrão observado é aproximadamente linear

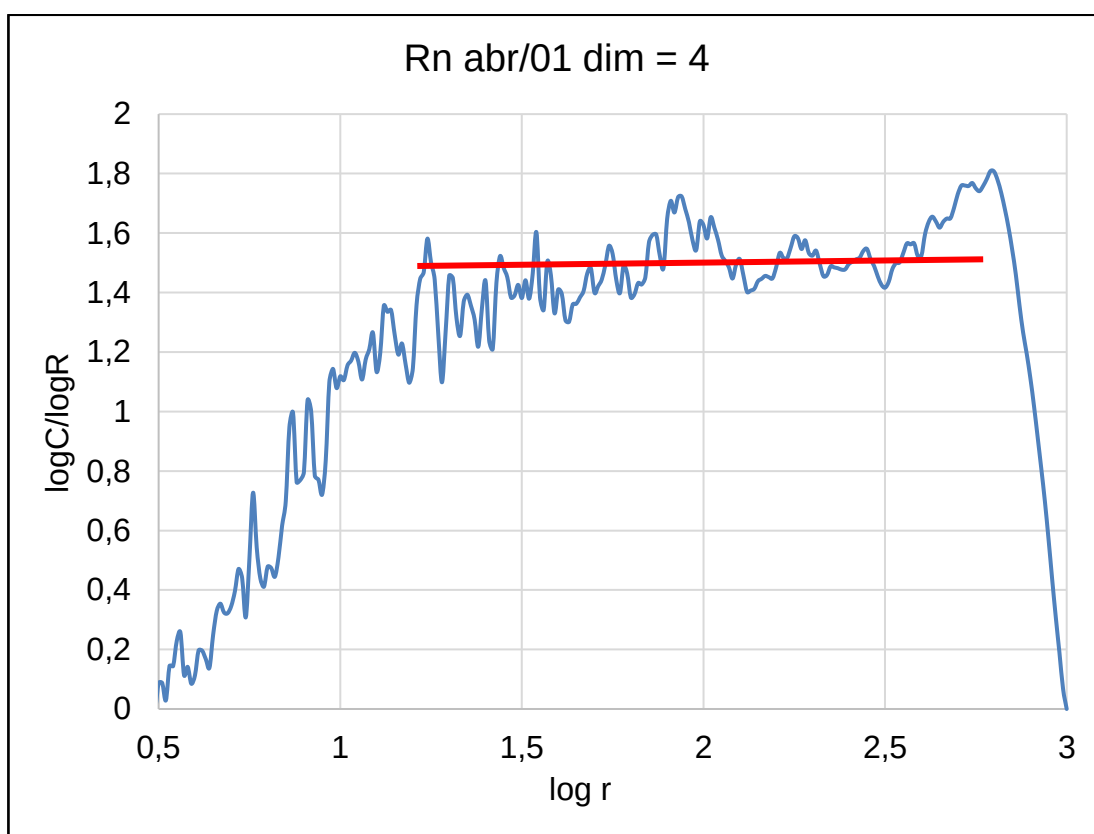


Figura 15 – Exemplo de platô na variável micrometeorológica radiação líquida, na imersão 4, ao ampliar a escala

Após a escala ser reduzida, a análise fica mais precisa, resultando em uma dimensionalidade de aproximadamente 1,5.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A figura 16 exemplifica as comparações, lado a lado, entre os espectros de dimensão obtidos com o algoritmo GP (à esquerda) e o EDC (à direita) para o mês de abril (estação de transição) nas imersões 3, 6 e 12. É possível observar o nível de ruído em pequenas escalas temporais no original, enquanto no proposto tal ruído não é observado. Por ruído, entende-se a região em que há flutuações acentuadas, ou seja, instabilidade visível. Em seguida, na figura 17, as comparações foram mostradas, como exemplo, na dimensão de imersão 12. Verifica-se na variável RH um pico de 3,5 que corresponde, aproximadamente, à dimensão de correlação para o atrator correspondente. As demais comparações, contemplando todos os meses, variáveis micrometeorológicas e dimensões de imersão estão no Apêndice A para eventuais consultas. Nele, encontrar-se-á, além disso, os gráficos $\log C \times \log R$ para ambos os algoritmos. Estão organizados da seguinte forma: PARi, Rn, RH e T40, com os primeiros gráficos sendo da releitura e em seguida o original, dispostos em ordem crescente, da dimensão de imersão 2 até 12.

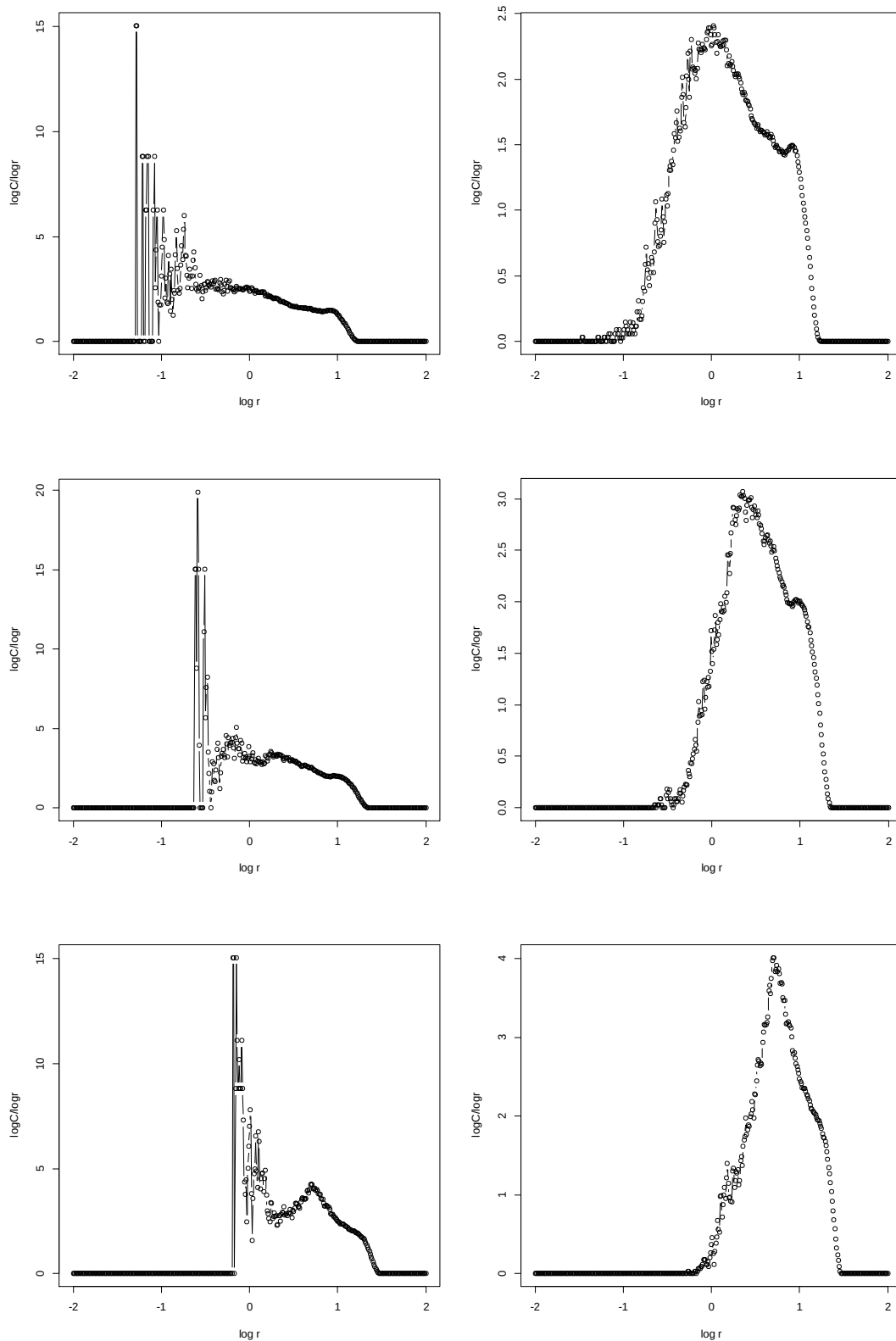


Figura 16 – Dimensões 3, 6 e 12 da variável T40 em abril de 2001. Na coluna à esquerda, o original, à direita a releitura.

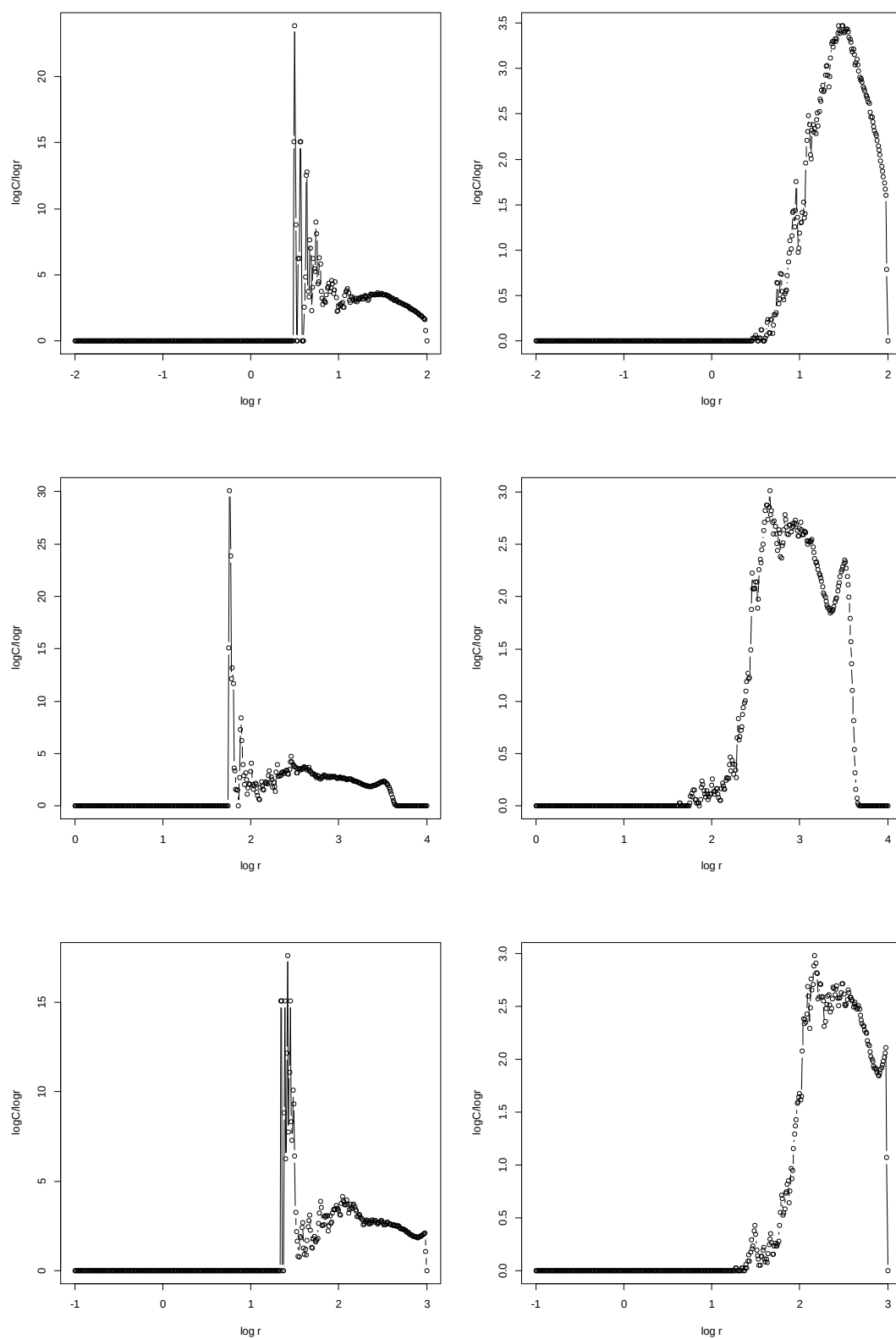


Figura 17 – RH, PARi e Rn na dimensão 12 em abril de 2001, à esquerda original e à direita releitura.

4.1. Atratores Reconstruídos por meio do Espaço de Tempos Defasados

As figuras a seguir mostram os atratores reconstruídos para que se tenha uma noção visual da dimensionalidade do atrator. É importante reforçar que abril representa a transição entre estações, por isso apresenta um comportamento mais organizado. No mês referente à estação chuvosa, no entanto, não é claro o ciclo envolvido na evolução temporal do sistema por existirem flutuações que tornam a distribuição dos pontos no gráfico menos concentradas, ou seja, mais dispersas, com as mudanças mais claras observadas em RH e T40.

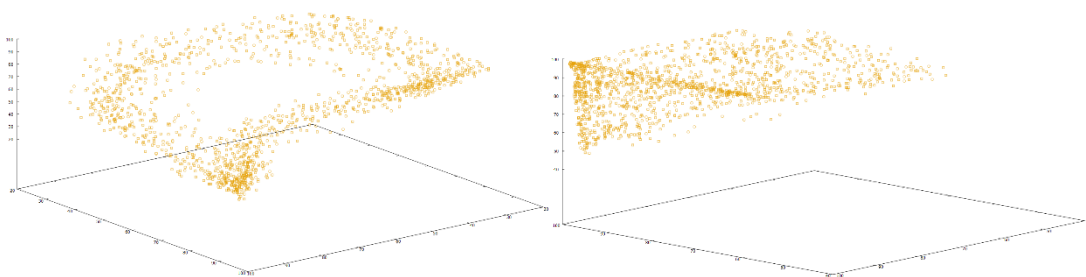


Figura 18 – RH abr/01 e dez/03

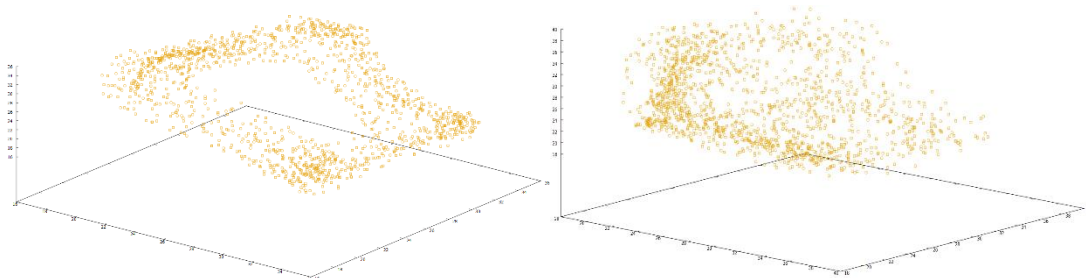


Figura 19 – T40 abr/01 e dez/03

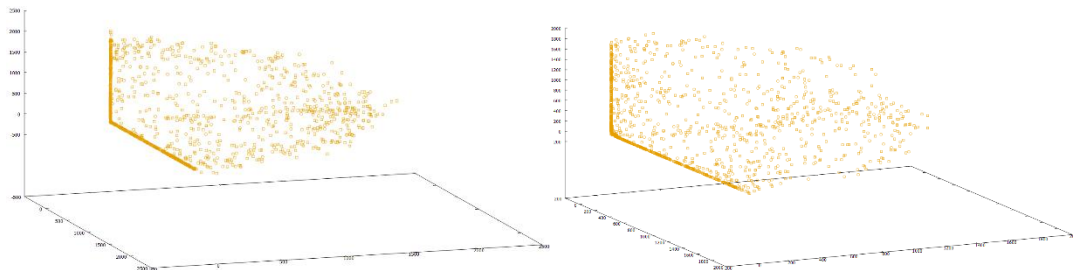


Figura 20 – PARi abr/01 e dez/03

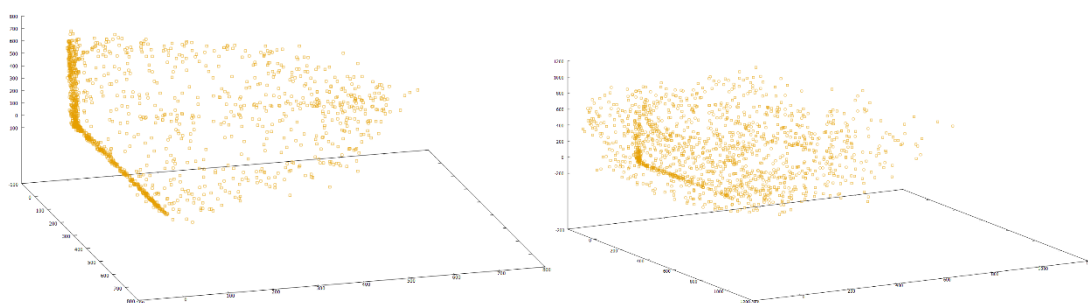


Figura 21 – Rn abr/01 e dez/03

4.2. Análise comparativa da dimensionalidade dos atratores no espectro de dimensão de correlação

As tabelas utilizadas nesta seção apresentam os valores de dimensão de correlação, identificados nos espectros, para as variáveis micrometeorológicas estudadas em vários meses, divididos por estação (seca e chuvosa), e dimensões de imersão (n) variando de 2 a 12. No caso de haver mais de um valor separado por ponto e vírgula numa célula da tabela, significa que foram identificados vários picos ou platôs. Serão tecidos comentários acerca da convergência, se há possíveis componentes estocásticas e semelhança no caos. Por caos ou caótico, considera-se a dimensão de correlação maior que 3 e por determinístico menor ou igual a 3. A componente estocástica é reconhecida quando há um aumento contínuo da dimensão de correlação conforme as imersões são feitas. Além disso, serão exibidos os gráficos plotados baseados nesses resultados para melhor visualizar a evolução das variáveis micrometeorológicas ao longo dos meses e estações.

	mai/01		jun/02		ago/03		set/03	
n	GP	EDC	GP	EDC	GP	EDC	GP	EDC
2	1.1	1.2	1.5	1.5	1.4	1.4	1.3	1.3
3	1.5	1.5; 1.8	1.7	1.6; 2.1	1.6	1.6; 2.2	1.6	1.6; 2.2
4	1.7; 2.1	1.7; 2.1	1.8	1.7; 2.5	1.8	1.8; 2.6	1.9	1.9; 2.5
5	1.9; 2.6	1.8; 2.6	1.9	1.9; 2.9	2	2; 2.9	2.1	1.9; 2.9
6	1.9; 2.7	1.9; 2.7	1.9	1.8; 3.2	1.9	1.9; 3.1	2	1.9; 3.1
7	1.9; 3	1.9; 2.8	2	2; 3.4	1.9	1.9; 3.4	2	2; 3.4
8	2; 3.1	2; 3	2	2; 3.7	2	2; 3.8	2; 3.8	2; 3.5
9	2.1; 3.3	2; 3.2	1.9	1.9; 3.9	2	2; 3.9	2; 4	2; 3.6
10	2.1; 3.6	2; 3.5	1.8	1.8; 4	2	2; 4.1	2.1; 4	2.1; 3.6
11	2.1; 3.8	2; 3.7	1.6	1.6; 4.3	2; 4.7	2; 4.4	2.1; 4	2.1; 3.8
12	2.1; 4.1	2; 4	1.5	1.5; 4.6	1.9; 5.2	1.9; 4.6	2.1; 4	2.1; 3.8

Tabela 1 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável RH na estação seca

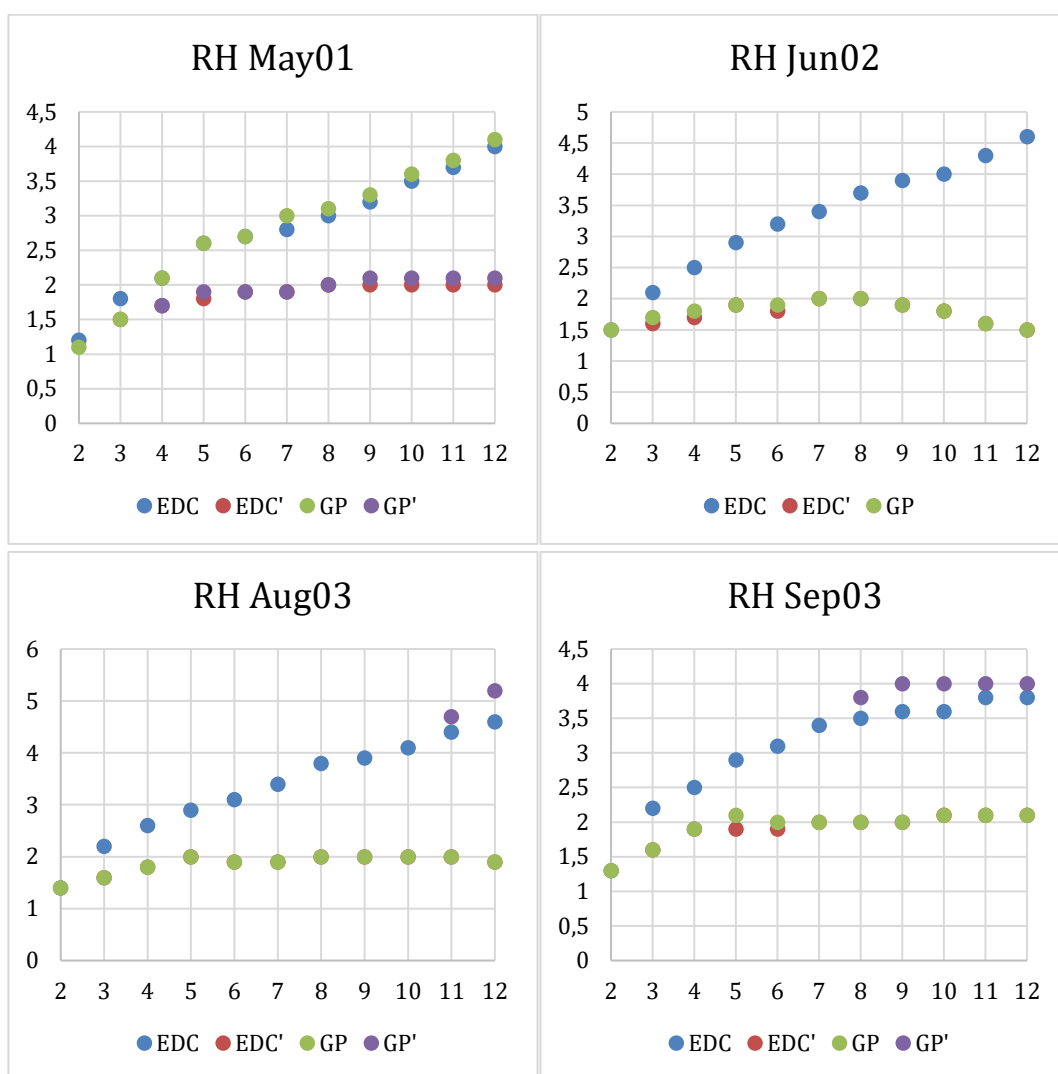


Figura 22 – Análise gráfica da evolução de RH nos meses secos

Na tabela 1, no primeiro mês da estação seca, os algoritmos não apresentaram uma diferença notável. Nos meses de junho, agosto e setembro, a releitura mostra uma componente crescente que pode indicar estocasticidade, no caso de junho e agosto e em setembro aparentemente é autossimilar no caos. Em geral, quando se analisa dimensões pequenas a diferença numérica pode não ser numericamente perceptível.

	abr/01		nov/03		dez/03	
n	GP	EDC	GP	EDC	GP	EDC
2	1	1	1.1	1.1	1	1
3	1.5; 2.7	1.4; 2	1.5	1.5	1.5	1.4
4	2; 3.5	1.9; 2.2	1.8	1.8; 2.4	1.8	1.8; 2.2
5	2.2; 5	2.2; 2.5	2.1	2; 2.8	2.2	2.2; 2.6
6	2.2	2.3; 2.8	2.2	3	2.4	2.4; 2.8
7	2.5; 4.2	2.3	2.3	3.1	2.5	2.5; 2.9
8	2.8; 5	2.7; 3	3.6	3.4	2.8	2.7; 3.1
9	3	3	3.8	3.7	3	3
10	3.2	3.1	4.1	4	3.3	3.2
11	3.4	3.4	4.2	4	3.5	3.4
12	3.5	3.5	4.4	4.1	3.6	3.5

Tabela 2 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável RH na estação chuvosa

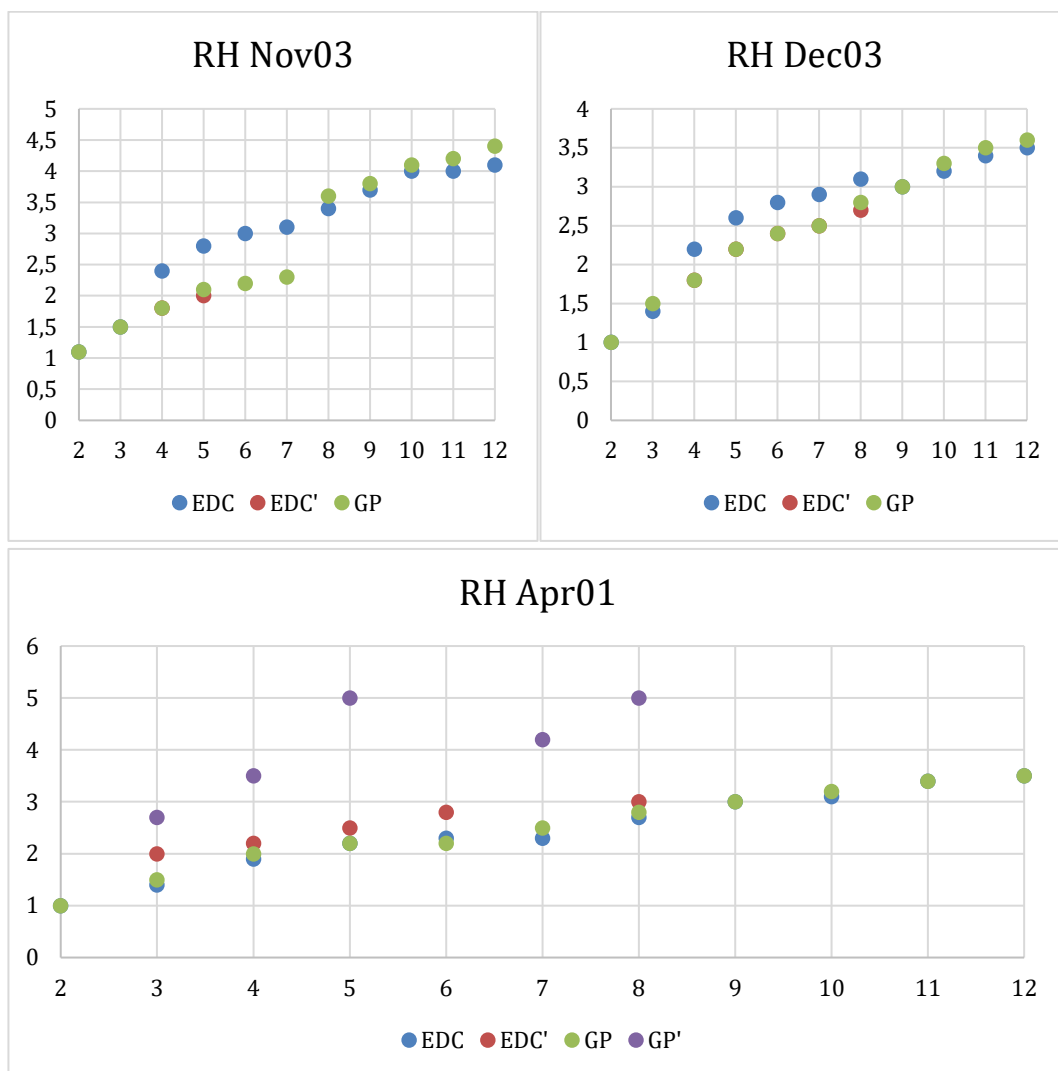


Figura 23 – Análise da evolução de RH na estação seca

Apesar de a presença de água no sistema aumentar o nível da **componente estocástica** no comportamento em escalas maiores, a dimensionalidade parece não ser afetada. Em se tratando dos algoritmos, a releitura indicou mais de um pico em novembro e dezembro, meses em que EDC apontou uma tendência crescente rumo ao caos, algo que o original não foi capaz de detectar, apenas mostrando uma diferença considerável, em novembro, entre as imersões 7 e 8. No mês de abril ocorre uma variação repentina entre as imersões 4-5 e 7-8, enquanto EDC verificou uma variação “natural”. Isso é mais um indicador de que GP é mais instável que EDC.

	mai/01		jun/02		ago/03		set/03	
n	GP	EDC	GP	EDC	GP	EDC	GP	EDC
2	1.3	1.3; 1.7	1.6	1.6	1.4	1.4	1.3	1.3
3	1.5	1.5; 2.2	1.6	1.6; 2.2	1.5	1.5; 2.3	1.5	1.5; 2.4
4	1.7	1.6; 2.7	1.9	1.9; 2.5	1.8	1.7; 2.5	1.8	1.8; 2.7
5	1.8; 3.2	1.7; 2.9	1.9	1.9; 2.7	1.9	1.8; 2.8	2	2; 3
6	1.7; 3.5	1.8; 3.1	1.8	1.8; 3	1.8	1.8; 3.1	2	2; 3.2
7	1.8; 3.5	1.8; 3.2	1.9	1.9; 3.2	1.9	1.9; 3.3	2	2; 3.3
8	1.9; 3.6	1.8; 3.5	1.9	1.9; 3.3	1.9	1.9; 3.5	2	2; 3.5
9	1.9; 3.9	1.8; 3.6	2	2; 3.5	2; 3.9	2; 3.6	2; 3.9	2; 3.6
10	1.9; 4	1.9; 3.6	2	2; 3.6	2; 4	2; 3.8	2; 4	2.1; 3.8
11	1.9; 4	1.9; 3.8	2	2; 3.7	2; 4.1	2; 3.9	2; 4	2.1; 3.7
12	1.9; 4.1	1.9; 3.9	2.1	2.1; 3.8	2.1; 4.3	2.1; 4	2; 4.1	2; 3.8

Tabela 3 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável T40 na estação seca

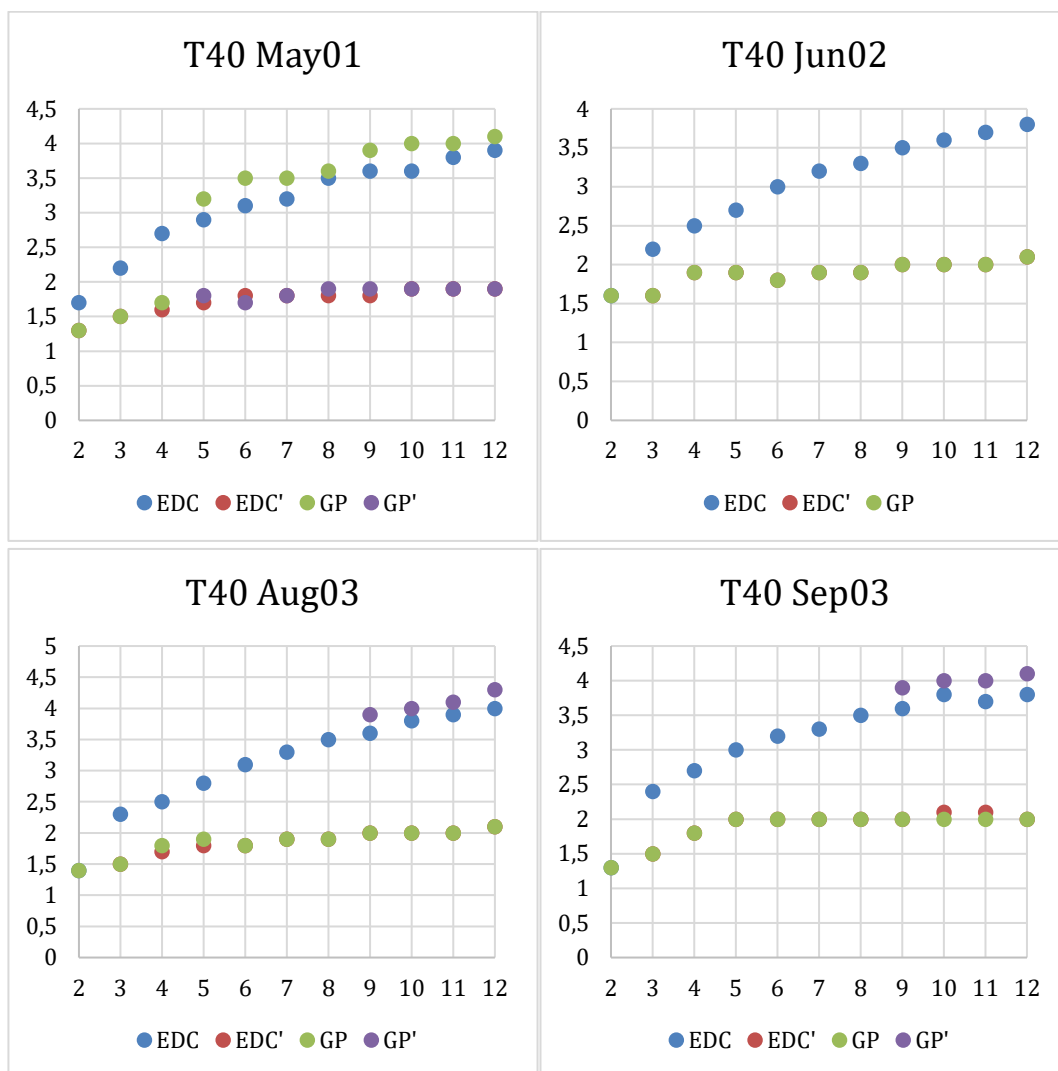


Figura 24 – Evolução da dimensionalidade de T40 no período de seca

O algoritmo original falhou em reconhecer outros picos no mês de junho e apresentou caos no mês de setembro, claramente visível no EDC, enquanto no original o caos aparece de forma repentina. Vê-se claramente que há estabilidade determinística e componente estocástica em todos os meses, com exceção de setembro em que mostra certa estabilidade no regime caótico.

	abr/01		nov/03		dez/03	
n	GP	EDC	GP	EDC	GP	EDC
2	1.8	1.2	1.1	1.1	1.1	1.1
3	2.6	2.3	1.5	2.3	1.5	1.5; 2.2
4	2.9	2.6	1.7	2.6	1.8	1.8; 2.5
5	3.4	2.9	1.9	1.8; 2.9	2	2.1; 2.9
6	3.5	3	1.9	3.1	2.2	2.2; 3
7	3.4	3.1	2	3.2		3.3
8	3.4	3.2	2	3.4	4.1	3.5
9	3.5	3.4	1.9; 4	3.8		3.5
10	3.7	3.7	2; 4.2	1.9; 4		3.7
11	4	4	2; 4.1	2; 4		3.6
12	4	4	2; 4.1	4.1		3.6

Tabela 4 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável T40 na estação chuvosa

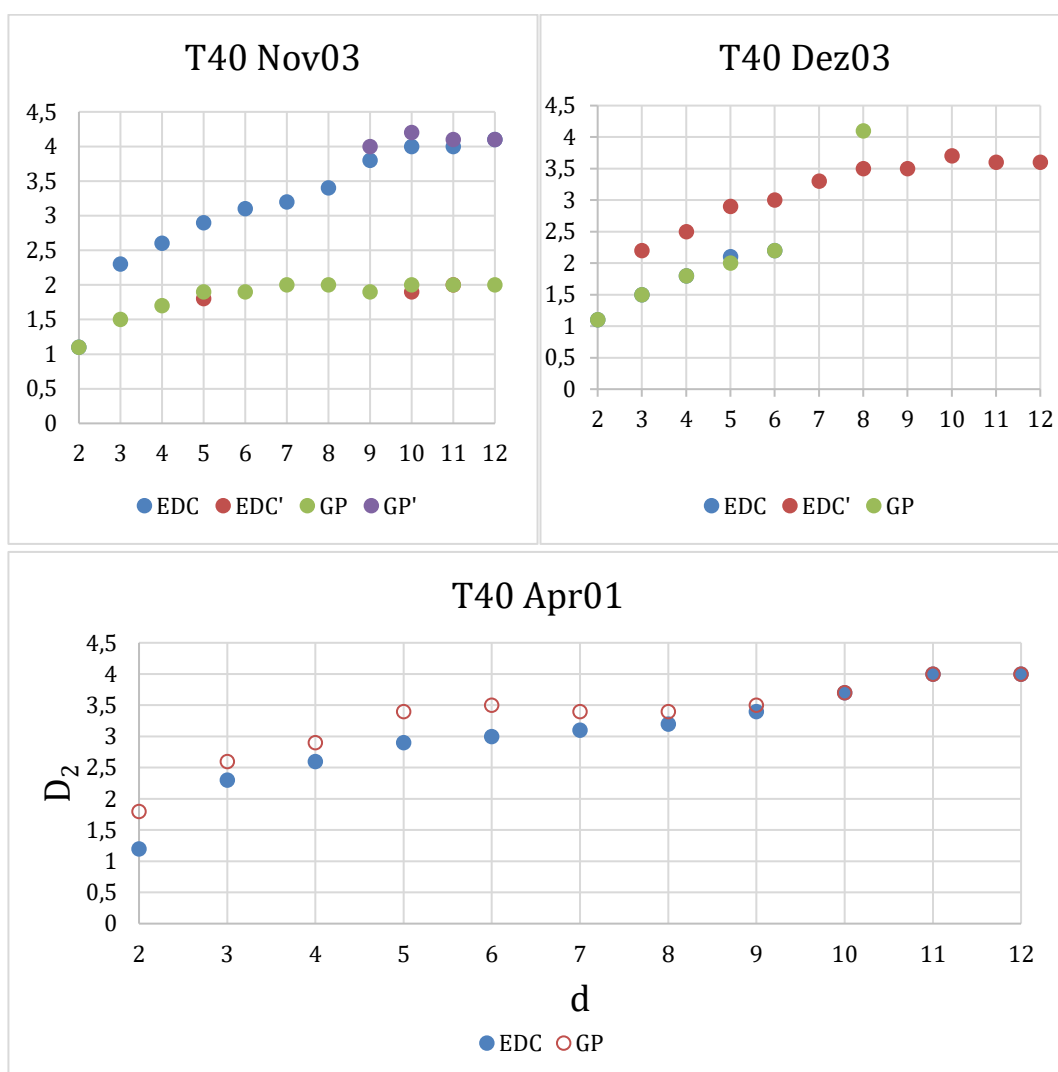


Figura 25 – Evolução gráfica de T40 na estação chuvosa

A variável T40 apresentou estabilidade caótica aparente nas imersões 11 e 12 na maior parte dos meses, entretanto, no mês de dezembro, o algoritmo GP não obteve êxito em detectar picos ou patamares. **Considerando a evolução gráfica das imersões, ilustrada na figura 25, o mês de abril foi o mês mais caótico e o de novembro apresentou tanto um padrão determinístico, ou seja, menor que 3 quanto caótica, maior que 3.**

	mai/01		jun/02		ago/03		set/03	
n	GP	EDC	GP	EDC	GP	EDC	GP	EDC
2	1.1	1.2; 1.7	0.5; 2.1	1.6; 2.1	1.5; 2.6	1.5; 2.7	1	1; 1.7
3	1.6	1.5; 1.7	0.8; 2.6	1.8; 2.8	1; 3.4	1.8; 3.4	1.4	1.4; 1.8
4	1.5	1.5; 1.8	1.2; 2	1.3; 1.3; 2.9	1.5; 2.1	1.6; 2	1.6	1,6
5	1.7	1.9; 2.1	1.2; 4	1.4; 2; 3.9	2; 3.9	2.1; 3.4	1.9	2
6	1.9	1.9	1.2; 1.6; 3.2	1.6; 1.9; 3.1	2; 3.2	2; 2.2; 3.1	1.9	2
7	2	2.1	1.3; 1.8; 3.3	1.5; 3.4	2; 3.4	1.9; 2.3; 3.3	2	2
8	2.1	2.2; 2.4	1.3; 1.9; 3.6	1.4; 1.9; 3.5	2.4; 3.8	2.1; 3.6	2,2	2.2; 2.3
9	2.4	2.2; 2.8	1.3; 2; 3.7	2; 3.6	2.4; 3.1	2.4; 3.4	2.2; 2.6	2.3; 2.5
10	2.4	2.4; 3.1	1.3; 2.1; 4.2	2; 4.4	1.9; 2.6	2.3; 2.5	2.3; 2.7	2.4; 2.7
11	2.4	2.4; 2.7	2.4; 3.8	2.2; 2.5; 3.8	1.9; 2.7	2.3; 2.6	2.3; 2.8	2.4; 2.7
12	2.4; 2.9	2.4; 2.9	2.4; 4.1	2.2; 2.5; 4.1	1.9; 2.7	1.9; 2.6	2.4; 2.9	2.4; 2.4

Tabela 5 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável Rn na estação seca

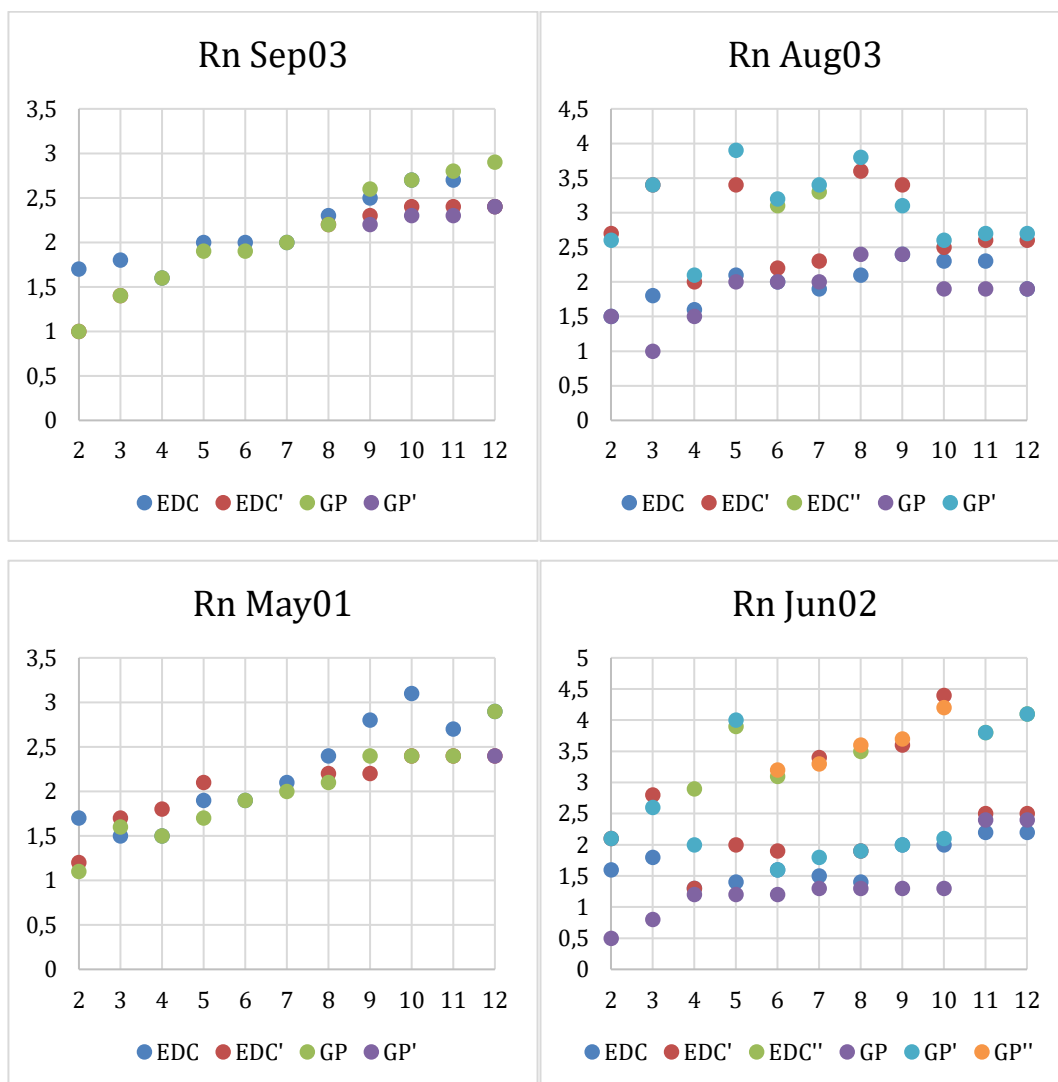


Figura 26 – Evolução gráfica de Rn na estação seca

Iniciando as análises na radiação líquida, foi nesta variável em que houve o maior número de picos apresentando, na maior parte, comportamentos determinísticos nos meses de maio e setembro, com EDC detectando mais de um pico nas imersões 2-5 e 8-12 em maio e 2-3 e 8 em setembro enquanto nos meses de junho e agosto houve um pico caótico nas imersões 5 em diante. Destaca-se, no mês de agosto, os picos praticamente caóticos além de atingir o caos e em seguida retornar ao meio determinístico.

	abr/01		nov/03		dez/03	
n	GP	EDC	GP	EDC	GP	EDC
2	1.1; 2	1.1; 1.7	1.5	1.1; 1.5	1.5	1.4; 1.5
3	1.3	1.5; 1.7	2	1.2; 2	2	1.9
4	1.6	1.5	2.4	2.3	2.3	2.3
5	2.5	1.7	2.6	2.5	2.6	2.6
6	2; 2.6	1.9	2.7	2.6; 2.8	3	2.8
7	2; 2.6	2	3	3.1	3.2	3.1
8	2.1; 2.8	2.1	3.1	3.2	3.4	3.3
9	3; 3.6	2.3	3.2	3.2	3.6	3.5
10	3; 4.1	2.4	3.3	3.1	3.8	3.6
11	3; 4.2	2.5	3.4	3.3	4	3.7
12	4	2.5	3.6	3.4	4	3.8

Tabela 6 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável Rn na estação chuvosa

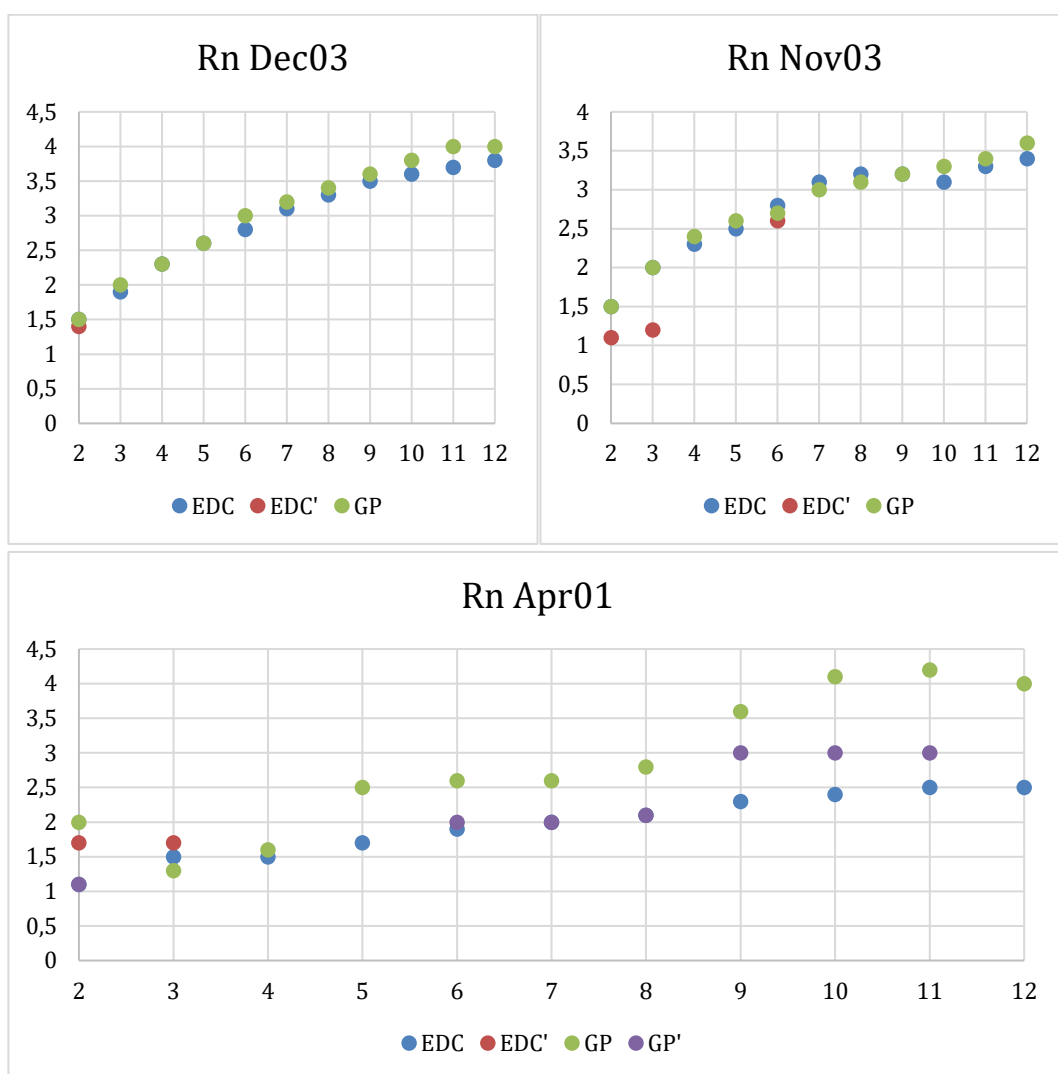


Figura 27 – Evolução gráfica de Rn na estação seca

Enquanto a estação seca mostra comportamentos predominantemente determinísticos, isso não se aplica à estação chuvosa, especialmente no mês de abril, a releitura de GP revela uma estabilidade em 2.5 enquanto GP realça uma componente estocástica que chega em 4 na imersão 12. Há a possibilidade de o caos ser acentuado por conta da presença de água no sistema, que pode trazer novas componentes. Nos meses de novembro e dezembro GP não conseguiu captar mais de um pico.

	mai/01		jun/02		ago/03		set/03	
n	GP	EDC	GP	EDC	GP	EDC	GP	EDC
2	1	1	1; 2	1; 2	1; 2.4	1; 2.4	1	1
3	1.2	1.5	2.1; 2.5	1.1; 2.1	1.5; 2.7	1.2; 2.7	1.4	1.2; 1.6
4	1.8	1.8	1.6; 2.1	1.6; 2.1	1.3; 2	1.5; 2	1.5; 1.8	1.5; 1.8
5	2.1	1.9; 2.1	1.9; 2.7	1.9; 2.8	1.8; 3.5	1.7; 3.6	1.6; 2.1	1.7; 2.1
6	2	2	2; 2.4	1.9; 2.4	1.8; 2.9	1.8; 2.9	1.7; 2.1	1.8; 2.1
7	2.1	2.1	1.9; 2.9	1.8; 2.9	1.8; 3.1	1.8; 3.1	1.7; 2.2	2.1; 2.2
8	2.2	2.4	1.7; 2.9	1.5; 3	2.1; 3.4	2; 3.3	1.7; 2.3	2.3; 2.4
9	2.3	2.4; 2.6	1.9; 3.4	1.6; 3.4	2.3; 3.5	2.3; 3.5	1.7; 2.4	2.4; 2.7
10	2.4	2.4; 2.9	2.1; 3.6	2; 3.5	2.5; 3.8	2.4; 3.9	1.7; 2.5	2.5; 2.7
11	2.4	2.4; 2.9	2.2; 3.4	2; 3.4	2.5; 3.7	2.4; 3.7	1.6; 2.6	2.6; 2.8
12	2.4; 3.9	2.4; 2.9	2.1; 3.6	1.9; 3.7	2.5; 4	2.5; 4.1	1.6; 2.7	2.6; 2.8

Tabela 7 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável PARi

na estação seca

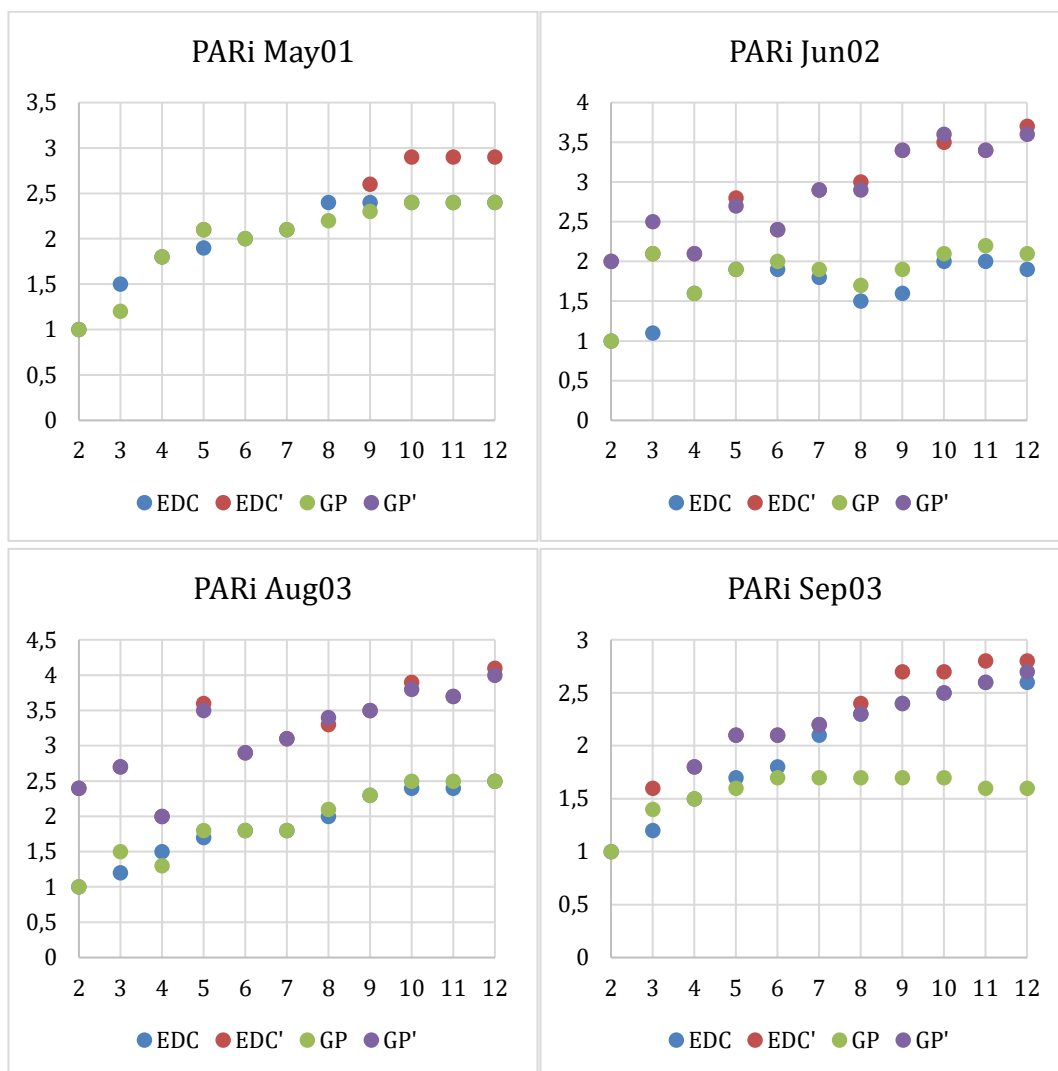


Figura 28 – Evolução gráfica da PARi na estação seca

A PARi apresentou, no mês de maio, comportamento determinístico na maior parte das imersões, com um pico caótico na imersão 12, e totalmente determinístico em setembro, enquanto o mês de junho foi ao caos na imersão 8 (EDC) e 9 (GP). Já o mês de agosto mostra uma crescente ao caos partindo da imersão 7, com um pico na imersão 5. Nesse caso, a diferença entre os algoritmos não foi numericamente significativa.

	abr/01		nov/03		dez/03	
n	GP	EDC	GP	EDC	GP	EDC
2	1.2	1	1	1	1	1
3	1.4	1.5	1.2	1.3	1.1	1.3
4	1.5	1.7	1.6	1.6	1.6	1.7
5	1.8	2	1.8	1.9	2	1.9
6	2	2	1.9	2.1	2.1	2.1
7	2	2	2.2	2.2	2.2	2.2
8	2.1; 2.7	2.2	2; 2.4	2.4	2.5	2.4
9	2.1; 3.3	2.3	2.1; 2.8	2.7	2.9	2.8
10	2.2; 3.9	2.4	2.1; 3.2	2.2; 3	3	2.9
11	2.2; 4.4	2.4	2.2; 3.3	2.2; 3.1	3	3.1
12	2.2; 4.7	2.4	2.2; 3.4	2.2; 3.4	3.1	3.2

Tabela 8 - Dimensão de correlação e suas respectivas imersões (n) da variável PARi na estação chuvosa

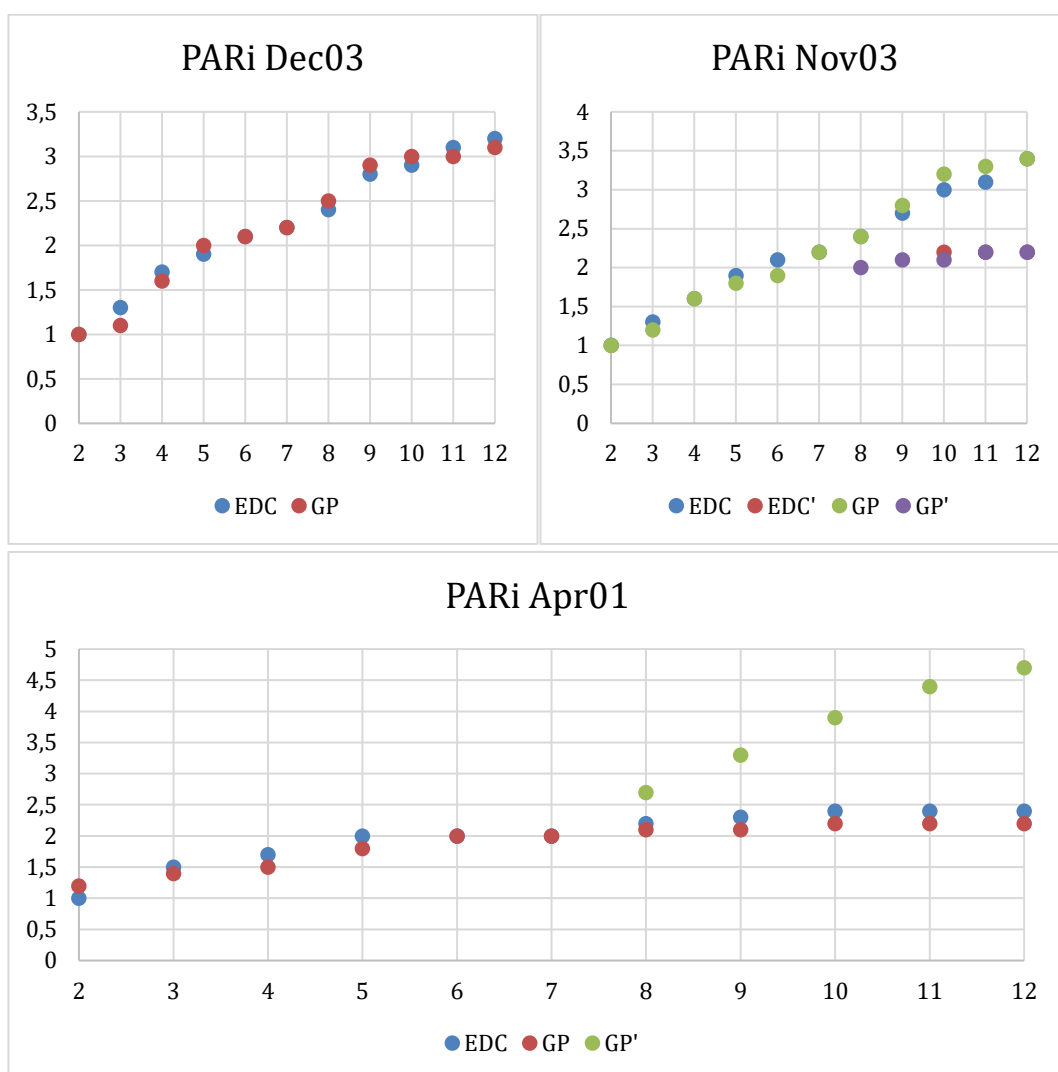


Figura 29 – Evolução gráfica da PARi na estação chuvosa.

O mês de abril diferenciou-se nos picos, haja vista a existência de dois picos detectados por GP, de maneira que os valores crescentes do segundo pico implicam na presença de uma componente estocástica, enquanto apenas um pico foi identificado no EDC, caracterizando um comportamento puramente determinístico. Nos meses de novembro e dezembro não foi verificada uma diferença numérica expressiva.

5. CONCLUSÃO

Os resultados obtidos por meio da experimentação e comparação realizadas neste trabalho indicaram a eficiência na atenuação de ruídos em pequenas escalas temporais para todas as variáveis estudadas. De maneira geral, as variáveis em que foram feitas as análises são essencialmente determinísticas, porém, em algumas escalas apresentaram comportamento caótico ou componente estocástica que se estende de forma indefinida.

O algoritmo proposto gera um gráfico com comportamento de melhor visualização no espectro de dimensionalidade, o que facilita a identificação de picos e platôs, ainda que em alguns meses não tenha apresentado discrepância numérica significativa. Pode-se considerar que, por meio do algoritmo proposto, obtiveram-se resultados consistentes tanto no que diz respeito a estabilidade nos valores encontrados como também em relação a identificação de diferentes graus de complexidade em diferentes escalas, o que permite análise dimensional de atratores não autossemelhantes.

Na reconstrução dos atratores foi possível verificar que na estação chuvosa há um maior espalhamento dos pontos, tornando difícil a evidência dos ciclos enquanto na estação seca o comportamento inverso foi observado. Notou-se que, fundamentalmente, o atrator de T40 é o inverso de RH e os atratores de Rn e PARi são similares. Apesar disso, no que tange a parte numérica da análise de dimensionalidade destes, em ambos os algoritmos, não há diferenças significativas. Ainda que a presença de água no sistema aumente o nível de caos no comportamento em escalas maiores, a dimensionalidade parece não ser afetada.

Sugere-se, para trabalhos futuros, um intervalo de r diferente para Rn e PARi que contenha toda a evolução dimensional das variáveis, pois, conforme representação gráfica, uma queda abrupta e ausência do platô superior nas variáveis à medida que os pontos se aproximavam do limite foram evidenciadas, o que poderá ser solucionado com a utilização de um intervalo adequado.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BADII, Remo; POLITI, Antonio. Statistical description of chaotic attractors: the dimension function. **Journal of Statistical Physics**, v. 40, n. 5, p. 725-750, 1985.

BARKOULAS, John; TRAVLOS, Nickolaos. Chaos in an emerging capital market? The case of the Athens Stock Exchange. **Applied Financial Economics**, v. 8, n. 3, p. 231-243, 1998.

BAKER, Gregory L.; GOLLUB, Jerry P. **Chaotic dynamics: an introduction**. Cambridge university press, 1996.

BOLEA, Juan et al. Methodological framework for estimating the correlation dimension in HRV signals. **Computational and mathematical methods in medicine**, v. 2014, 2014.

CHANG, Kenneth. Edward N. Lorenz, a Meteorologist, and a Father of Chaos Theory, Dies at 90. **The New York Times**, v. 17, 2008.

CHATTERJEE, Sangit; YILMAZ, Mustafa R. Chaos, fractals, and statistics. **Statistical Science**, v. 7, n. 1, p. 49-68, 1992.

COSTA, Madalena; GOLDBERGER, Ary L.; PENG, C.-K. Multiscale entropy analysis of biological signals. **Physical review E**, v. 71, n. 2, p. 021906, 2005.

DE PAULO, Sergio Roberto; DE PAULO, Iramaia Jorge Cabral; DE DECKER, Yannick. Reconstructing the micrometeorological dynamics of the southern Amazonian transitional forest. **Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science**, v. 25, n. 12, p. 123123, 2015.

FERREIRA, Hozana Silva et al. Modelagem da dinâmica temporal da temperatura do ar para baixa umidade em ecossistemas amazônicos. 2018.

FARMER, J. Doyne. Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 4, n. 3, p. 366-393, 1982.

FRASER, Andrew M.; SWINNEY, Harry L. Independent coordinates for strange attractors from mutual information. **Physical review A**, v. 33, n. 2, p. 1134, 1986.

GHIL, Michael et al. Advanced spectral methods for climatic time series. **Reviews of geophysics**, v. 40, n. 1, p. 3-1-3-41, 2002.

GOUDRIAAN, J. (1988), The bare bones of leaf-angle distribution in radiation models for canopy photosynthesis and energy exchange, **Agric. For. Meteorol.**, 43, 155–169.

GRASSBERGER, Peter; PROCACCIA, Itamar. Measuring the strangeness of strange attractors. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 9, n. 1-2, p. 189-208, 1983.

GRASSBERGER, Peter; PROCACCIA, Itamar. Characterization of strange attractors. **Physical review letters**, v. 50, n. 5, p. 346, 1983.

HENTSCHEL, H. George E.; PROCACCIA, Itamar. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 8, n. 3, p. 435-444, 1983.

HAMILTON, James Douglas. **Time series analysis**. Princeton university press, 2020.

PRIGOGINE, Ilya. Exploring complexity. **European journal of operational research**, v. 30, n. 2, p. 97-103, 1987.

KRAKOVSKA, Anna. Correlation dimension underestimation. **Acta physica slovaca**, v. 45, n. 5, p. 567-574, 1995.

LADYMAN, James; LAMBERT, James; WIESNER, Karoline. What is a complex system? **European Journal for Philosophy of Science**, v. 3, n. 1, p. 33-67, 2013.

MANDELBROT, B. B. Ebookstore Release Benoit B Mandelbrot Fractals: Form. **Chance And Dimension** prc, Freeman, p. 365, 1977.

MCCLURE, Mark; **Fractal Geometry: Real Analysis II**, spring 2016. 177 f. Notas de Aula. Em formato digital (<https://marksmath.org/classes/Spring2016RealII/handouts/FractalGeometryMaster.pdf>).

MILNOR, John. On the concept of attractor. In: **The theory of chaotic attractors**. Springer, New York, NY, 1985. p. 243-264.

MIZRACH, Bruce. The state of economic dynamics. **Journal of Economic Dynamics and Control**, v. 16, n. 1, p. 175-190, 1992.

MUÑOZ, Valeria García. **Reconstrucción de atractores para el análisis de registros electrofisiológicos**. 2021. Tese de Doutorado. Centro de Investigación en Matemáticas.

NAYFEH, Ali H.; BALACHANDRAN, Balakumar. **Applied nonlinear dynamics: analytical, computational, and experimental methods**. John Wiley & Sons, 2008.

NICOLIS, Gregoire; PRIGOGINE, Ilya. Exploring complexity an introduction. 1989.

NOAKES, Lyle. The Takens embedding theorem. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 1, n. 04, p. 867-872, 1991.

PACKARD, Norman H. et al. Geometry from a time series. **Physical review letters**, v. 45, n. 9, p. 712, 1980.

RUELLE, David; ISOLA, Stefano. **Chaotic evolution and strange attractors**. Cambridge University Press, p.126-137, 1989.

RUELLE, David. The Claude Bernard Lecture, 1989-Deterministic chaos: the science and the fiction. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 427, n. 1873, p. 241-248, 1990.

SCHNEIDER, Marguerite; SOMERS, Mark. Organizations as complex adaptive systems: Implications of complexity theory for leadership research. **The Leadership Quarterly**, v. 17, n. 4, p. 351-365, 2006.

SUGIHARA, George et al. Detecting causality in complex ecosystems. **science**, v. 338, n. 6106, p. 496-500, 2012. Movies from the supplementary info of the paper (Takens' theorem in action for the Lorenz chaotic attractor, <https://www.youtube.com/watch?v=6i57udsPKms>)

TAKENS, Floris. Detecting strange attractors in turbulence. In: **Dynamical systems and turbulence, Warwick 1980**. Springer, Berlin, Heidelberg, 1981. p. 366-381.

THEILER, James. Lacunarity in a best estimator of fractal dimension. **Physics Letters A**, v. 133, n. 4-5, p. 195-200, 1988.

THEILER, James. Estimating fractal dimension. **JOSA A**, v. 7, n. 6, p. 1055-1073, 1990.

THEILER, James; LOOKMAN, Turab. Statistical error in a chord estimator of correlation dimension: the "rule of five". **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 3, n. 03, p. 765-771, 1993.

UHL-BIEN, Mary; MARION, Russ; MCKELVEY, Bill. Complexity leadership theory: Shifting leadership from the industrial age to the knowledge era. **The leadership quarterly**, v. 18, n. 4, p. 298-318, 2007.

VOURLITIS, George L. et al. Seasonal variations in the evapotranspiration of a transitional tropical forest of Mato Grosso, Brazil. **Water resources research**, v. 38, n. 6, p. 30-1-30-11, 2002.

VOURLITIS, George L. et al. Effects of meteorological variations on the CO₂ exchange of a Brazilian transitional tropical forest. **Ecological applications**, v. 14, n. sp4, p. 89-100, 2004.

VOURLITIS, George L. et al. Energy balance and canopy conductance of a tropical semi-deciduous forest of the southern Amazon Basin. **Water Resources Research**, v. 44, n. 3, 2008.

WANG, Jiang et al. Chaos analysis of the electrical signal time series evoked by acupuncture. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 33, n. 3, p. 901-907, 2007.

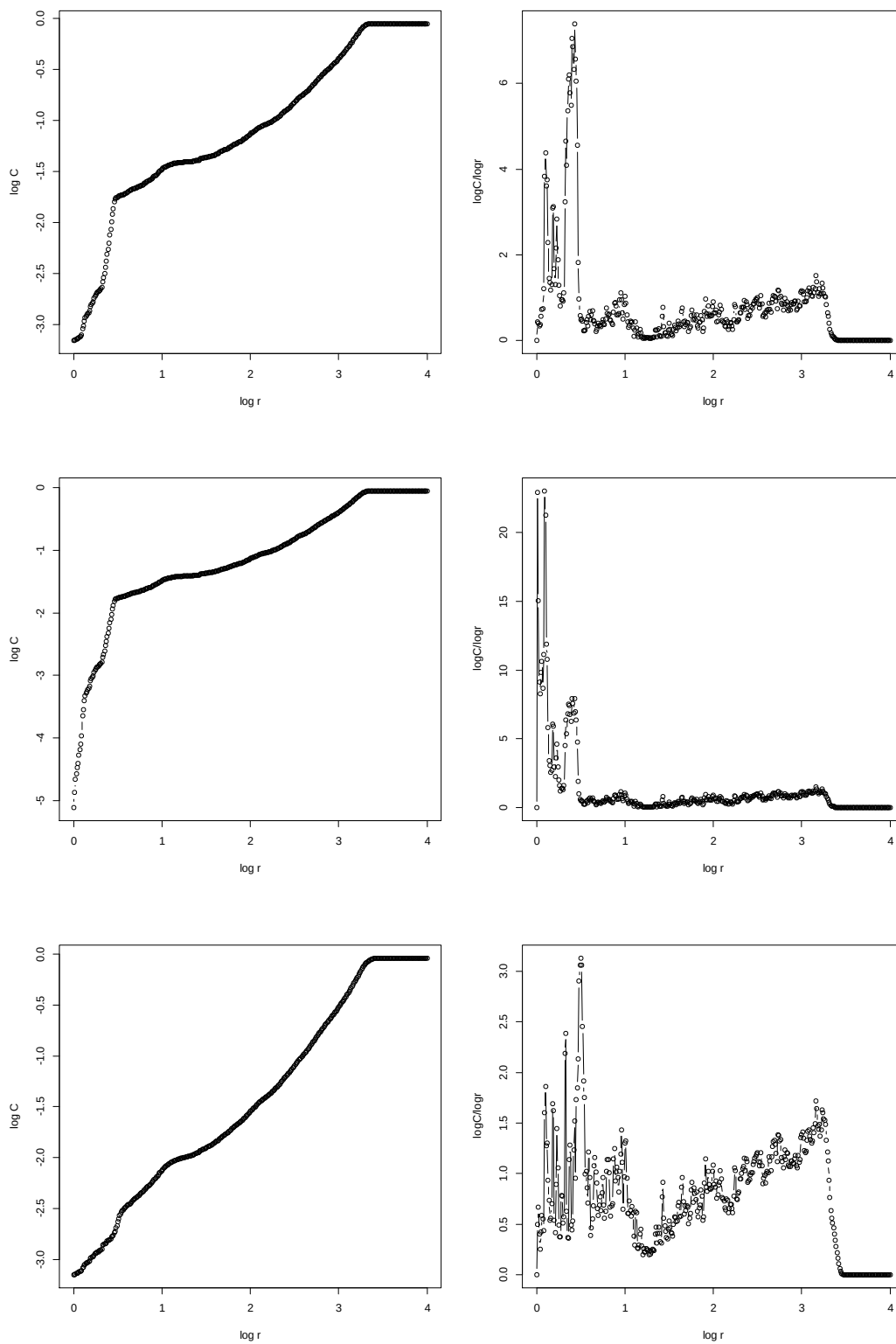
WEI, William W.S. Time series analysis. 2013.

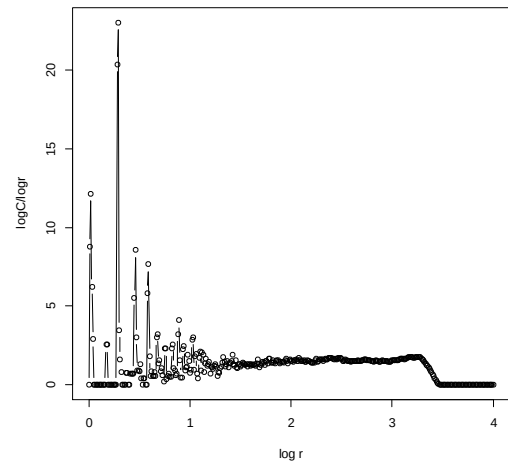
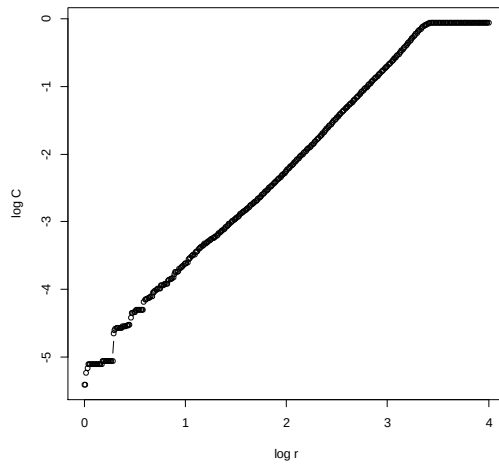
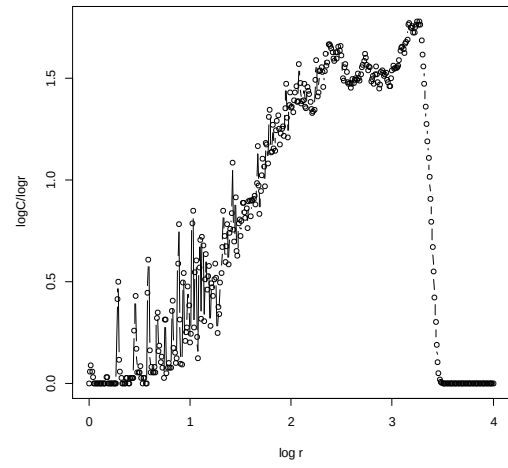
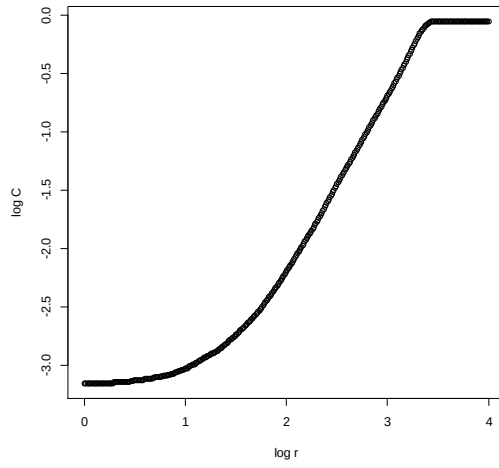
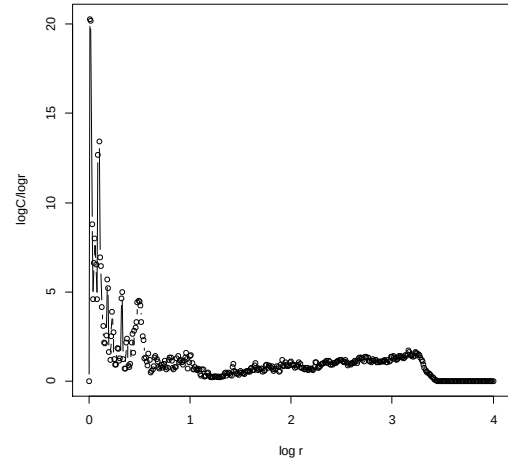
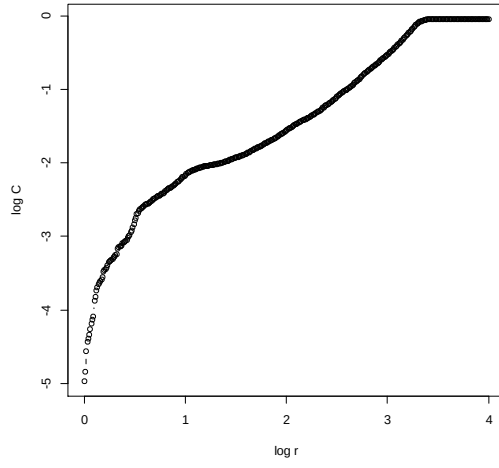
YULE, George Udny. VII. On a method of investigating periodicities disturbed series, with special reference to Wolfer's sunspot numbers. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character**, v. 226, n. 636-646, p. 267-298, 1927.

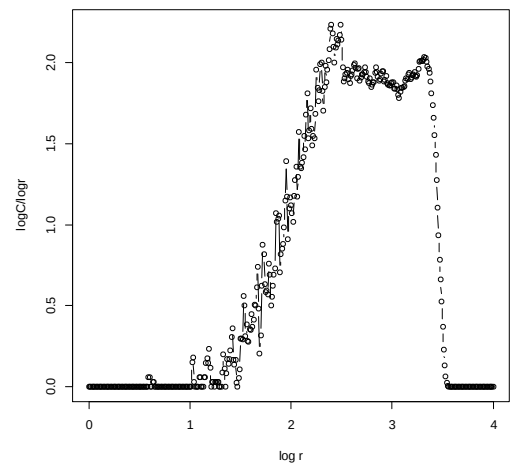
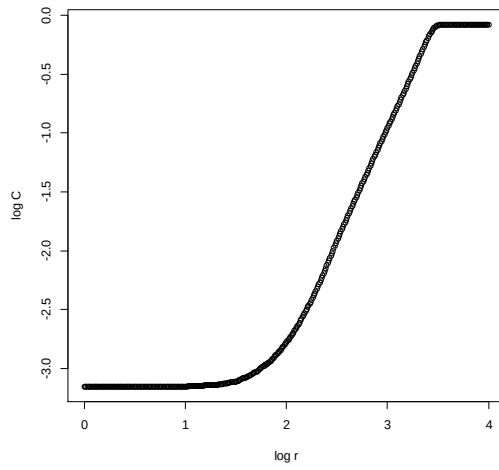
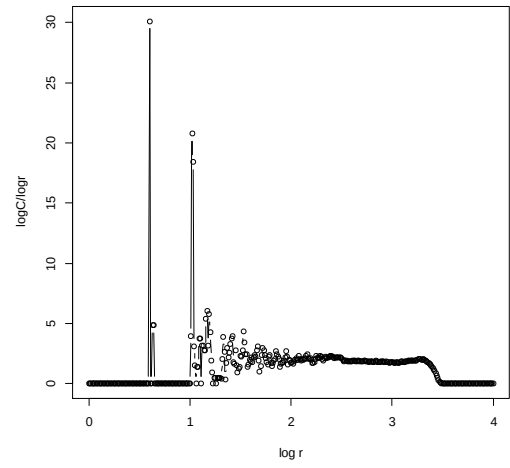
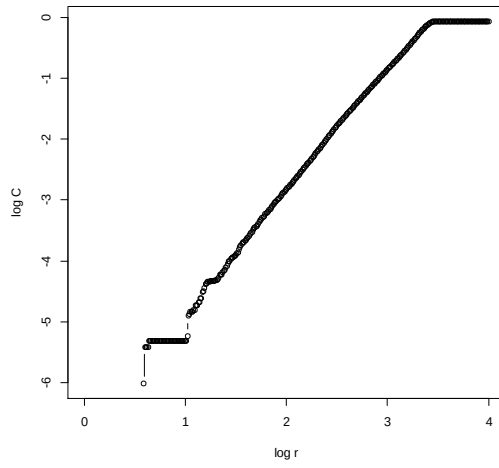
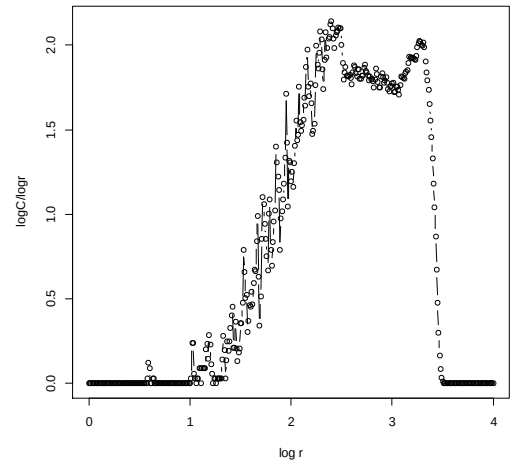
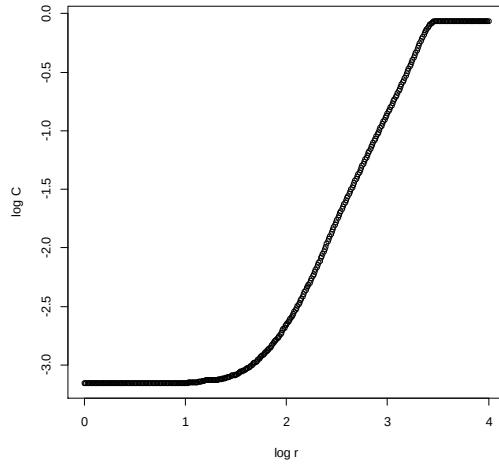
ZIMMERMAN, B., LINDBERG, C. and PLSEK, P. (2001). A Complexity Science Primer. In **Edgeware: Insights from Complexity Science for Health Care Leaders** (pp.3–20). Irving, Tex.: VHA Inc.

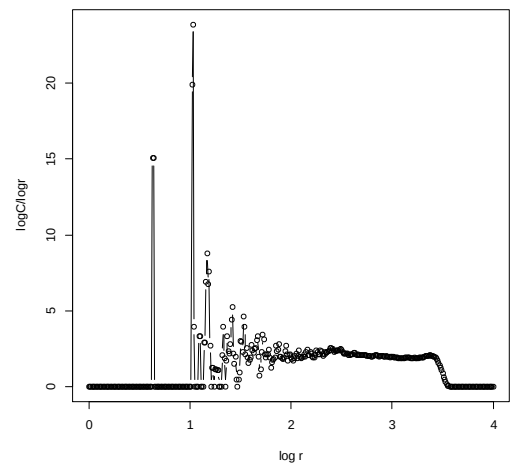
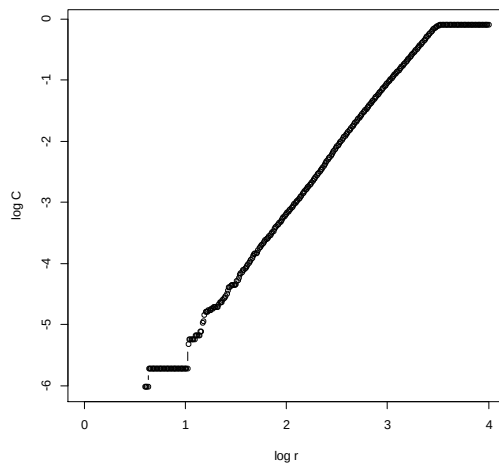
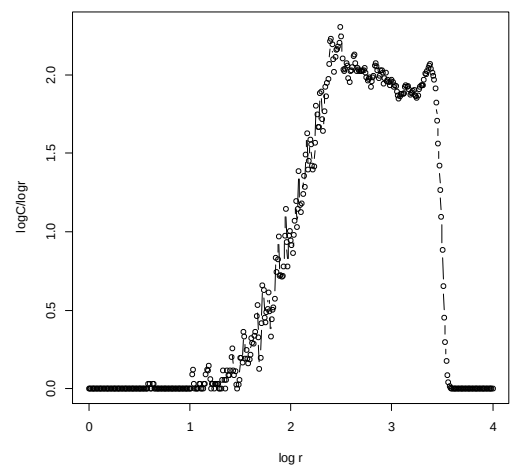
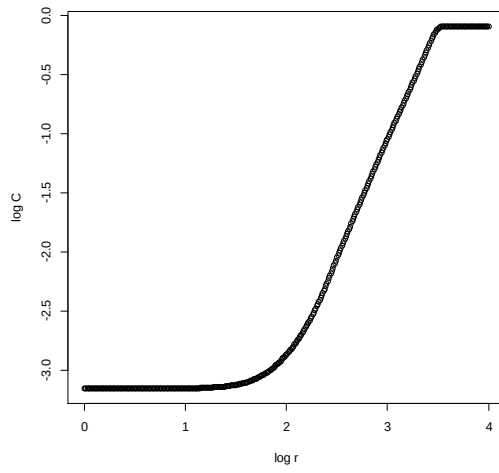
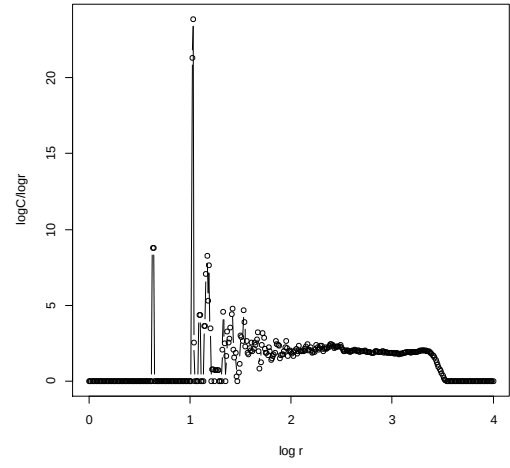
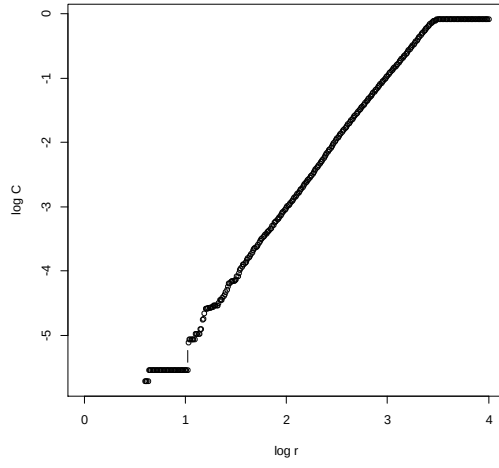
APÊNDICE A – COMPARAÇÕES ENTRE GP E EDC

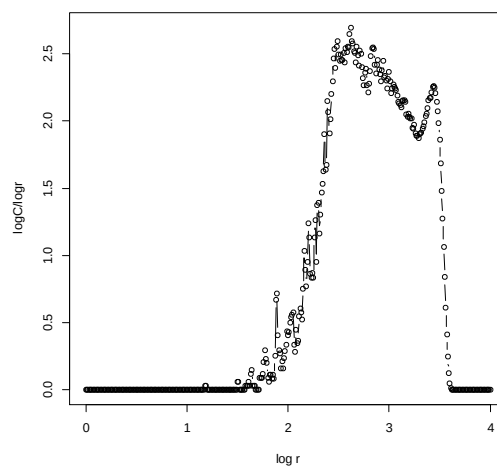
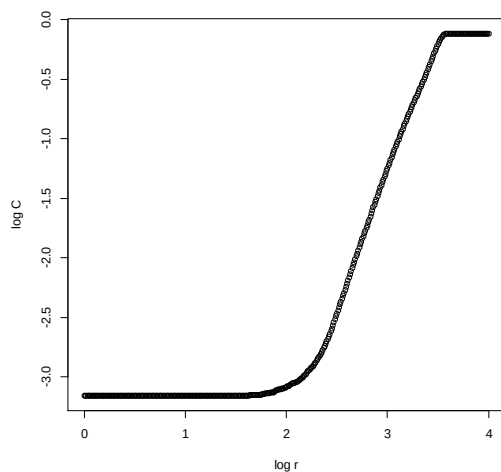
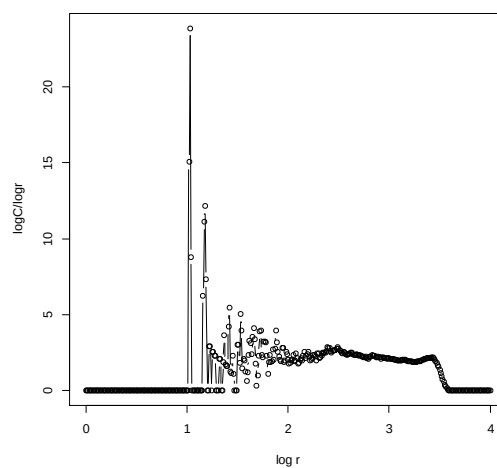
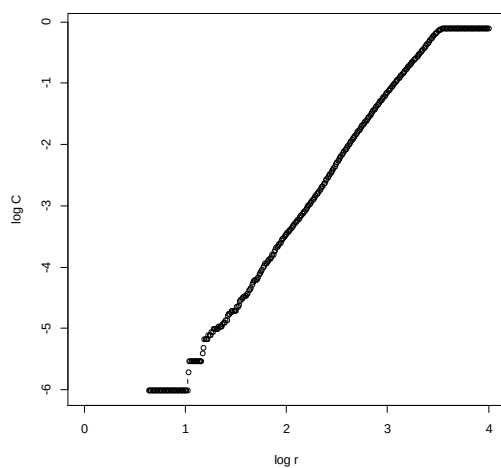
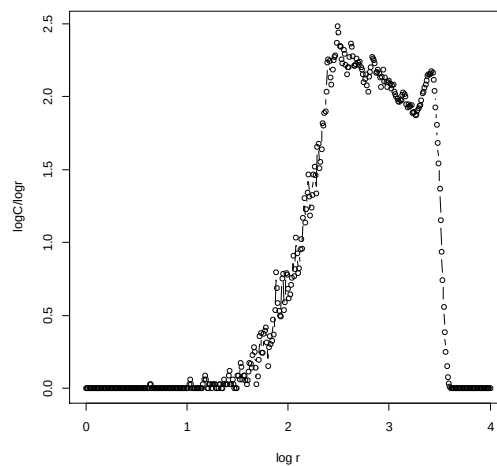
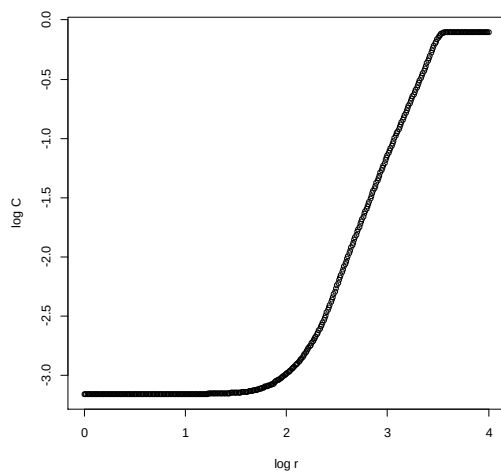
PARi abr/01

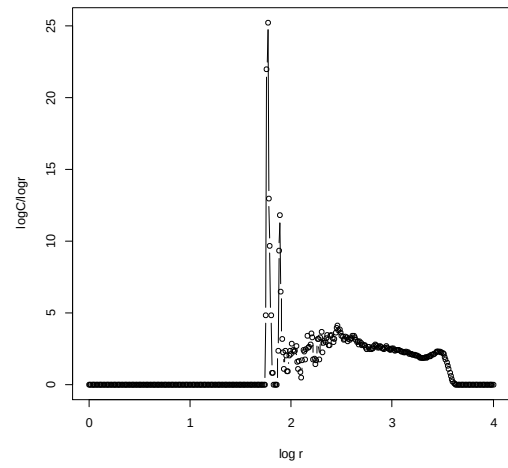
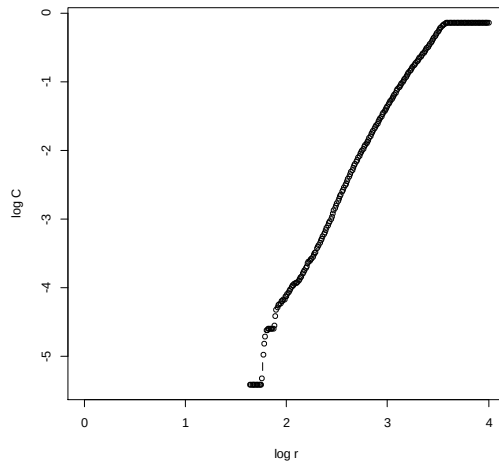
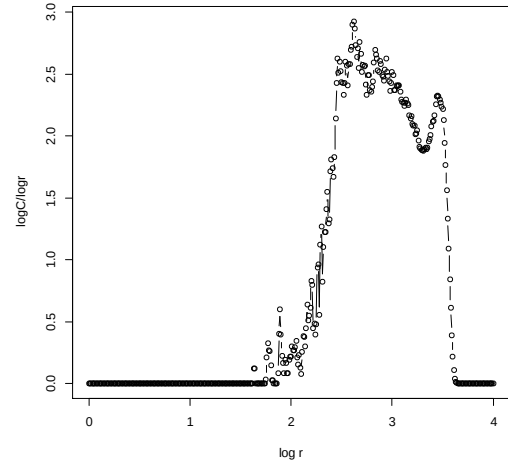
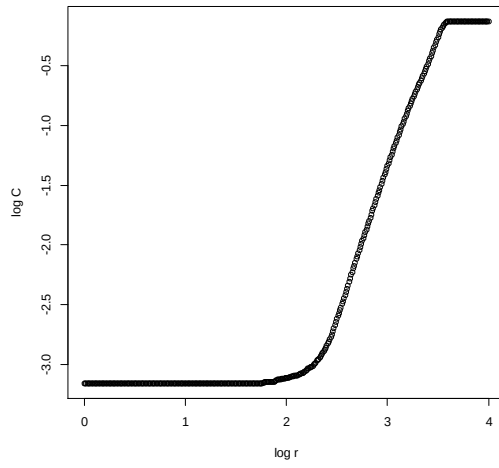
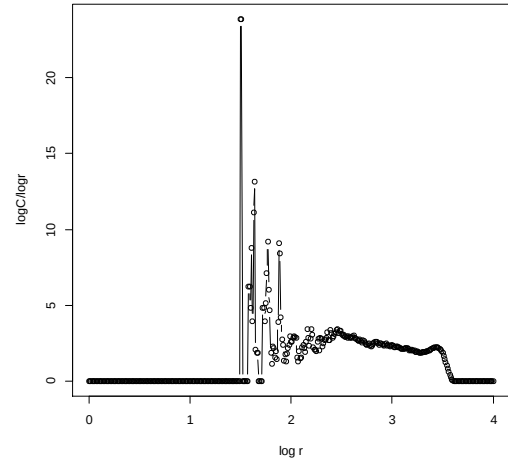
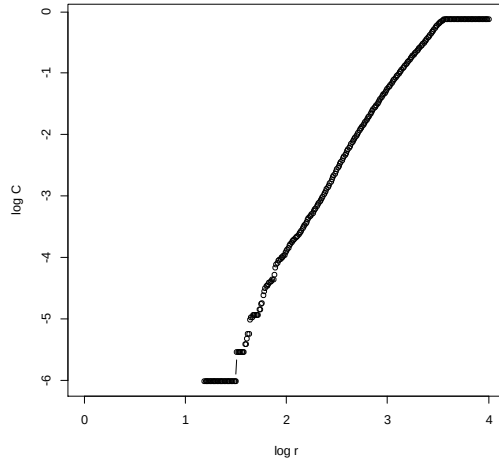


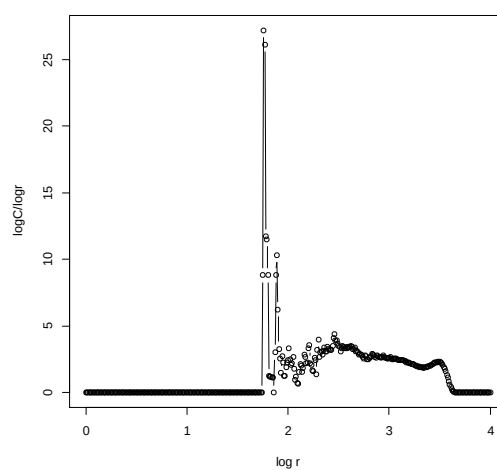
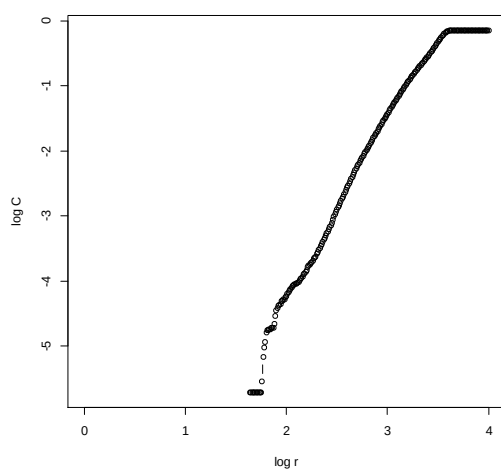
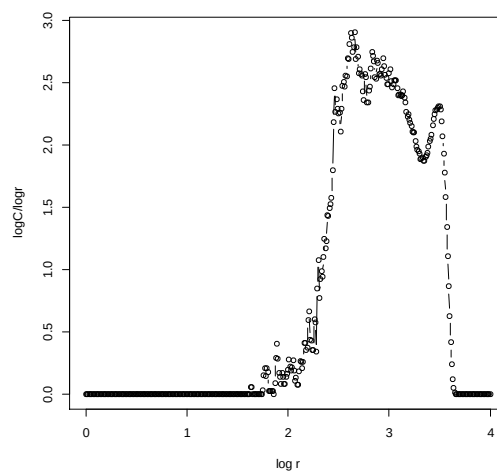
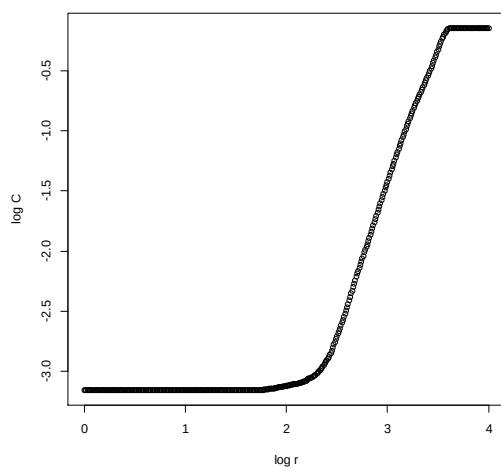


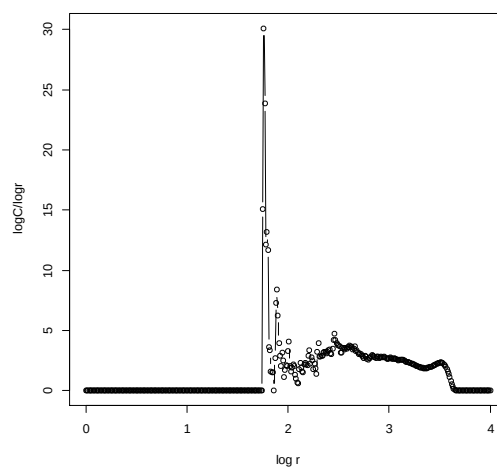
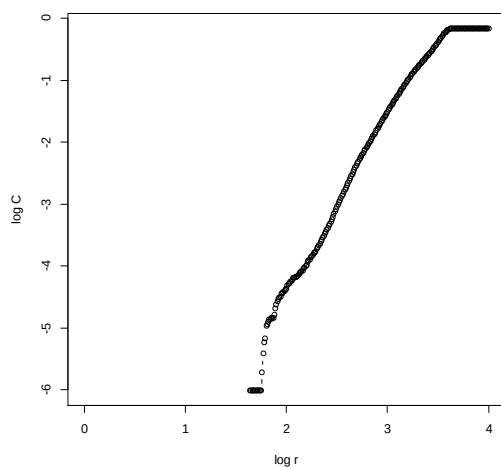
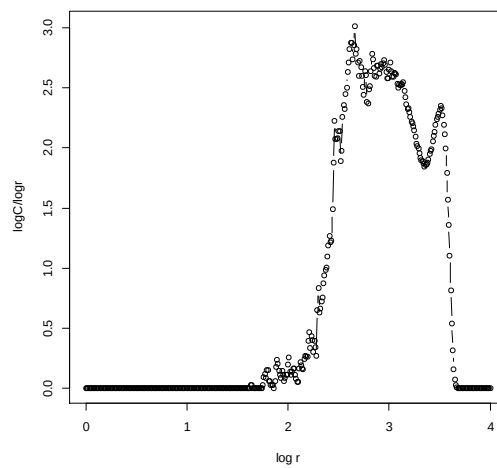
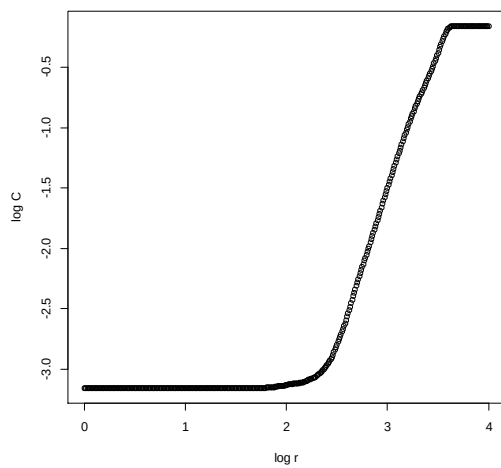


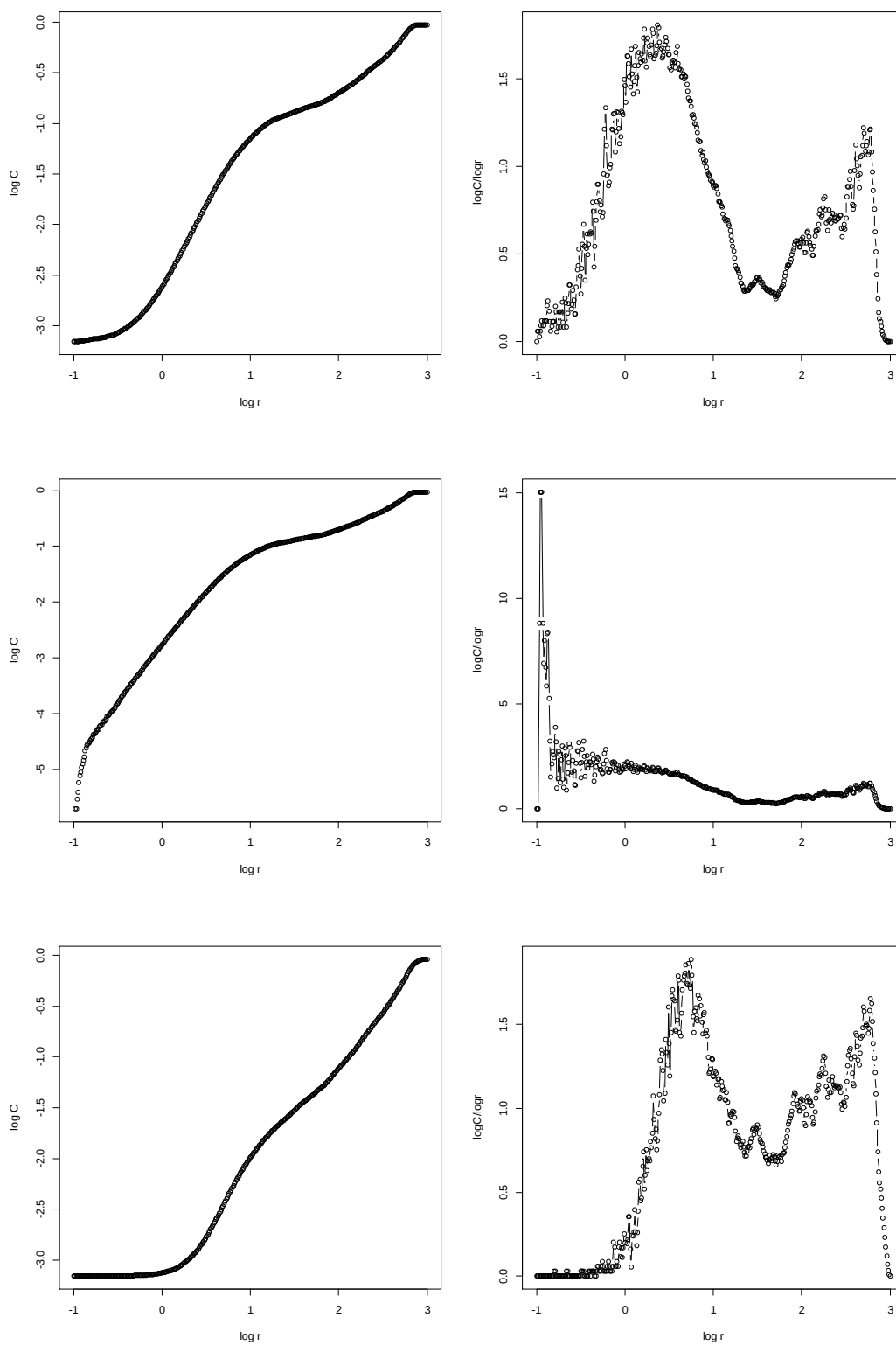


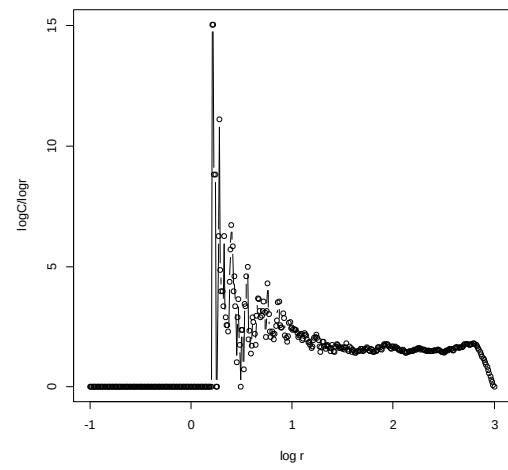
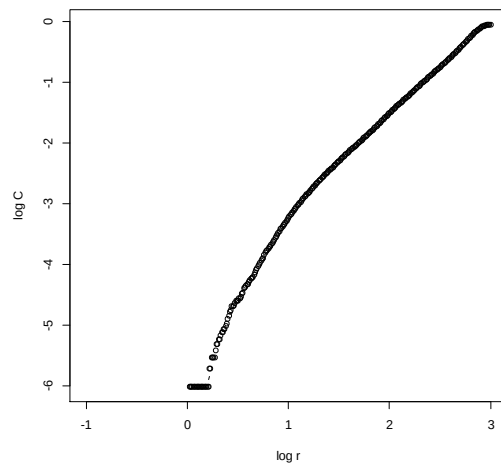
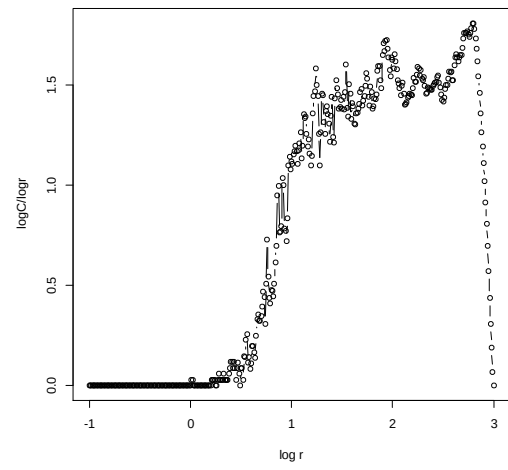
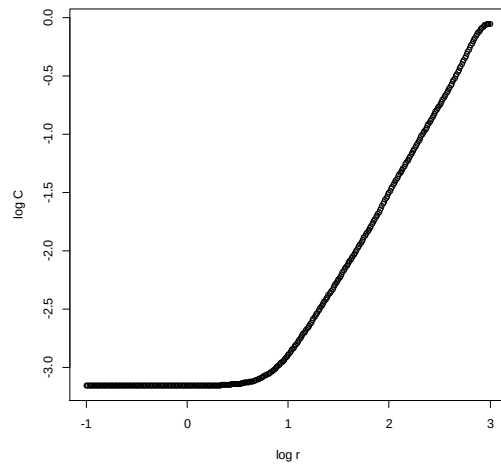
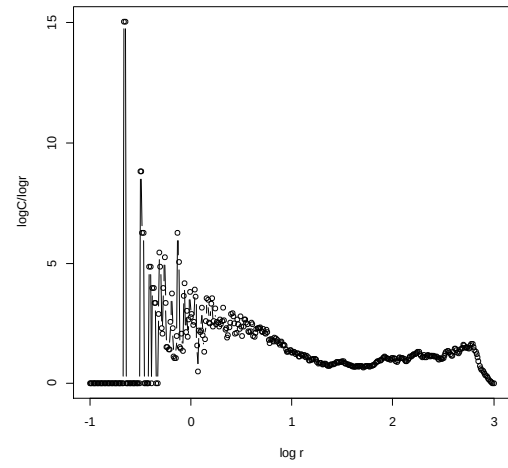
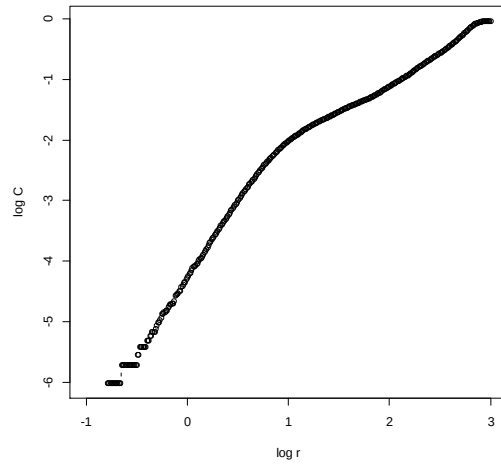


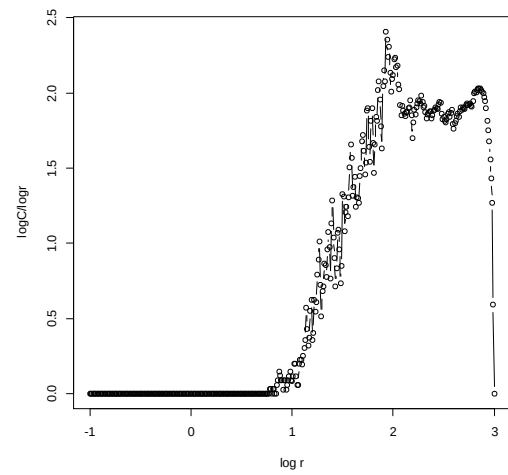
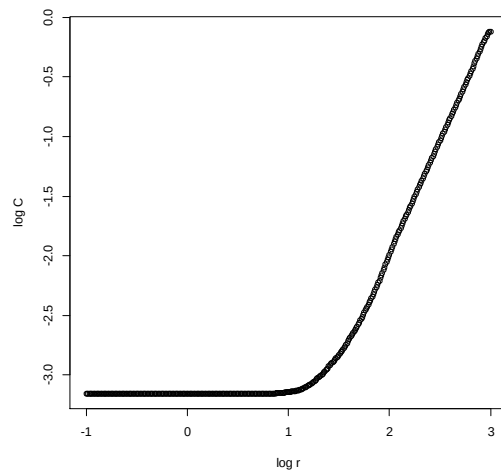
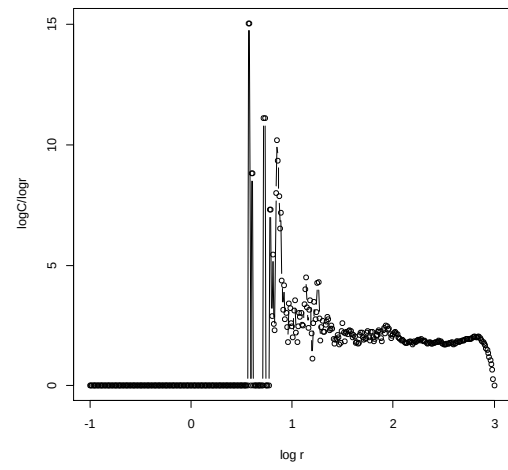
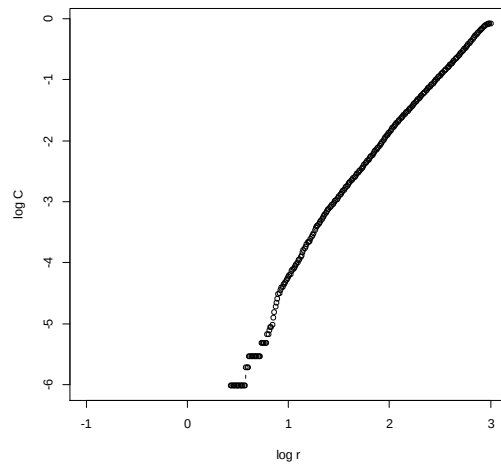
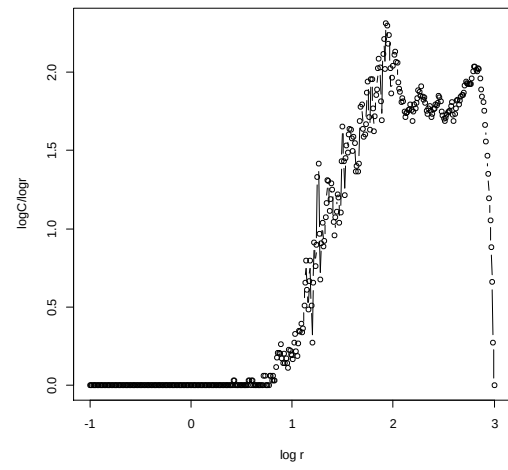
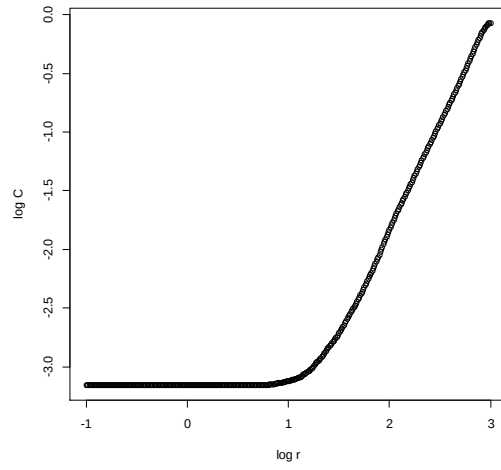


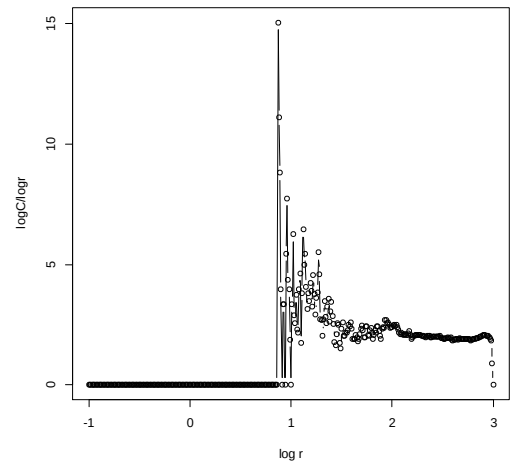
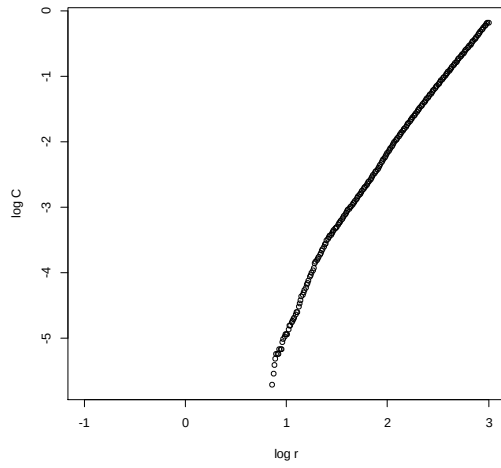
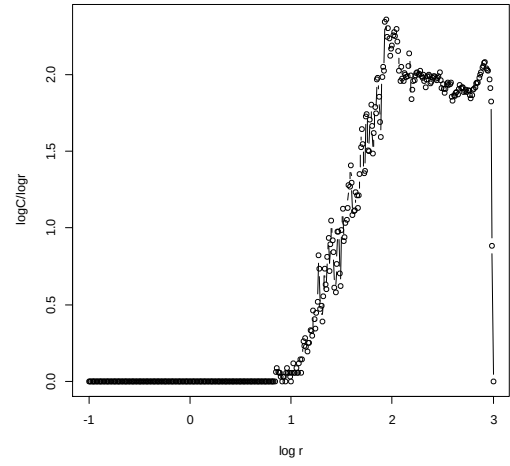
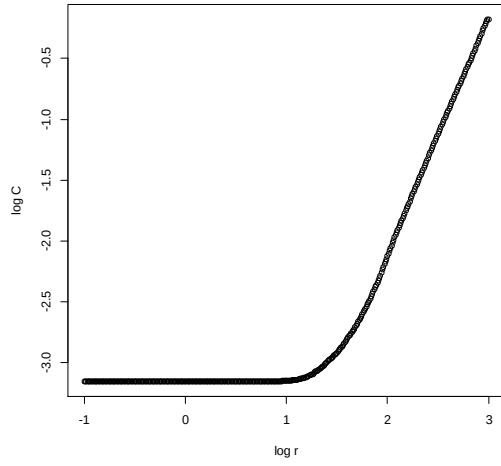
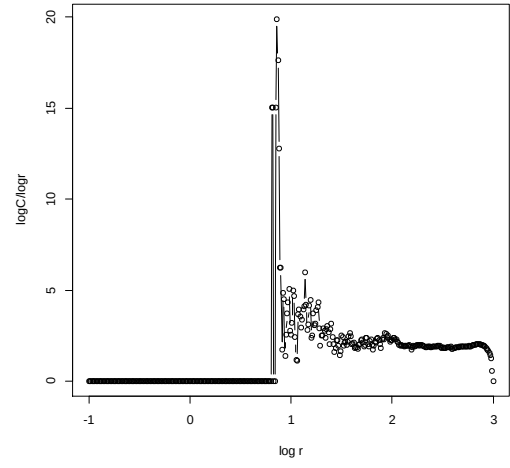
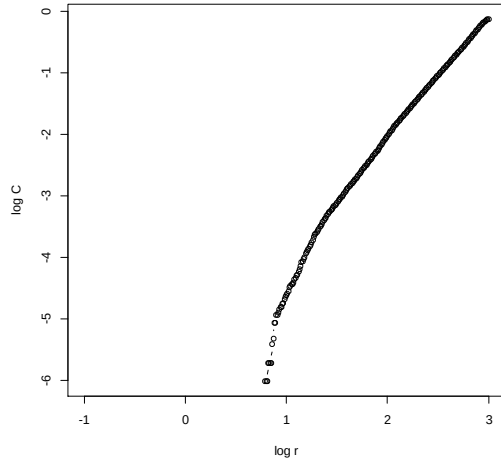


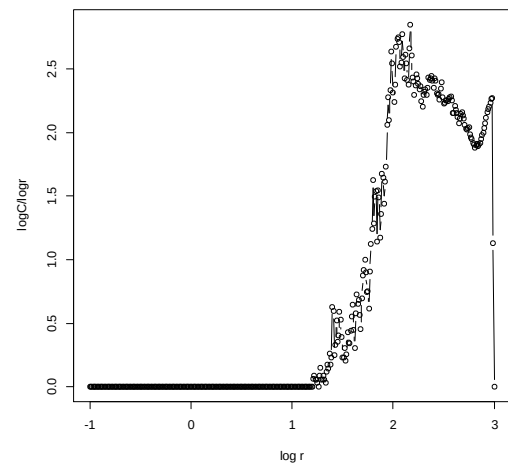
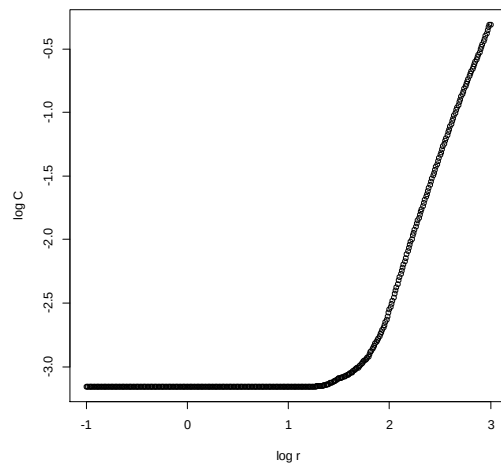
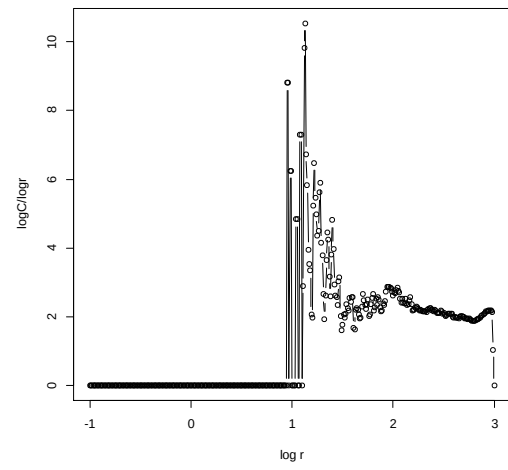
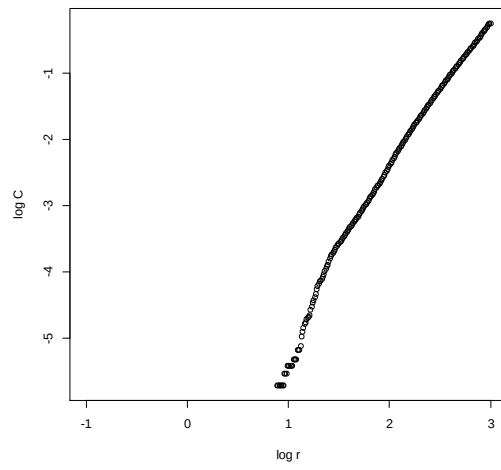
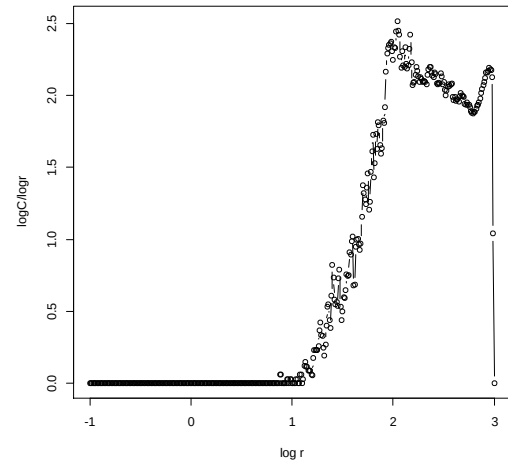
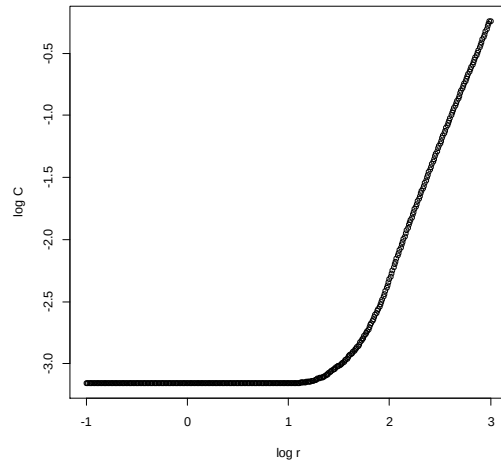


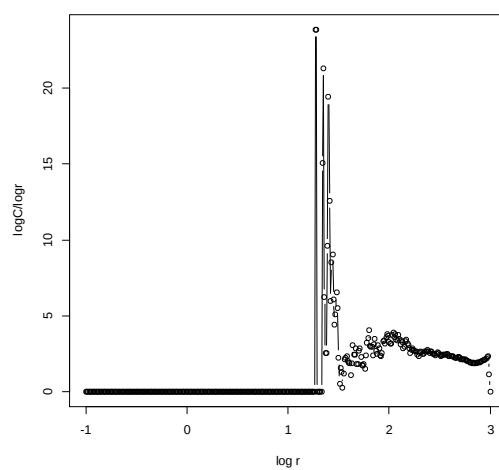
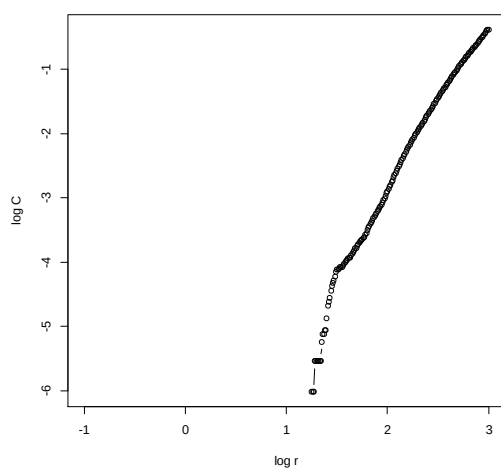
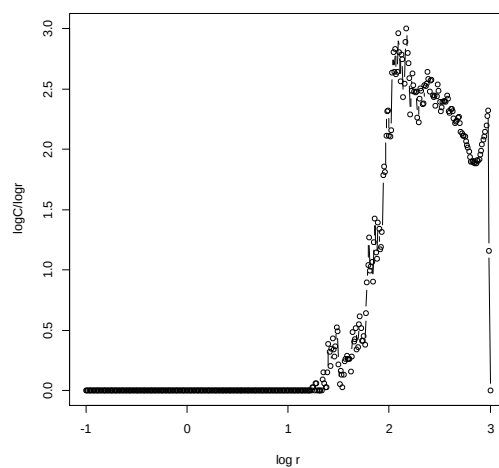
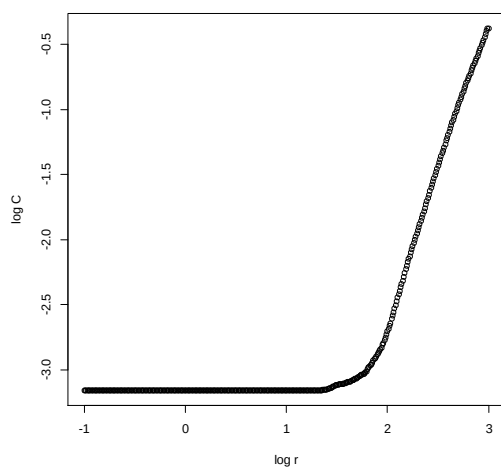
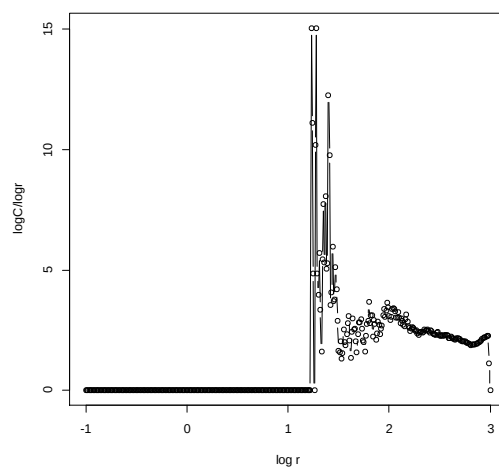
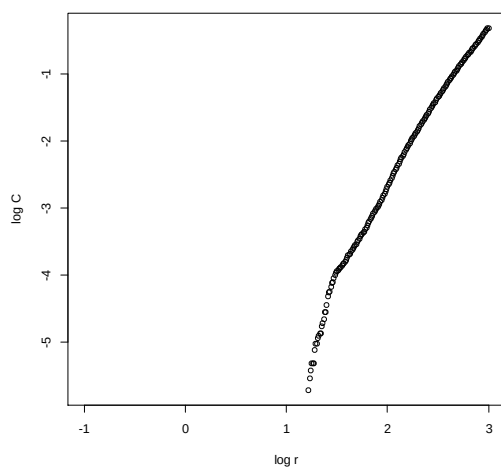
Rn abr/01

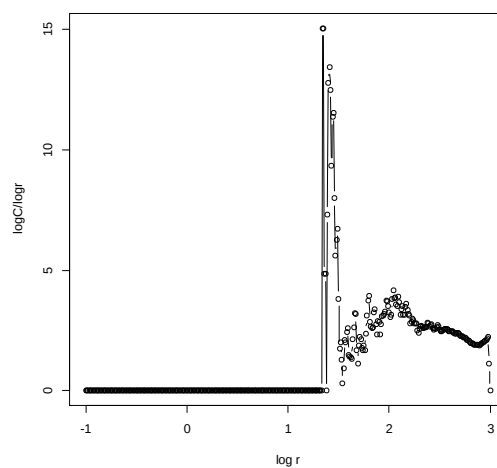
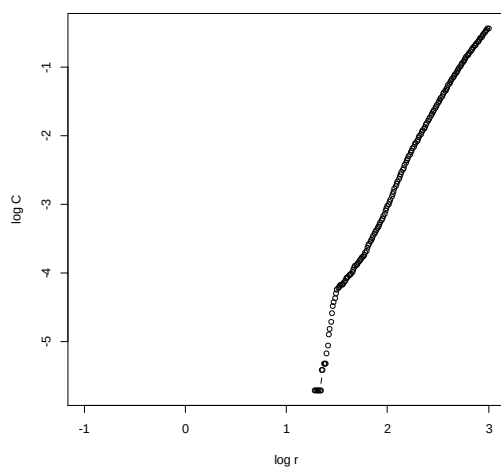
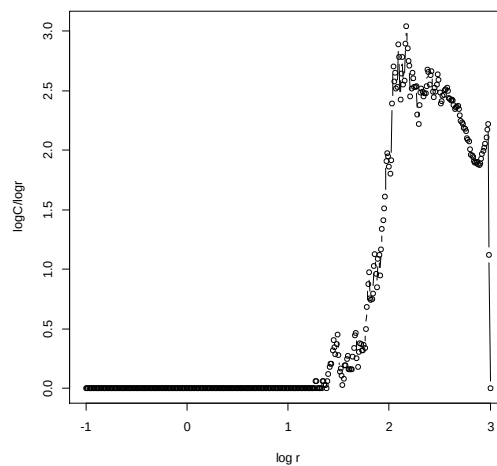
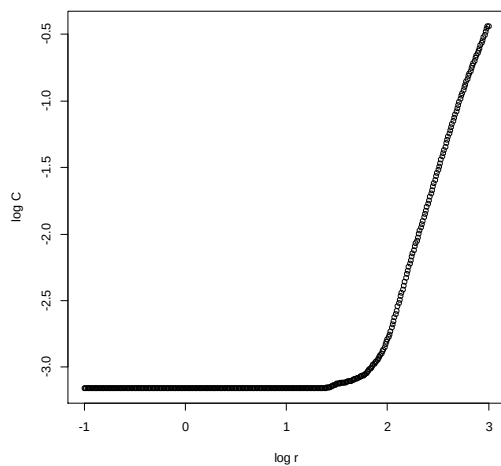


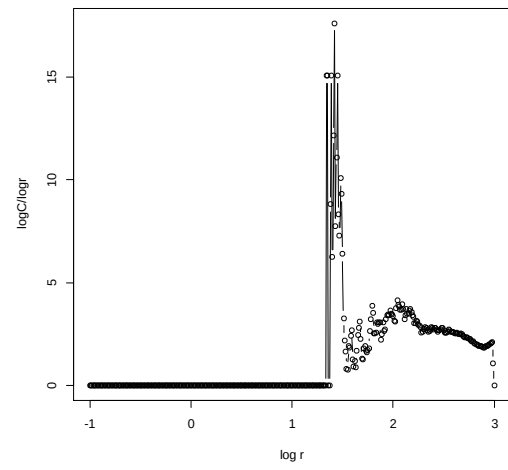
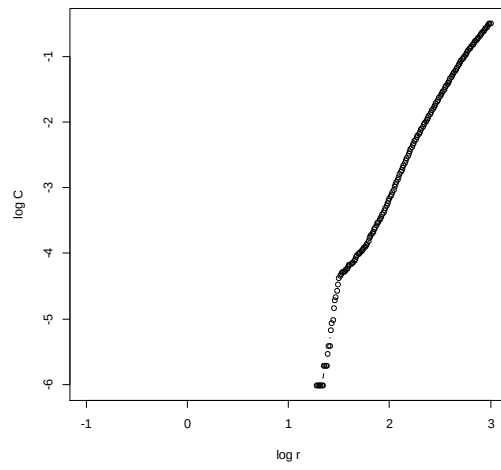
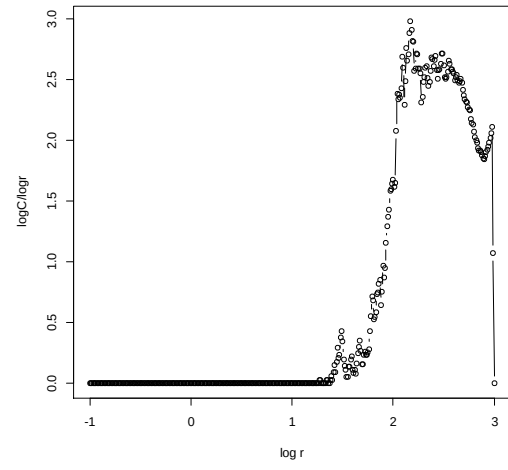
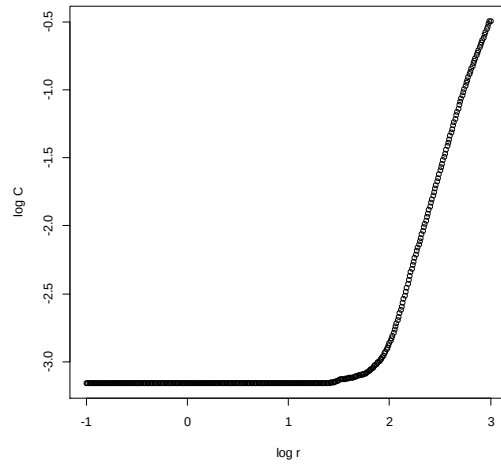




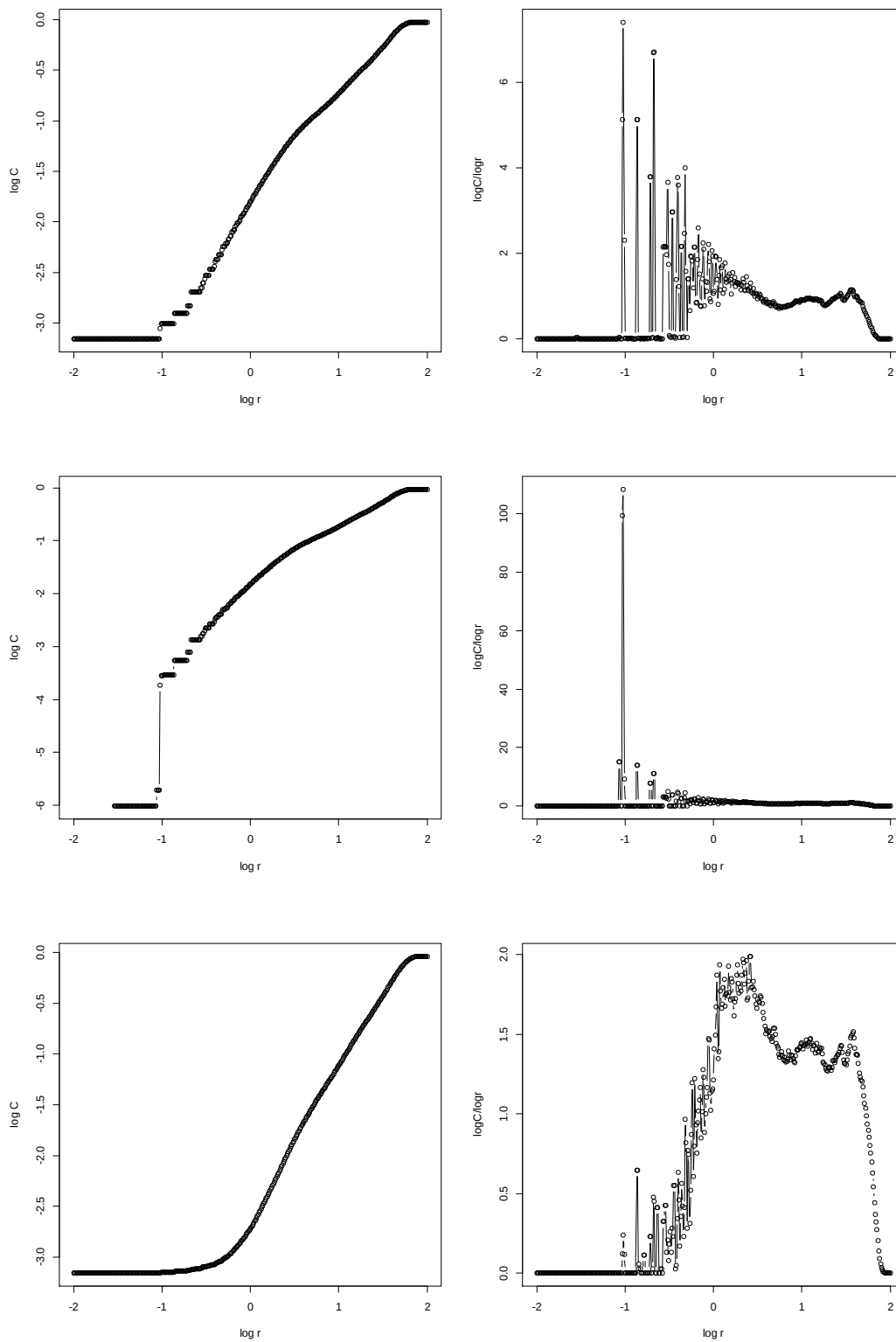


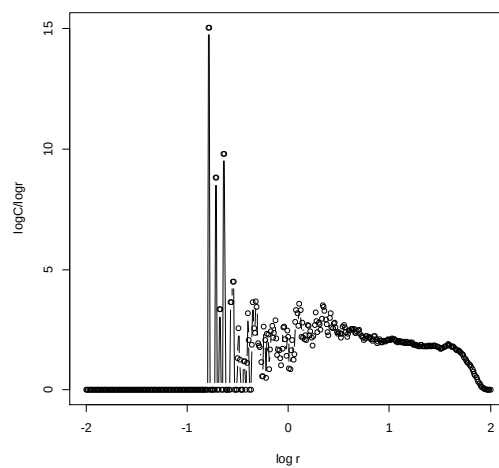
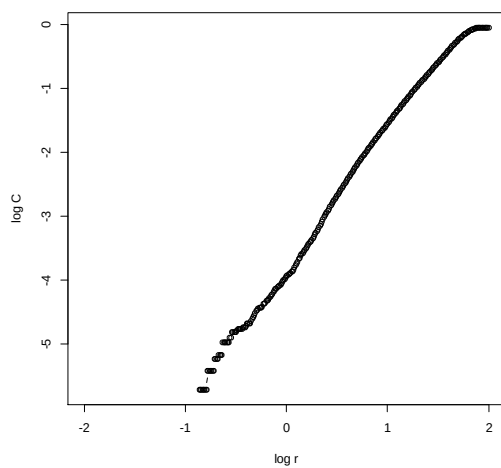
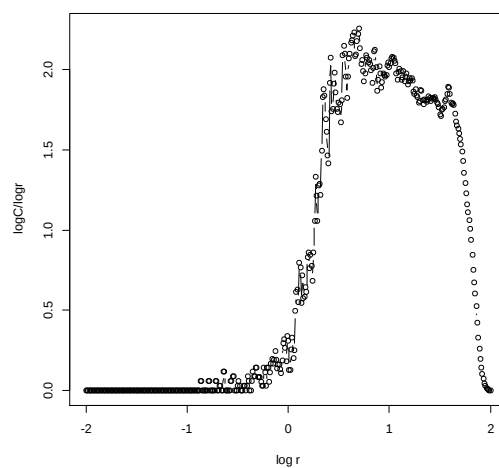
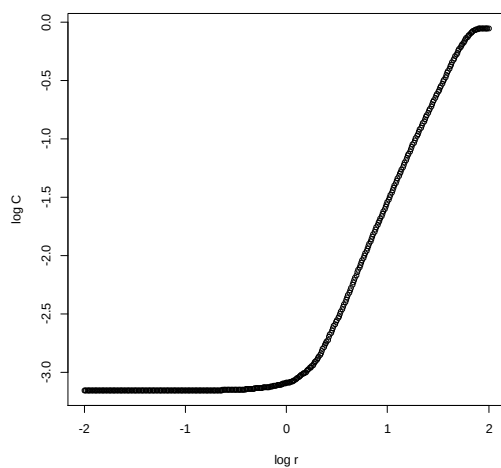
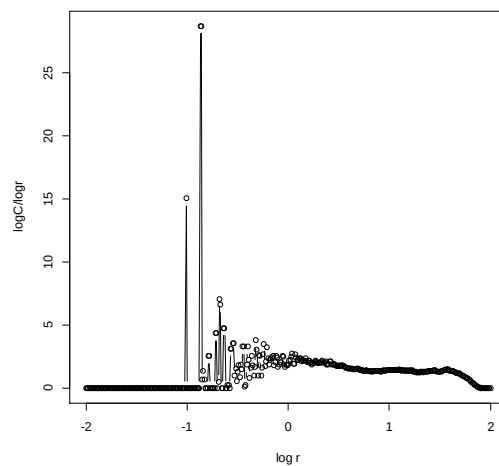
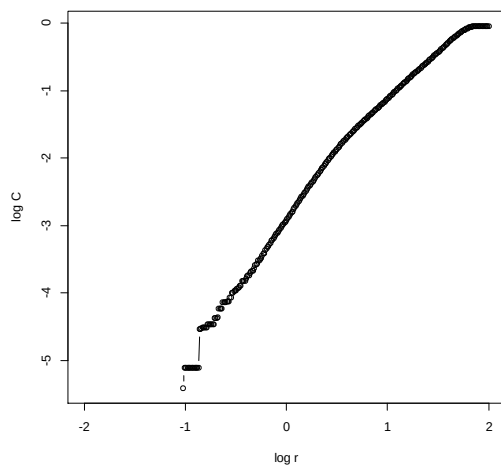


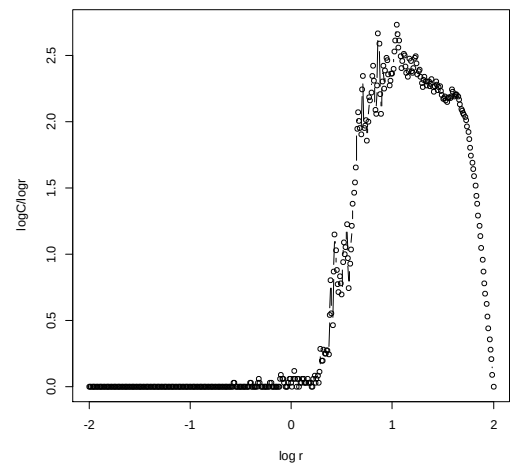
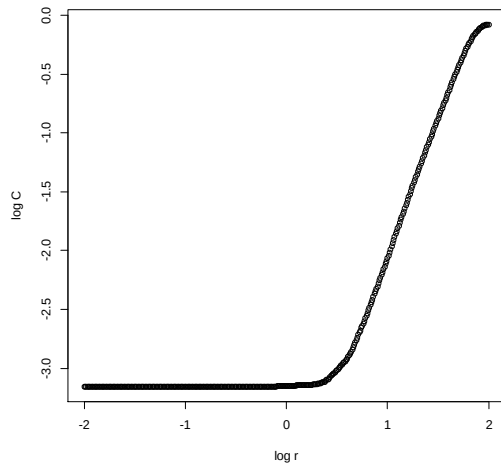
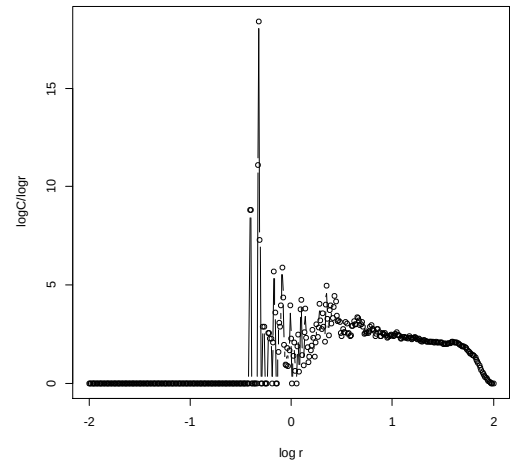
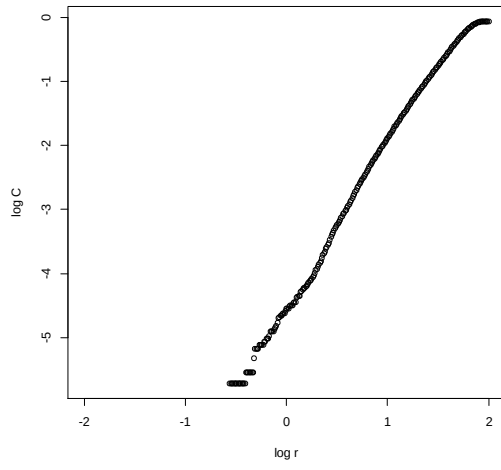
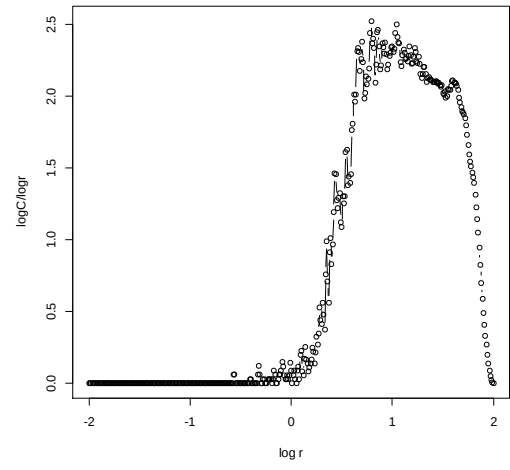
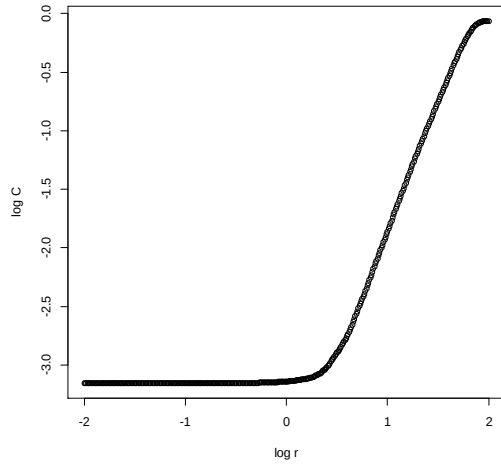


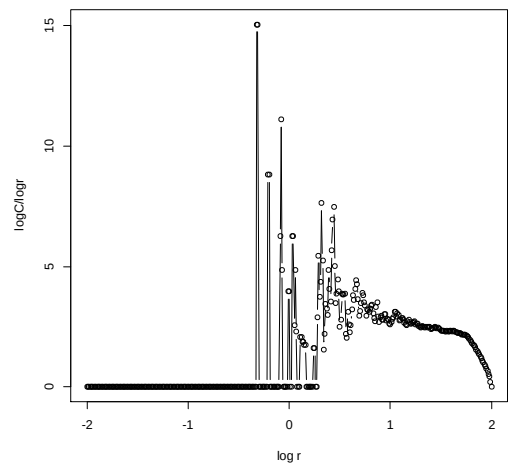
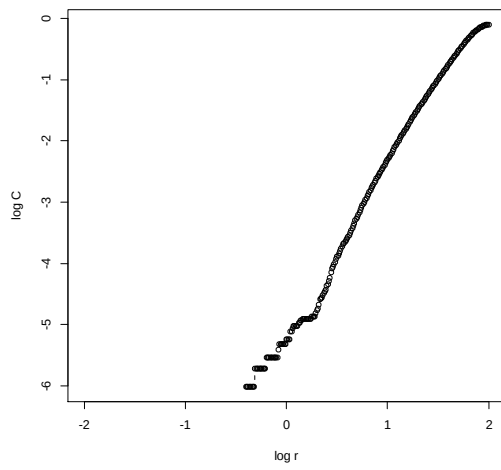
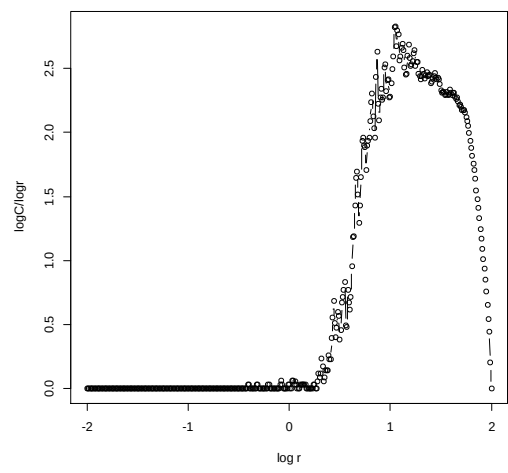
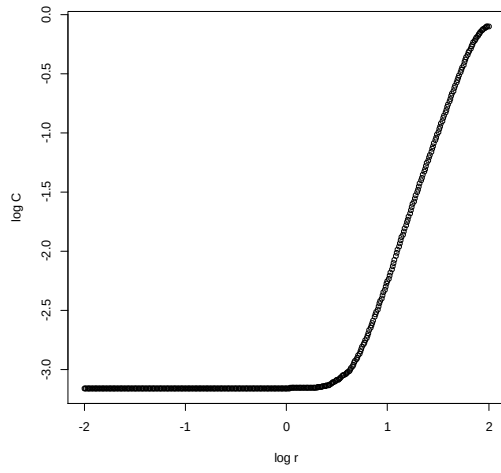
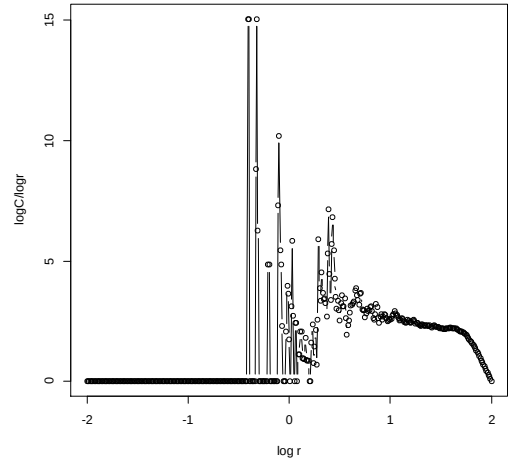
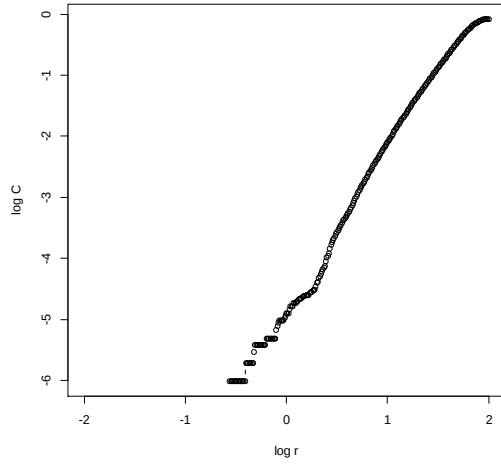


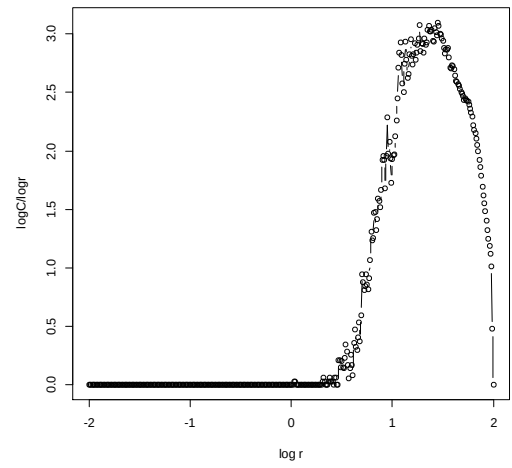
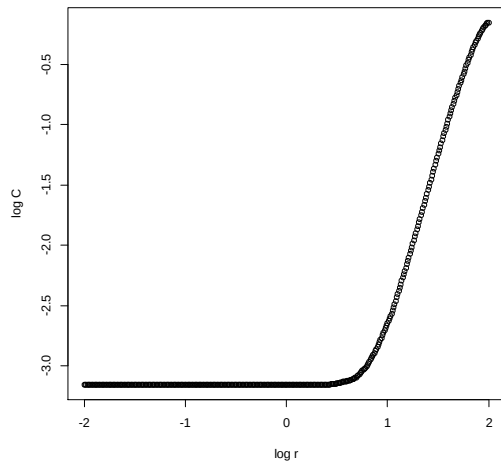
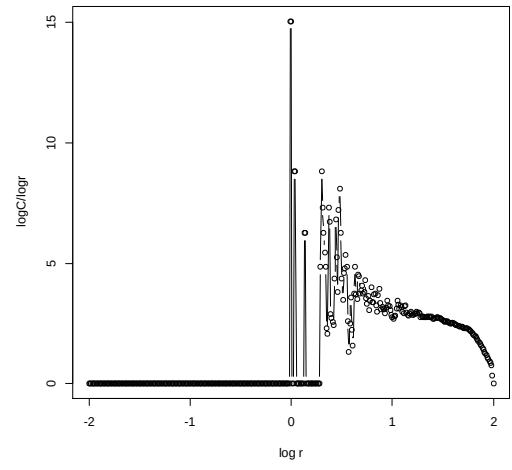
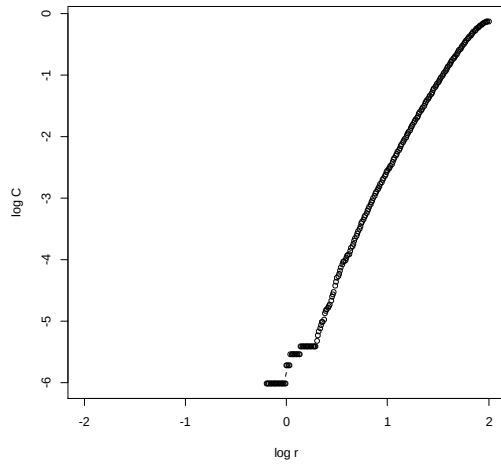
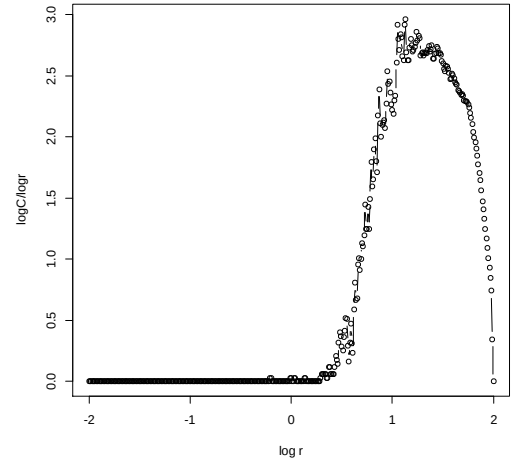
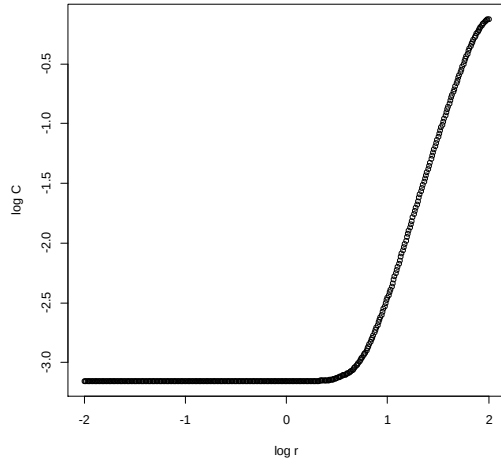
RH abr/01

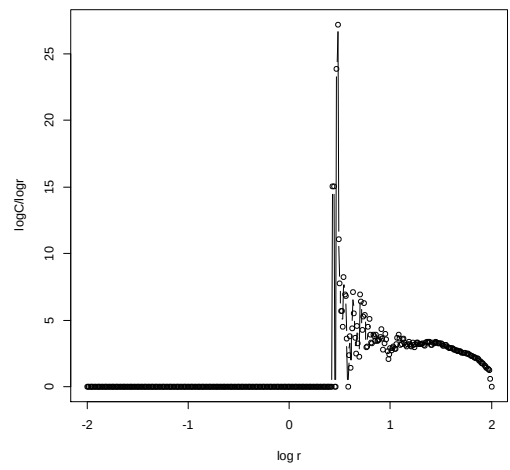
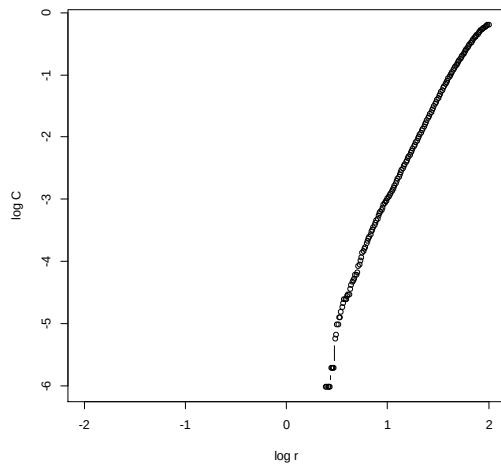
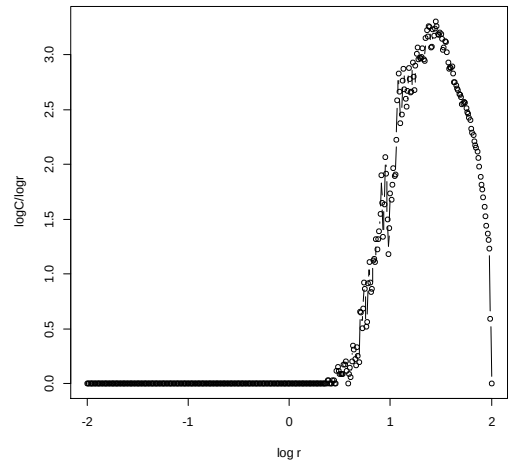
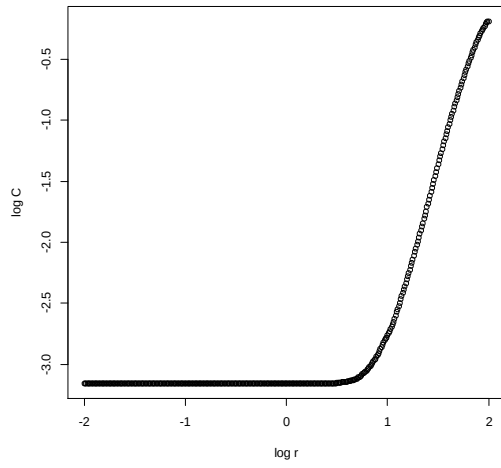
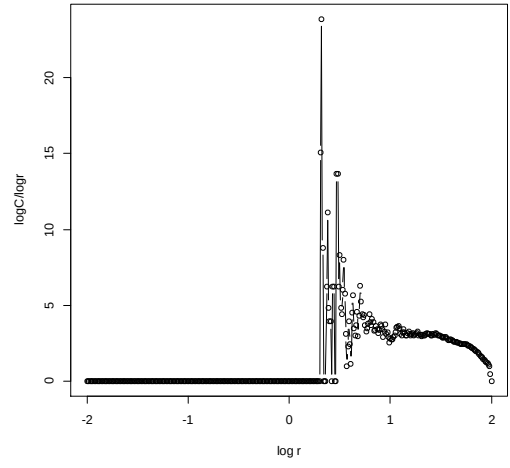
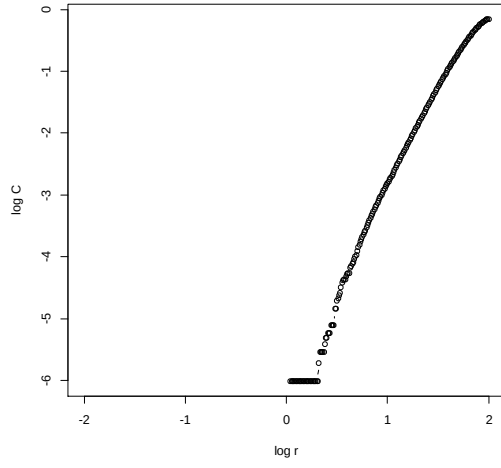


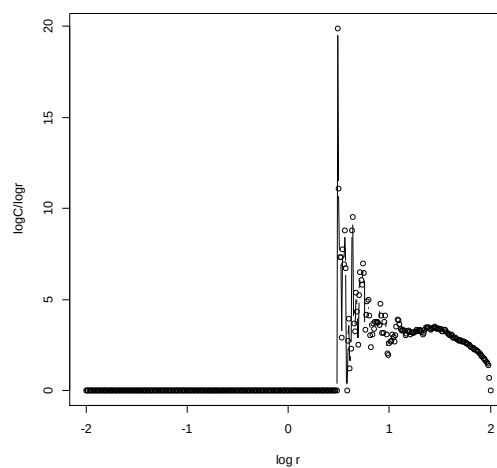
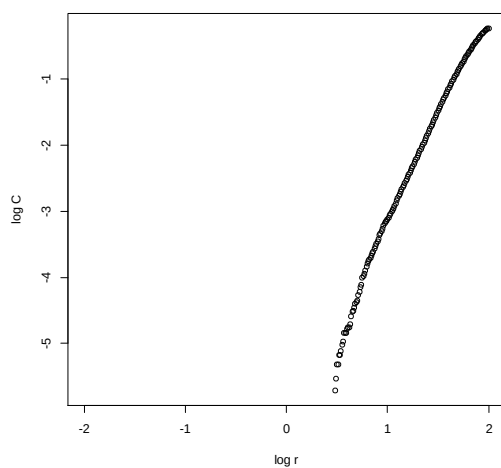
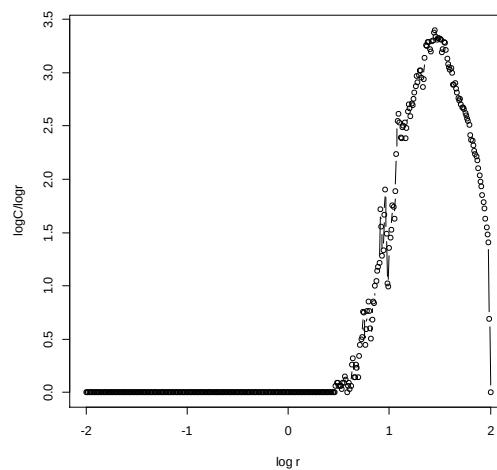
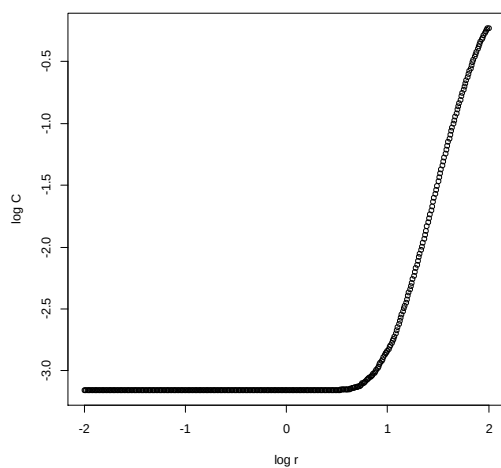


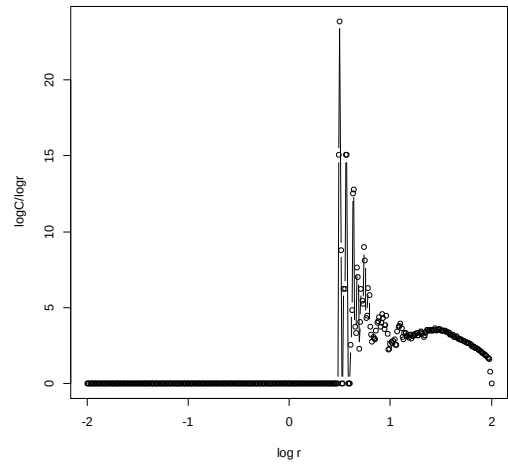
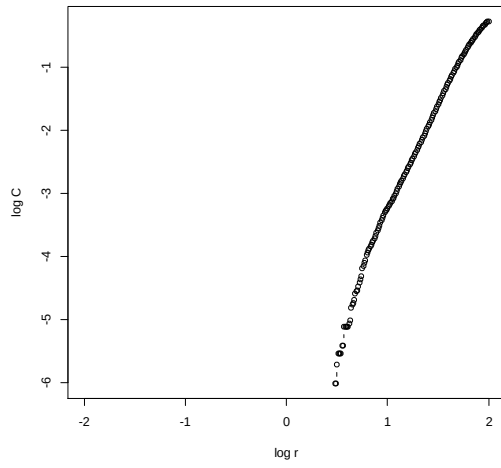
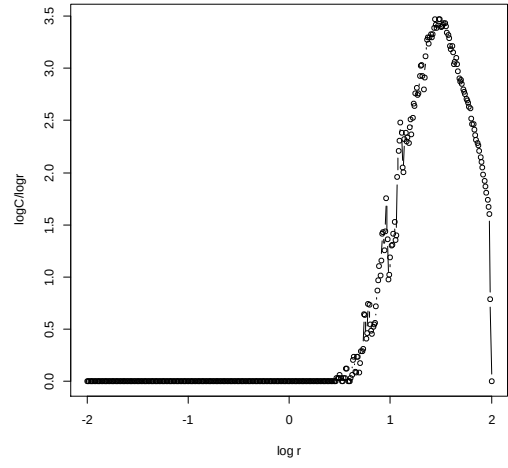
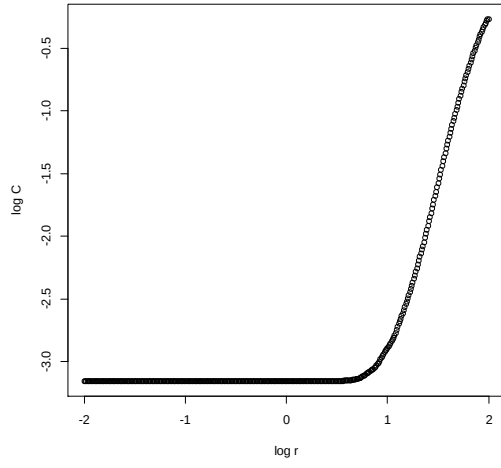




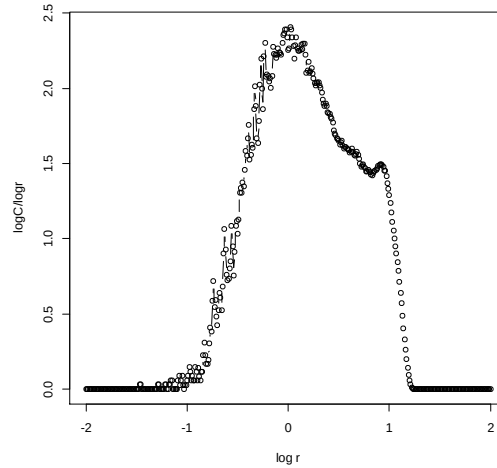
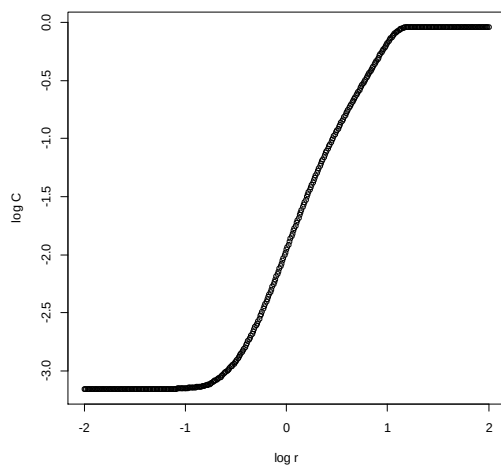
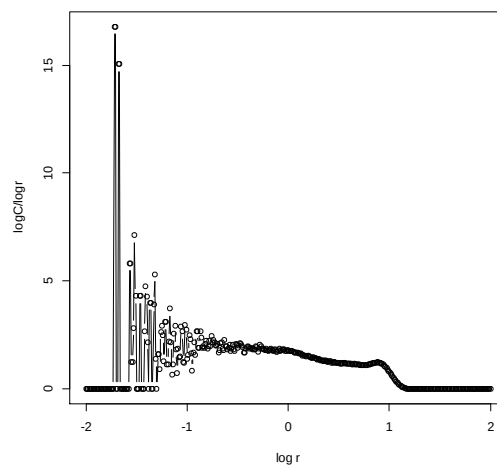
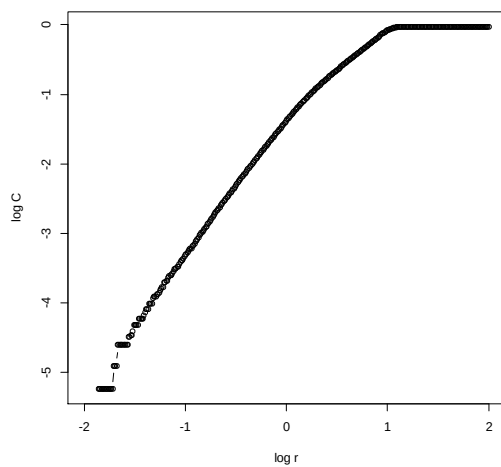
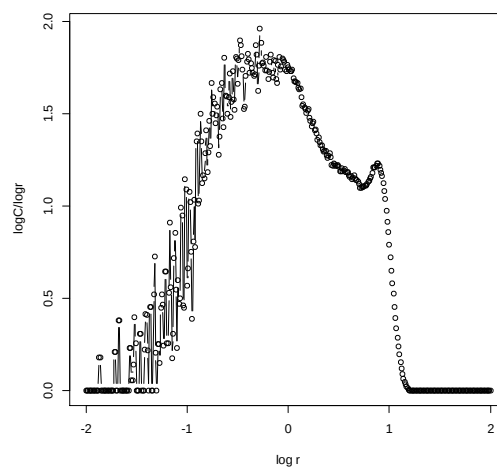
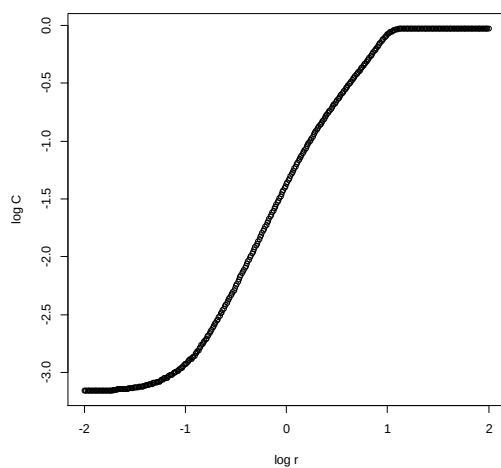


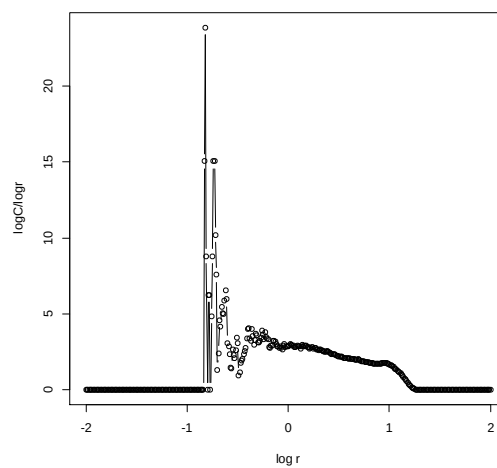
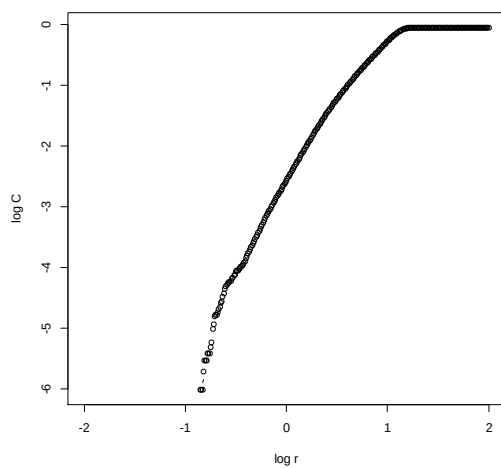
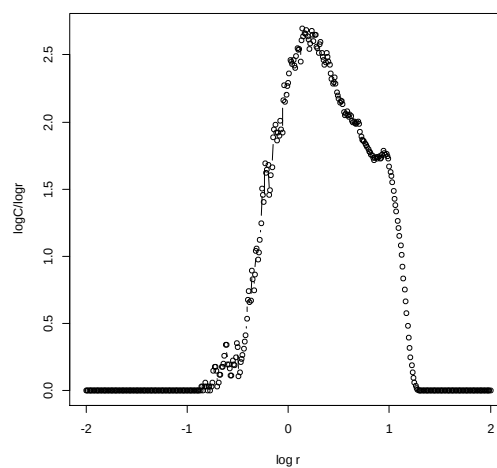
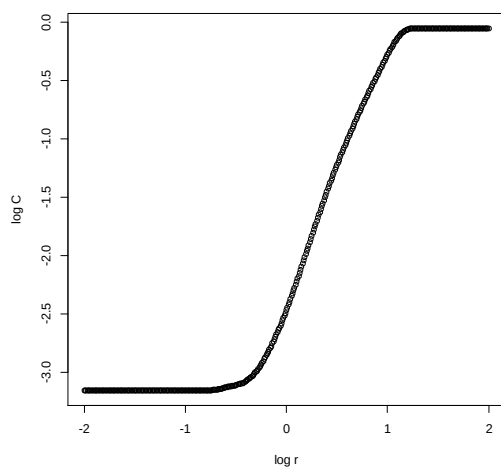
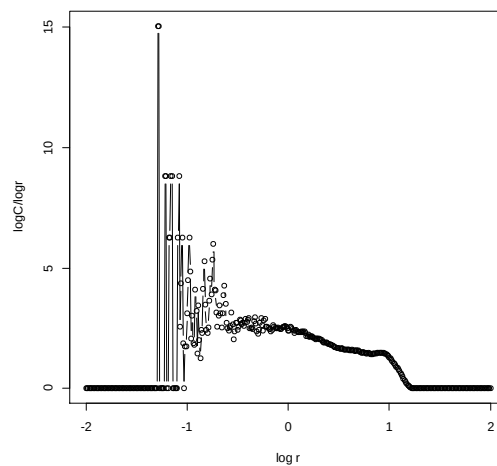
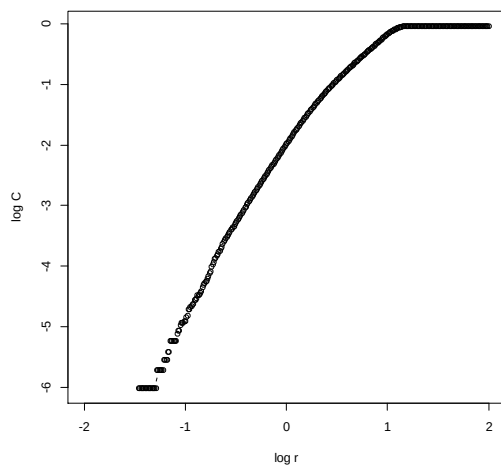


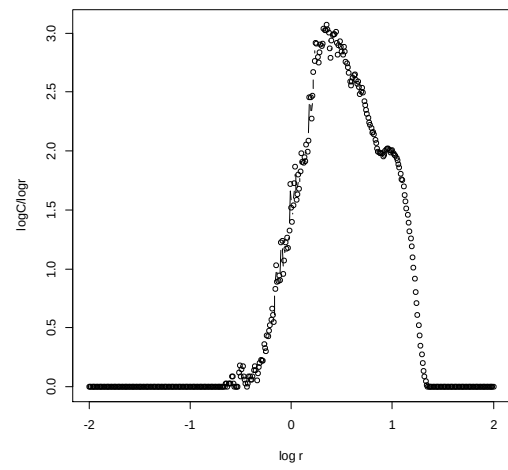
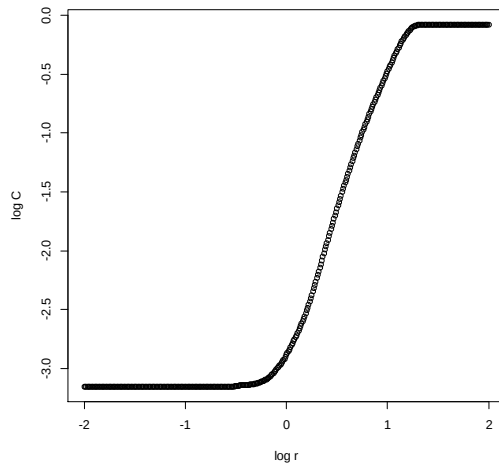
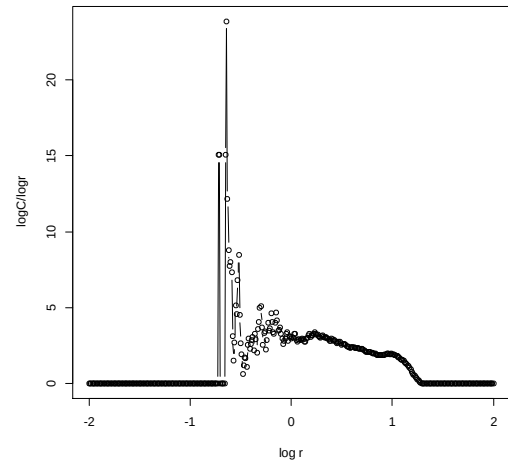
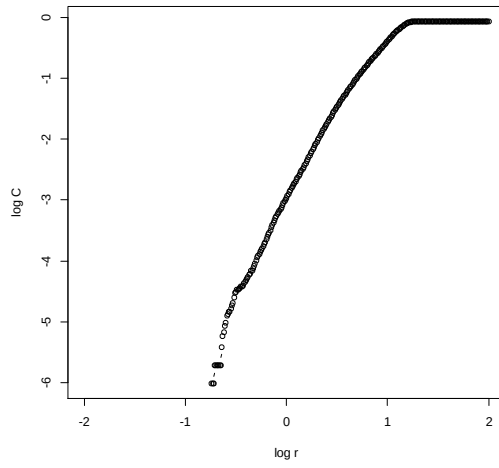
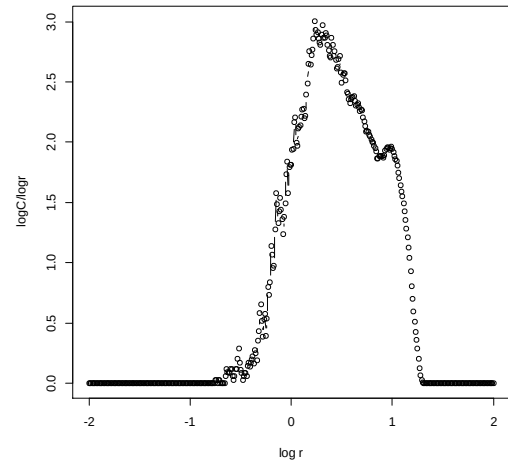
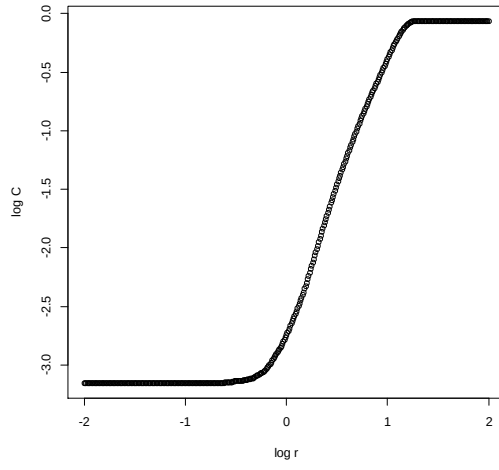


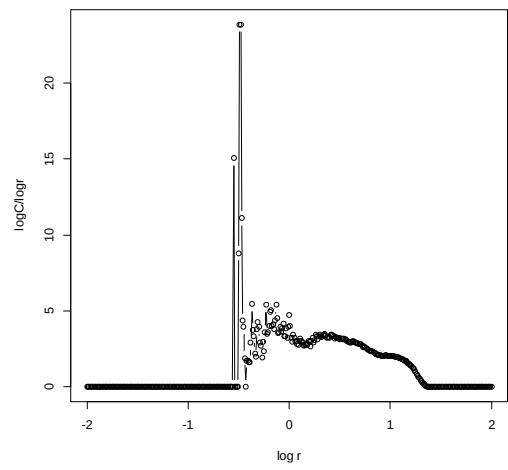
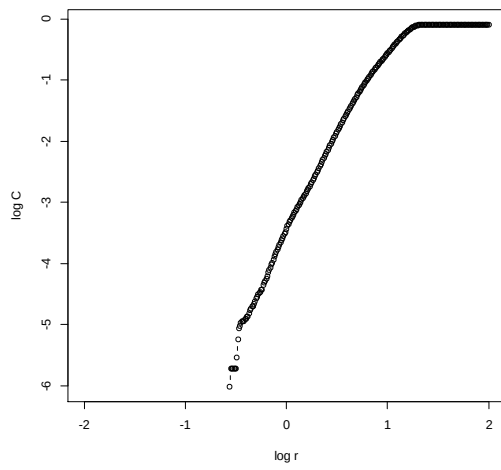
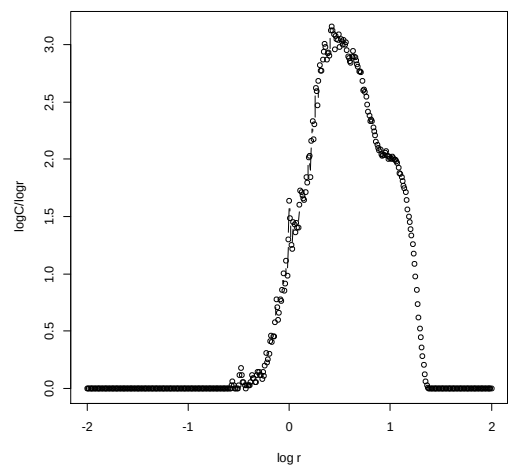
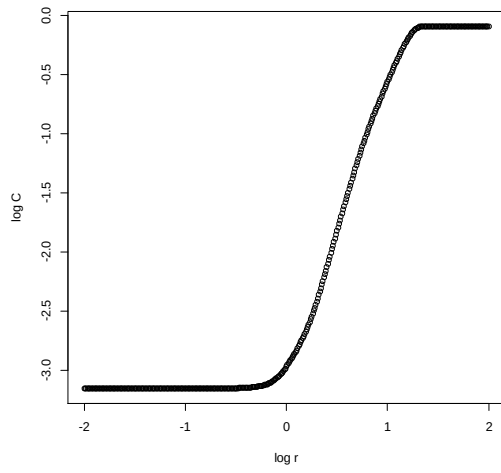
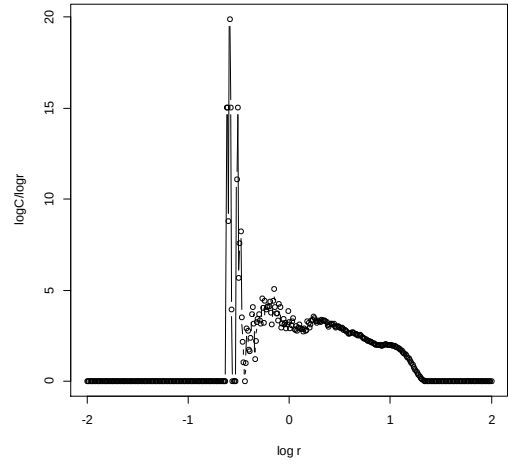
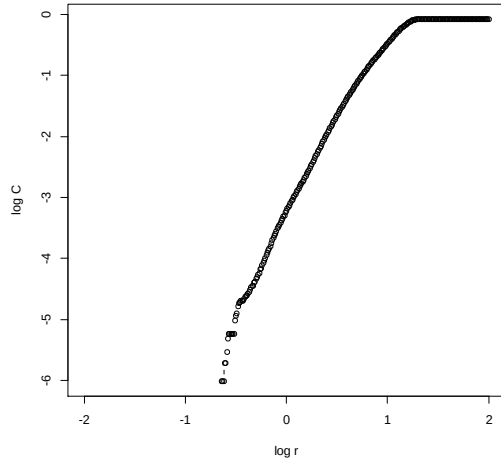


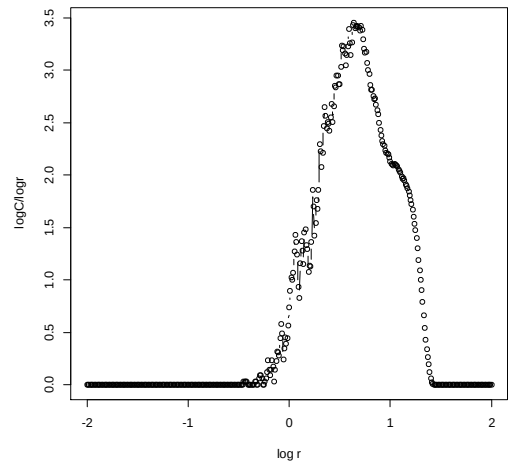
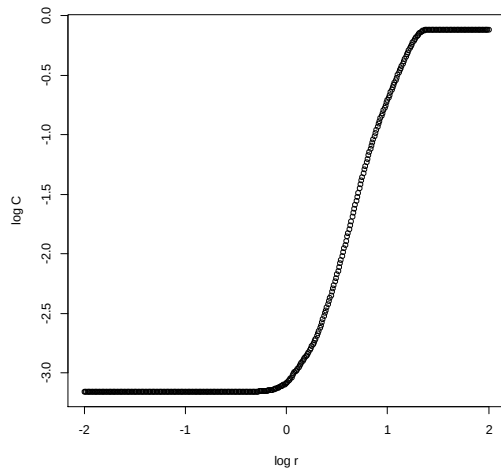
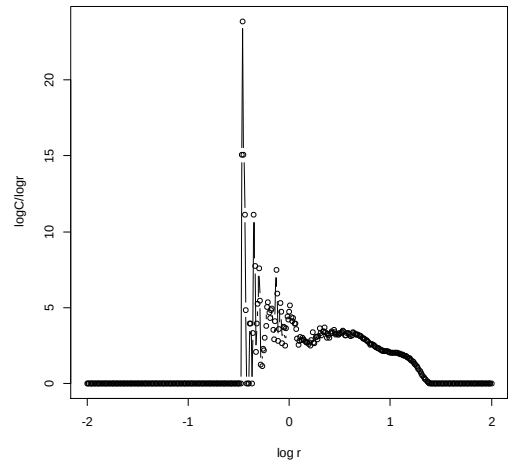
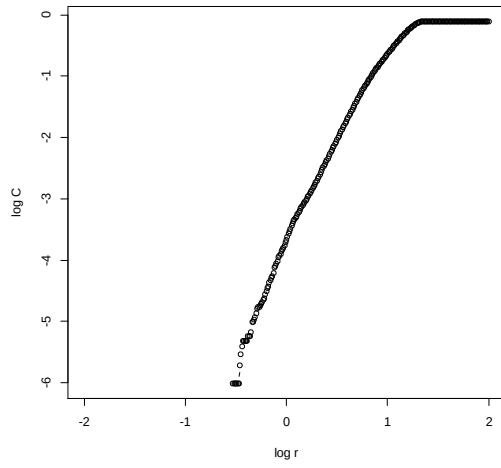
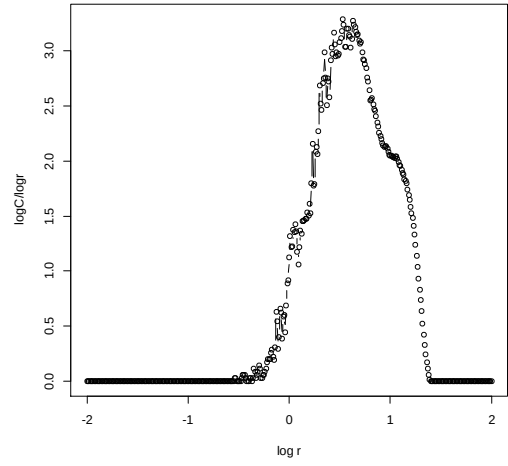
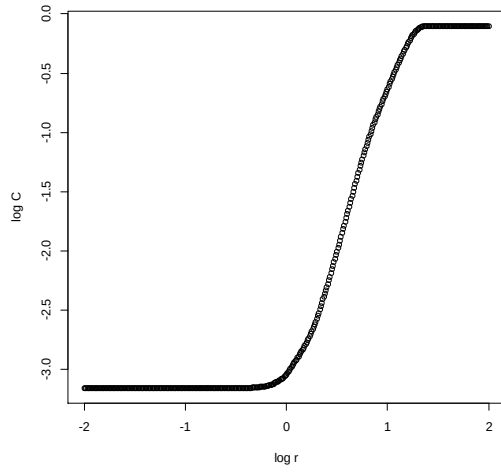
T40 abr/01

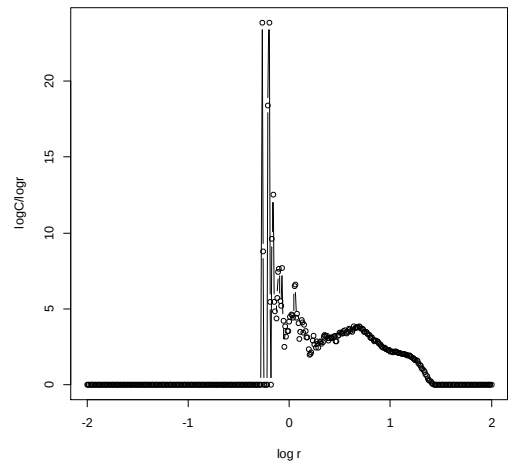
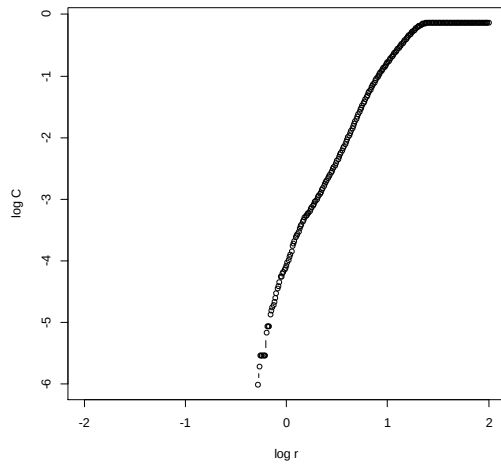
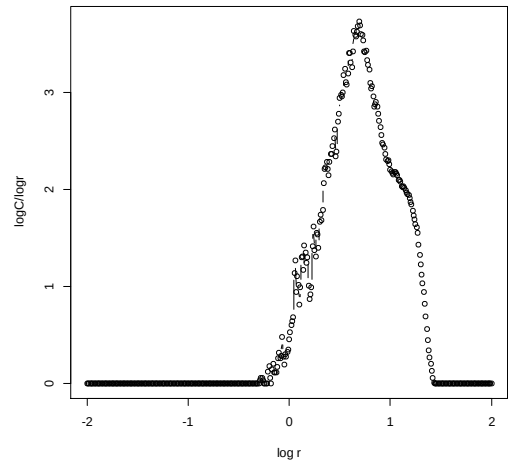
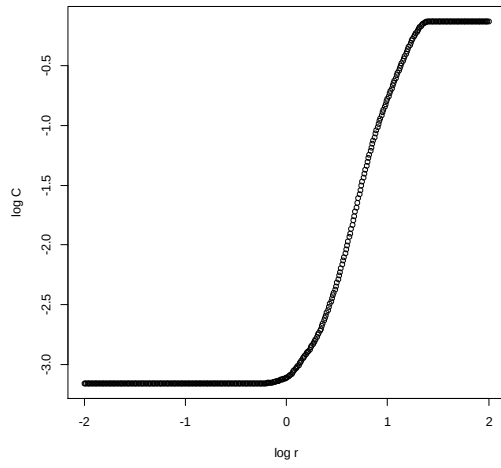
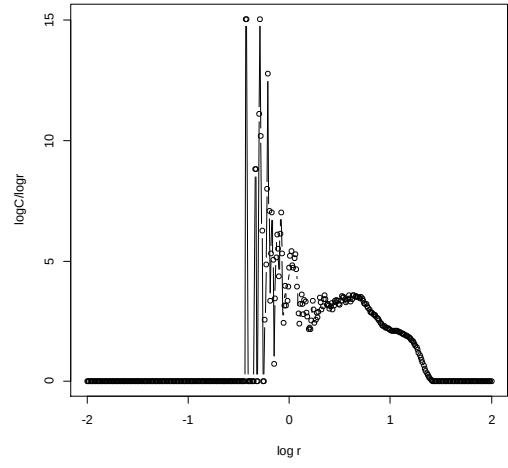
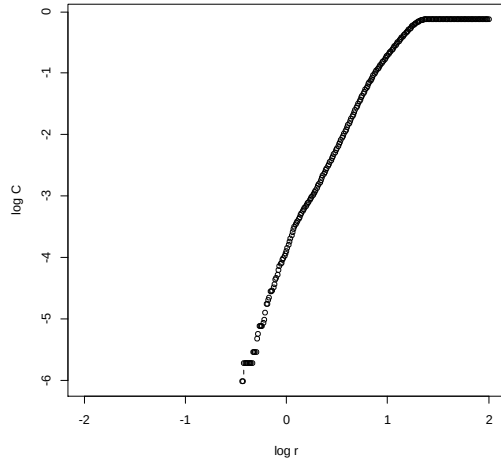


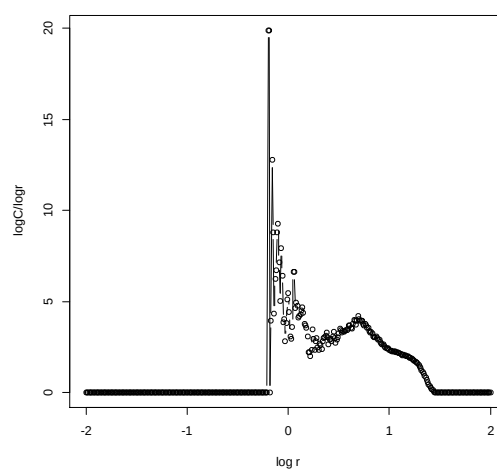
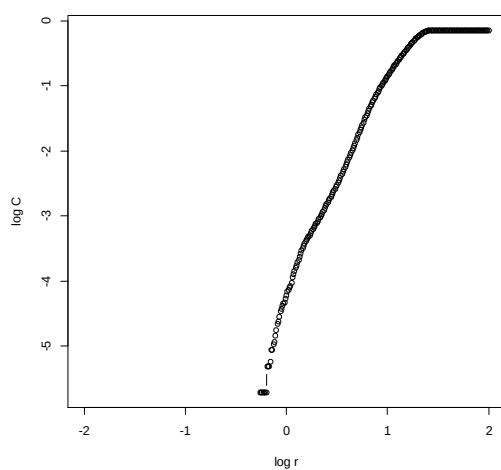
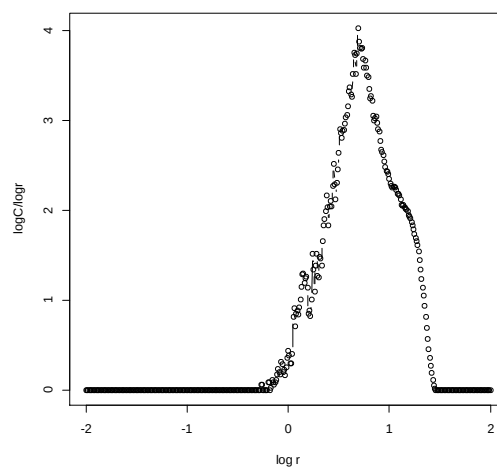
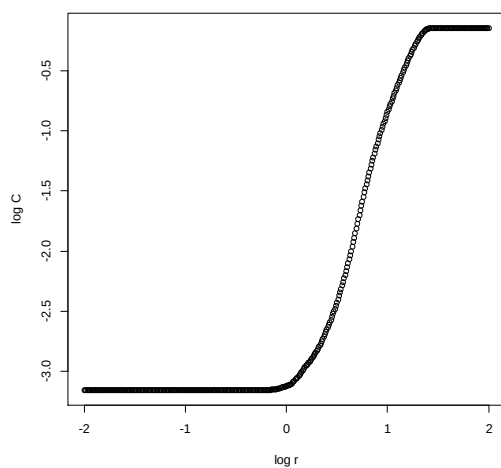


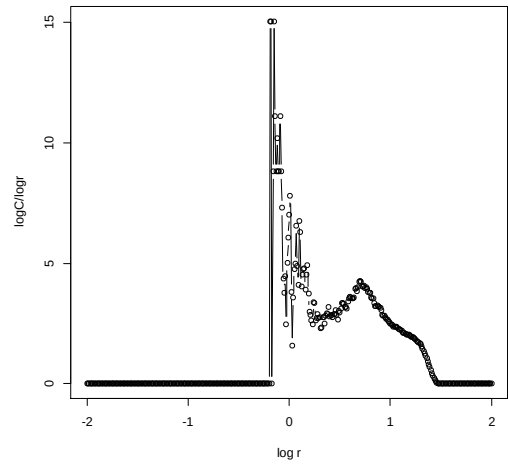
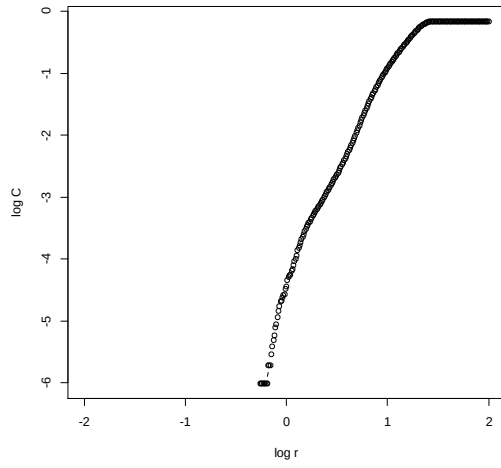
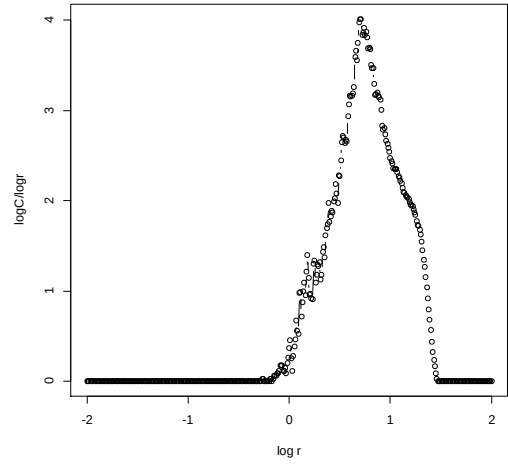
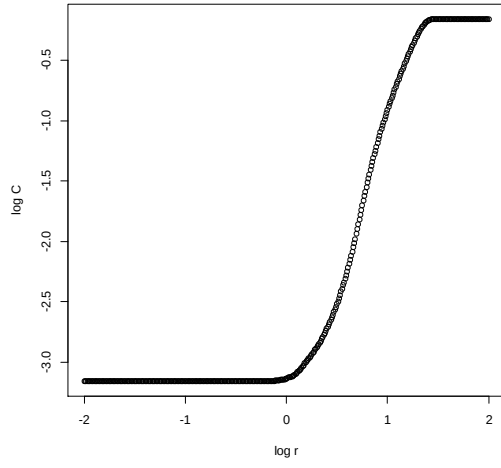




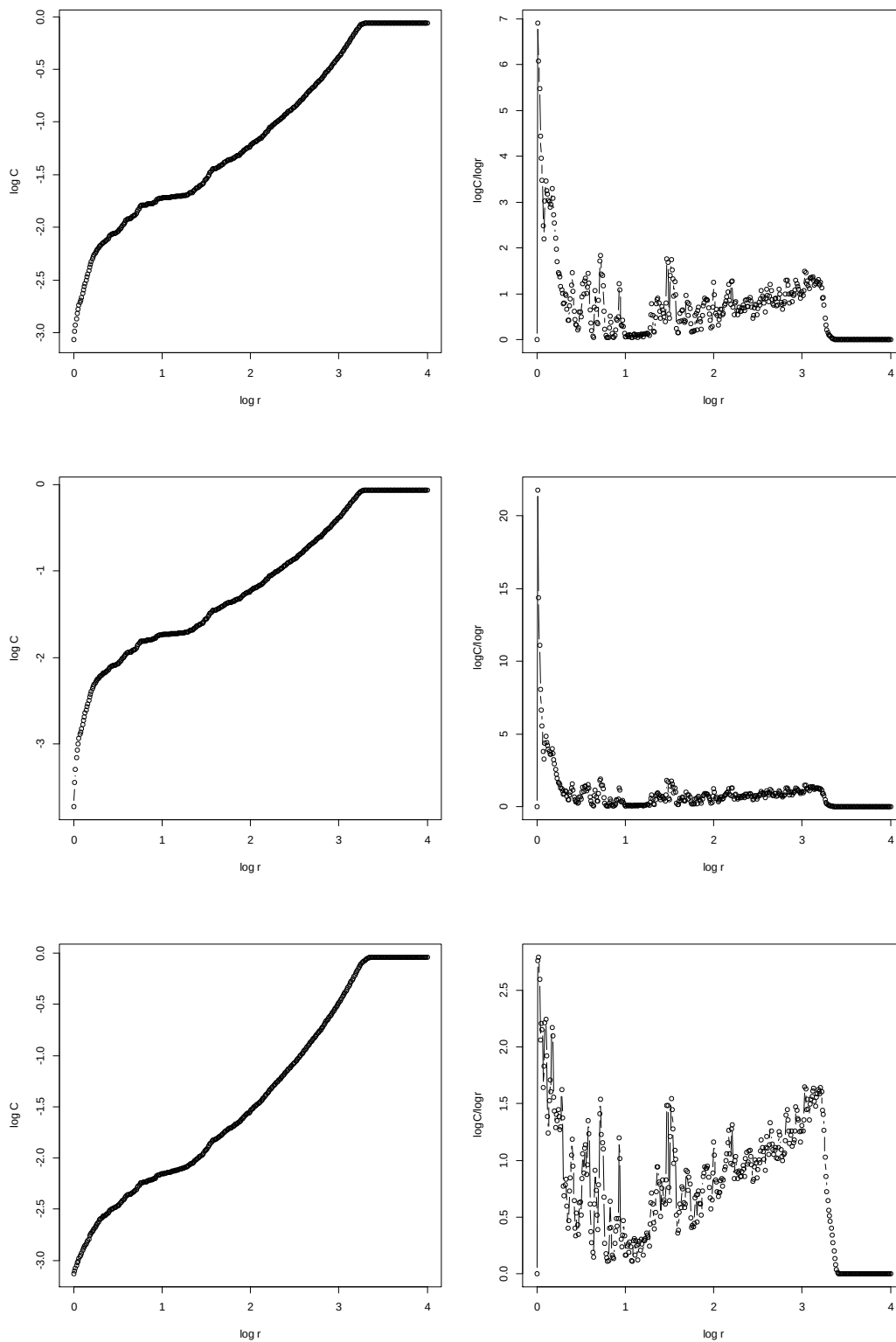


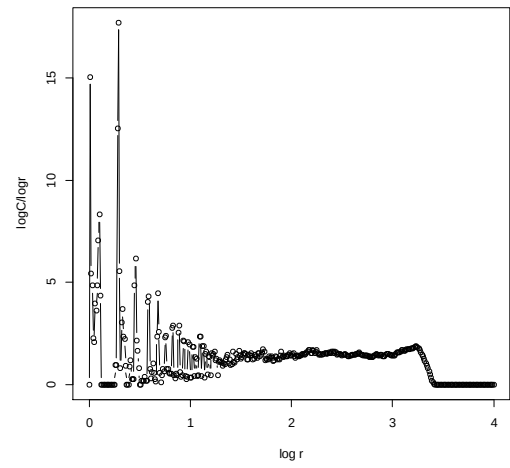
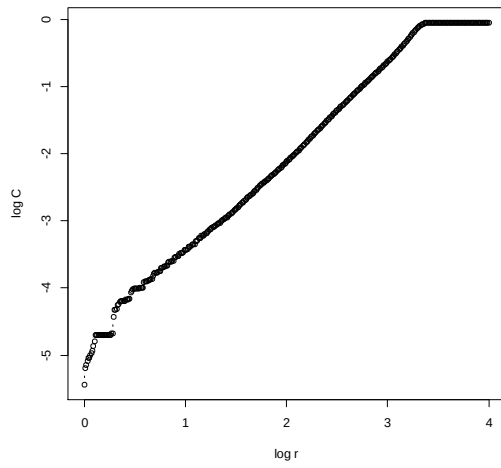
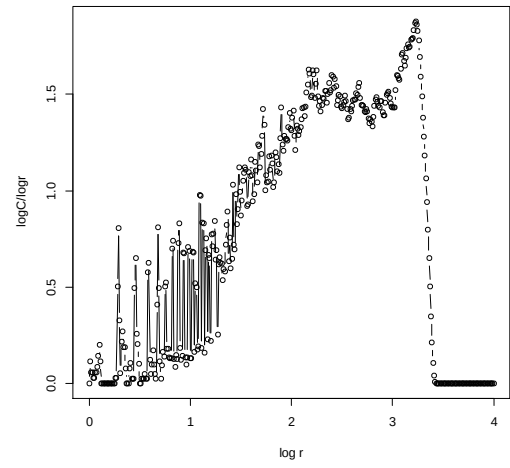
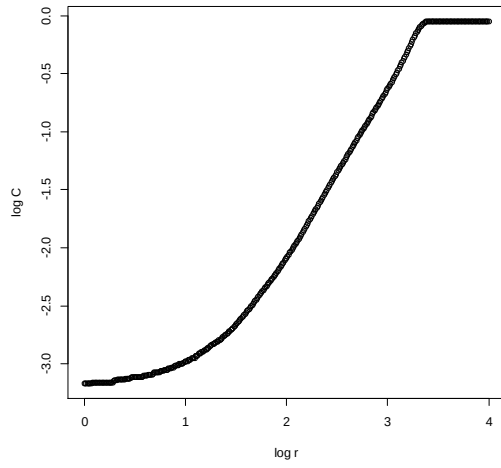
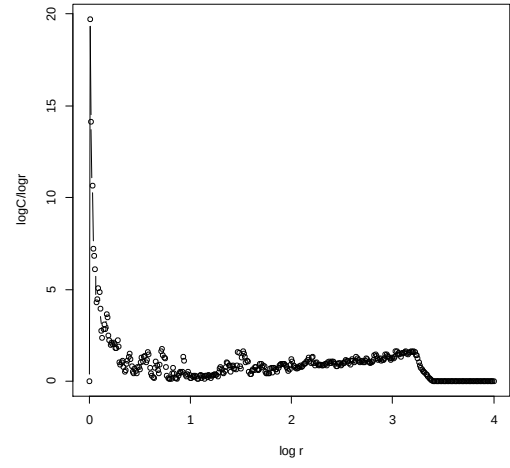
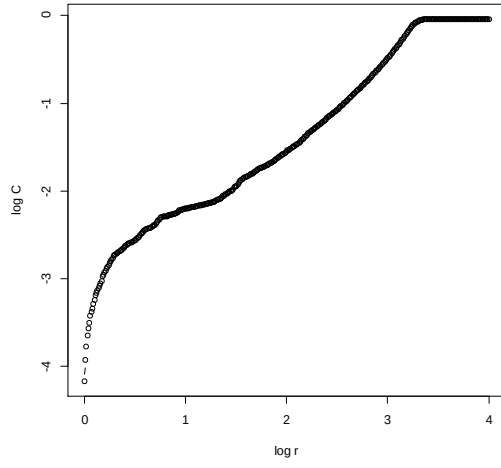


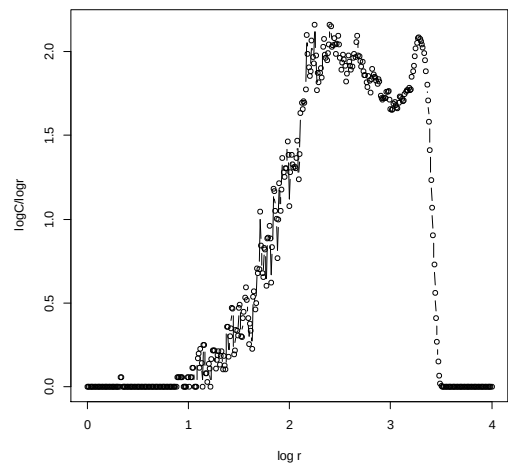
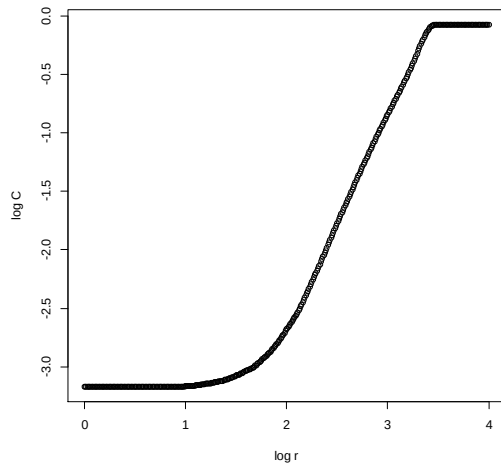
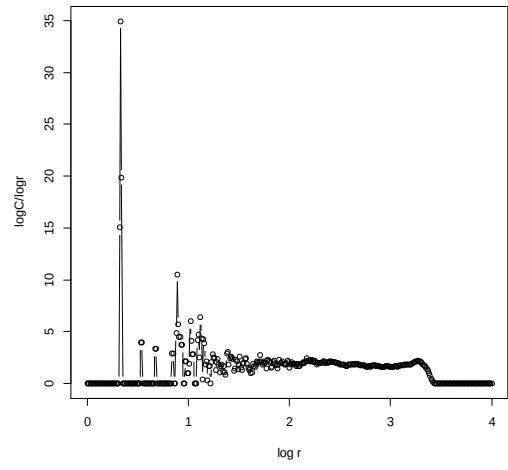
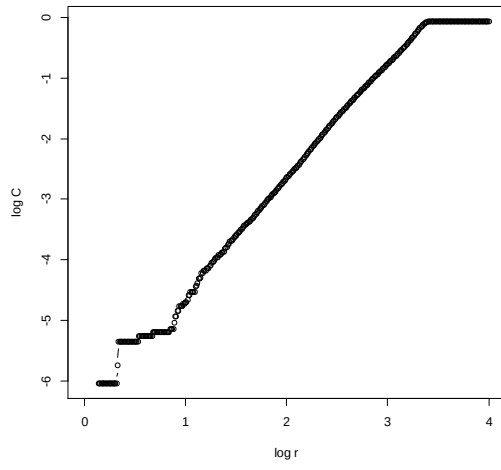
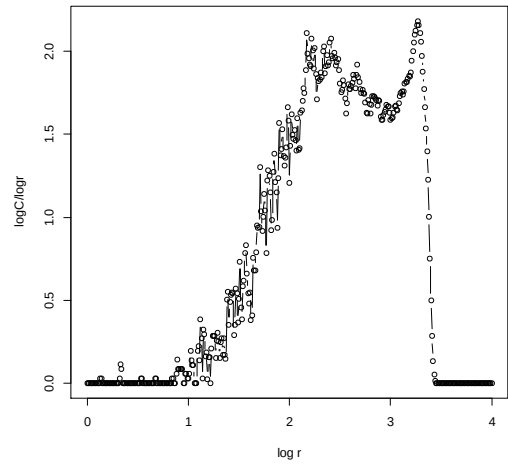
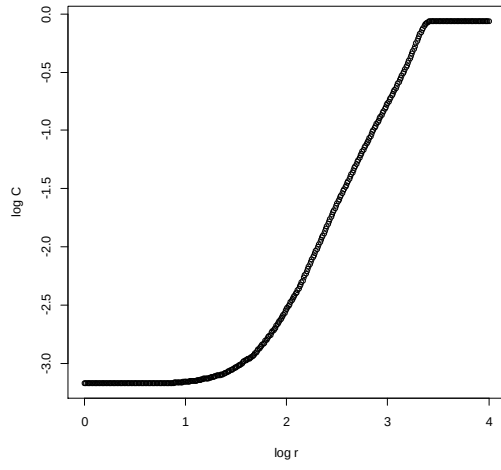


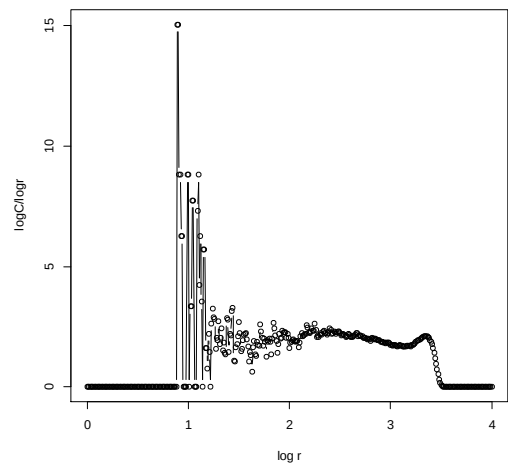
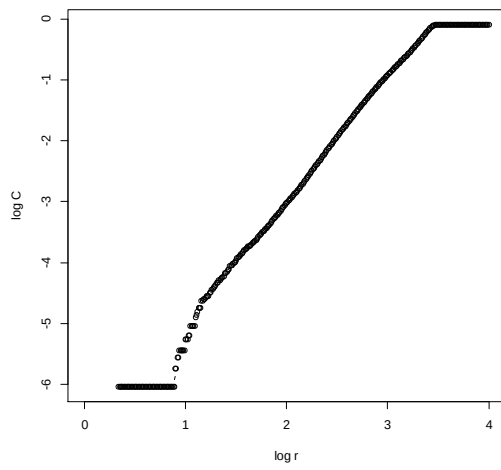
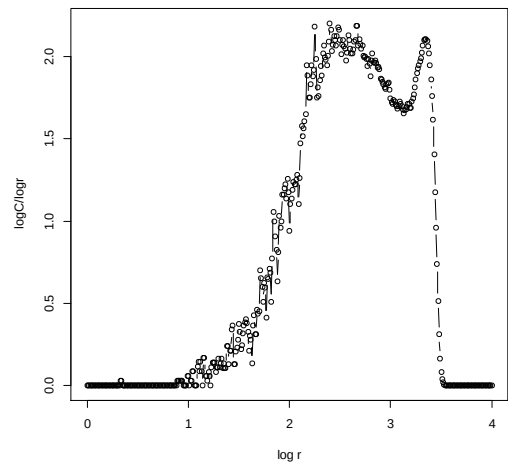
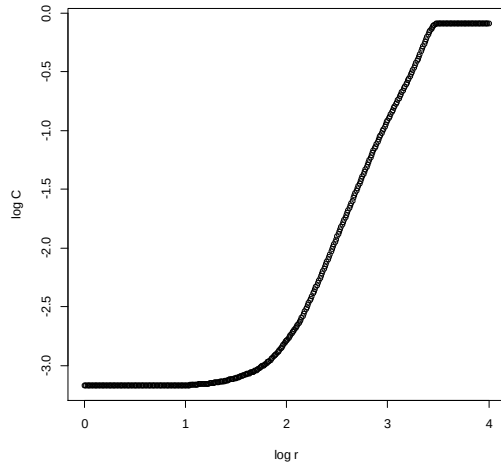
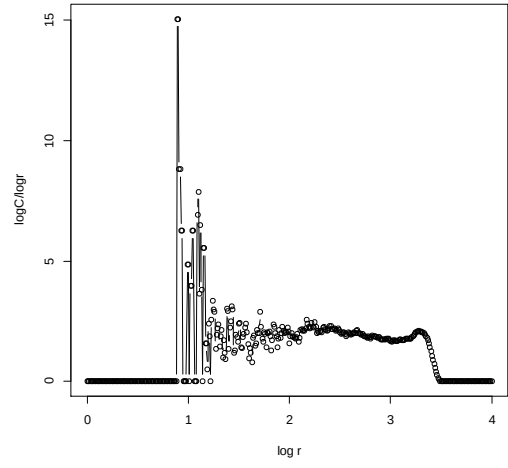
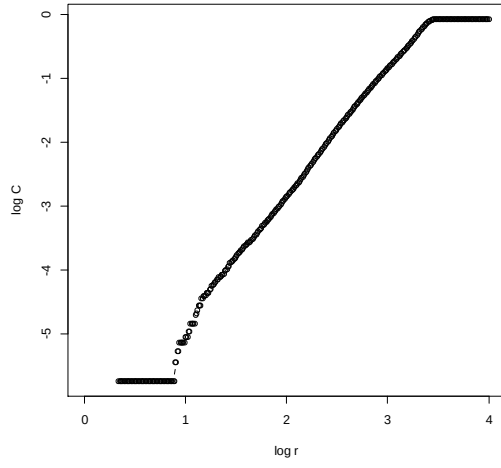


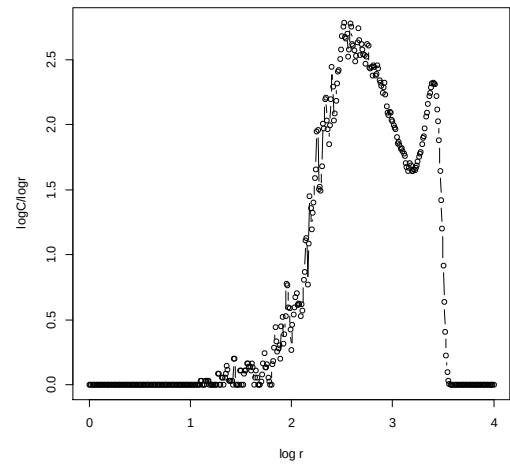
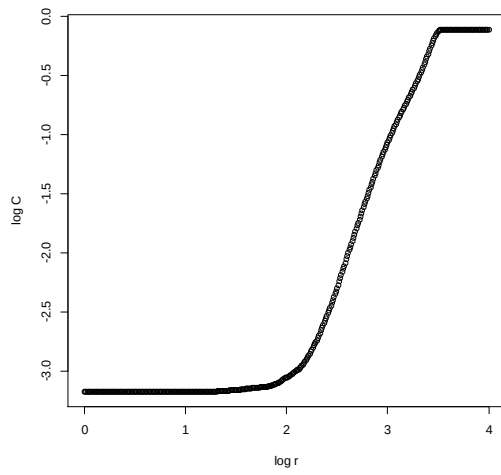
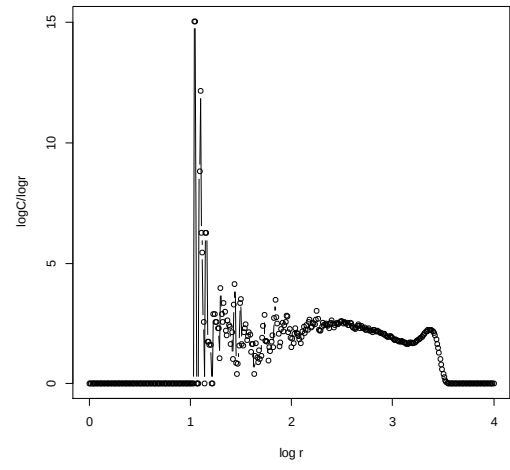
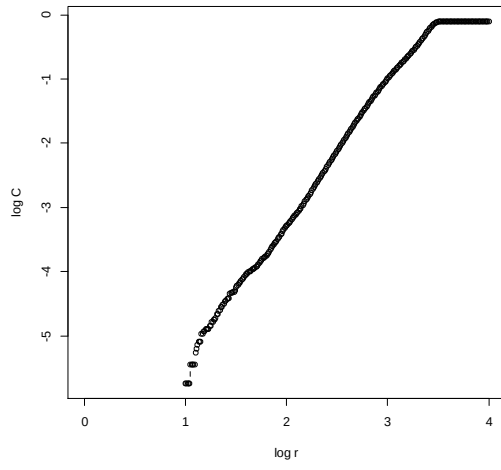
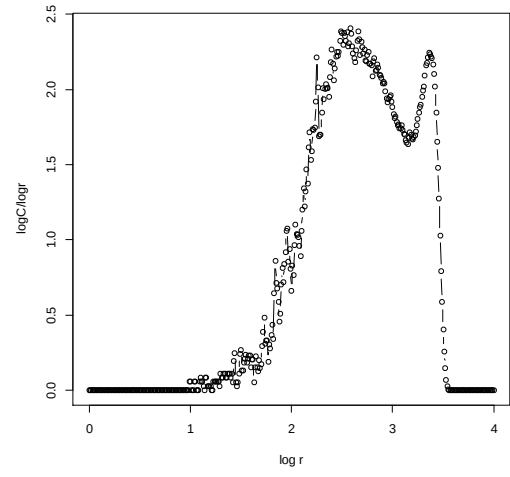
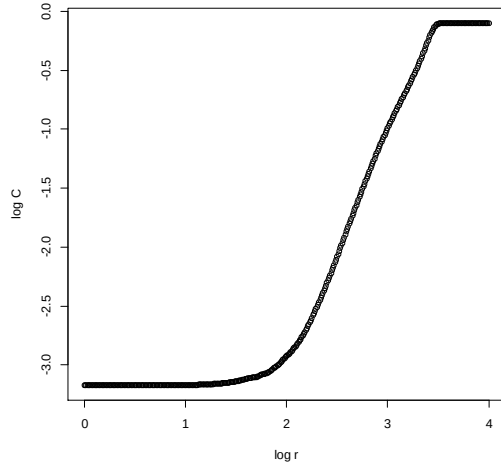
PARi mai/01

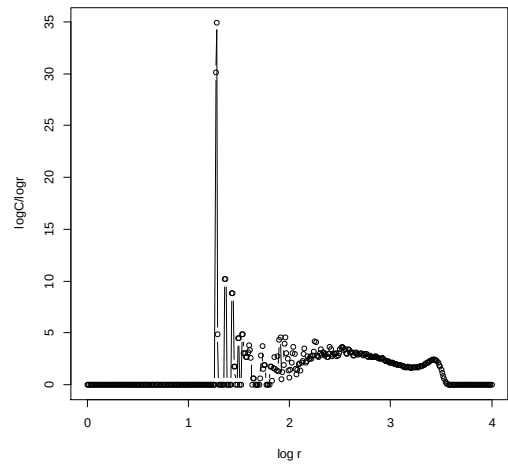
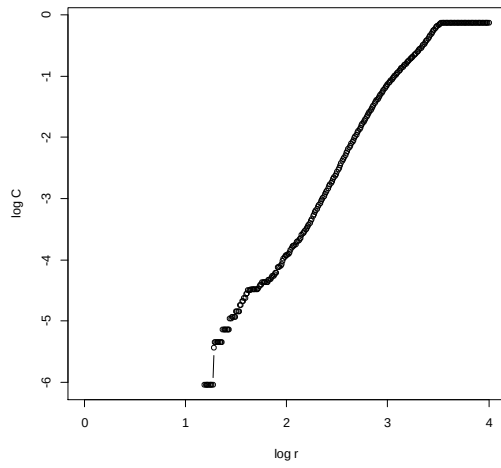
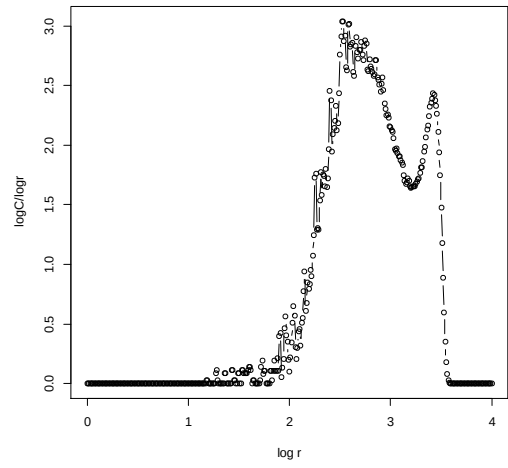
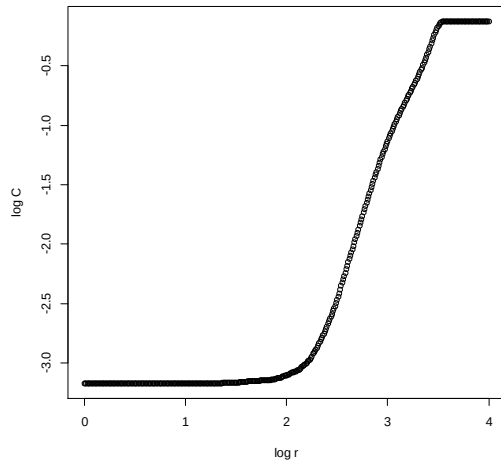
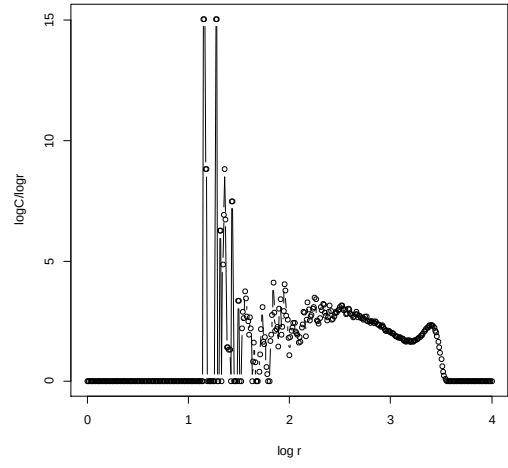
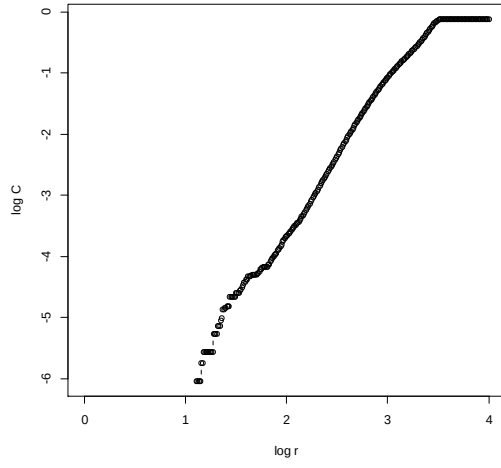


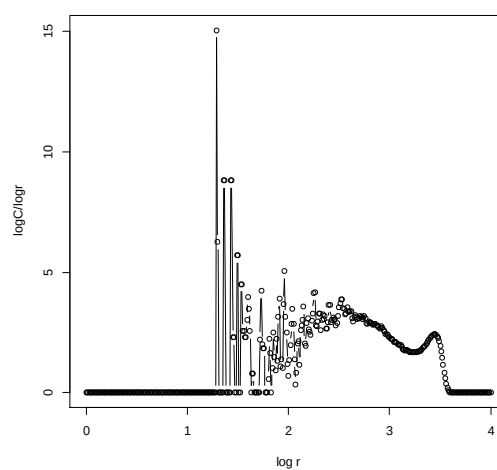
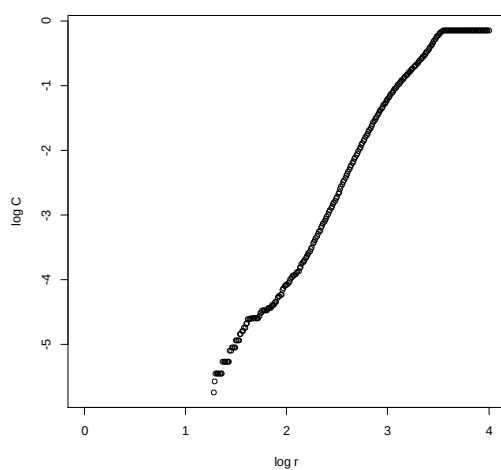
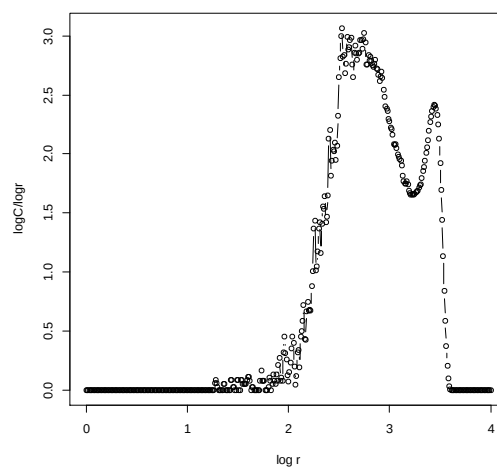
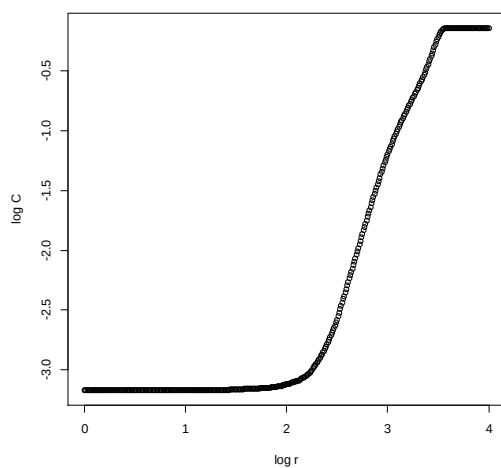


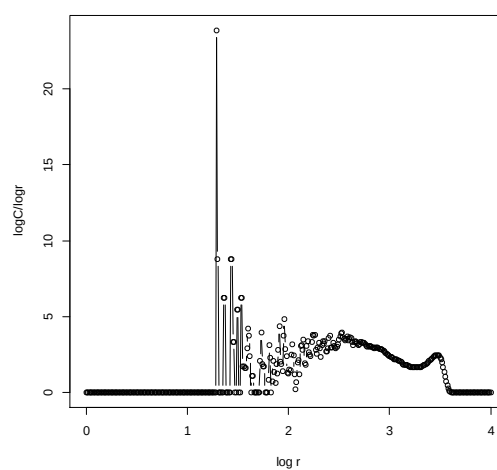
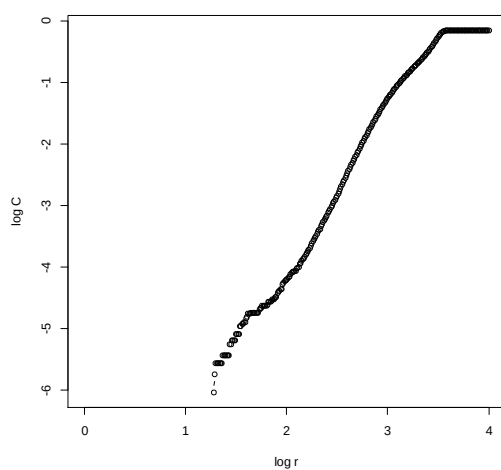
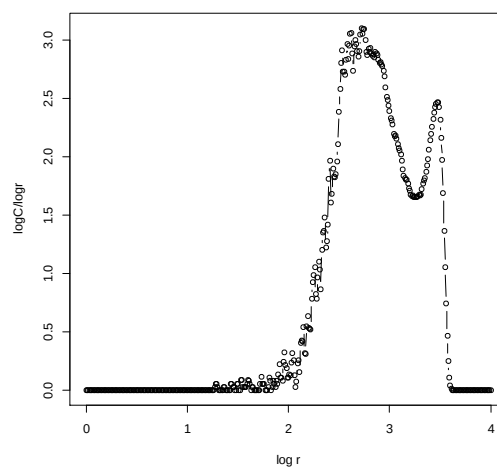
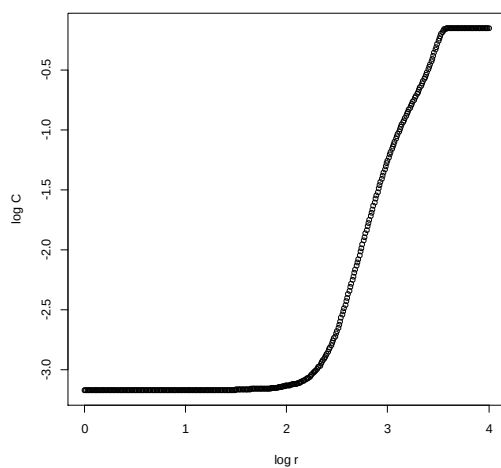


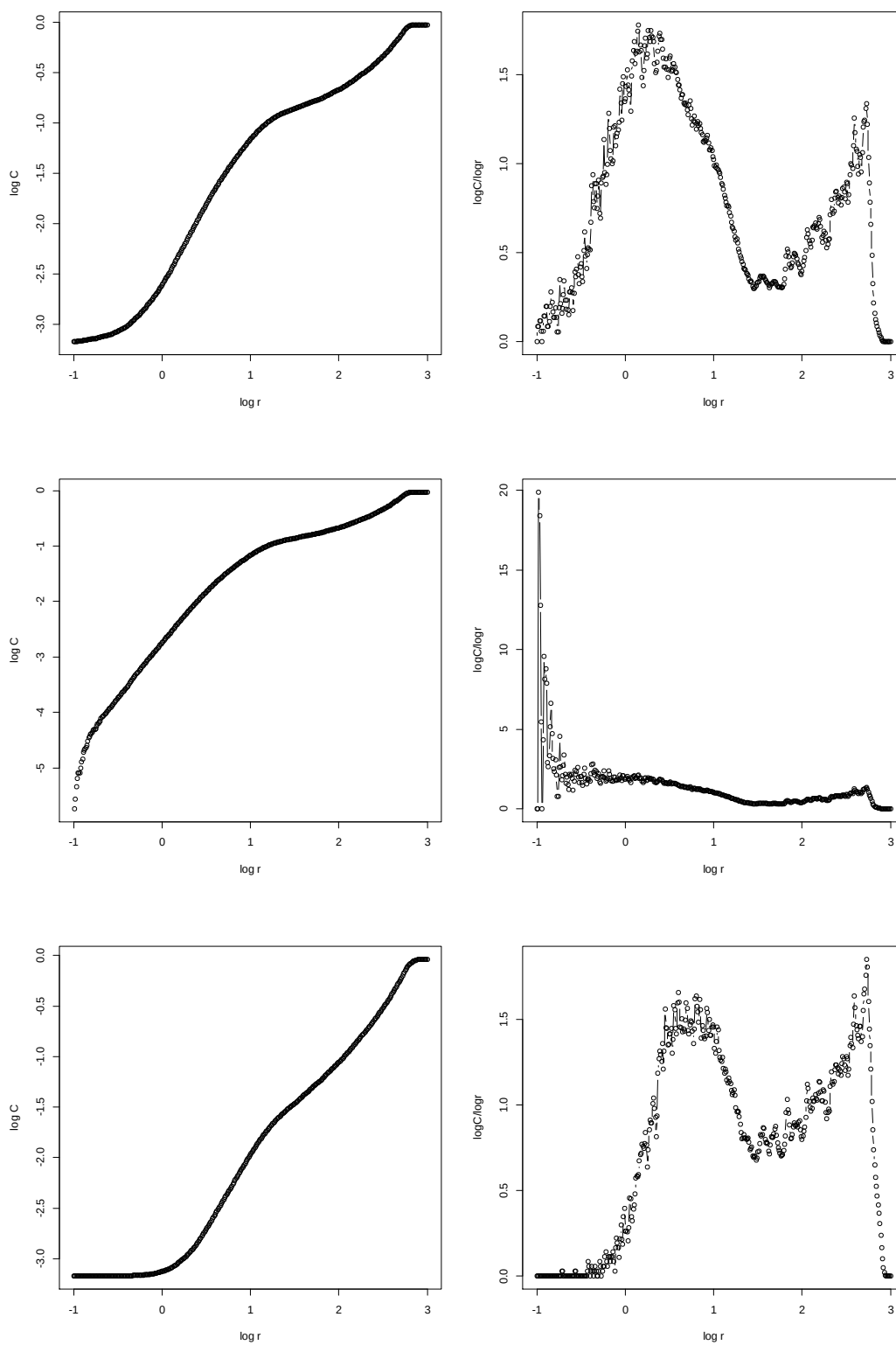


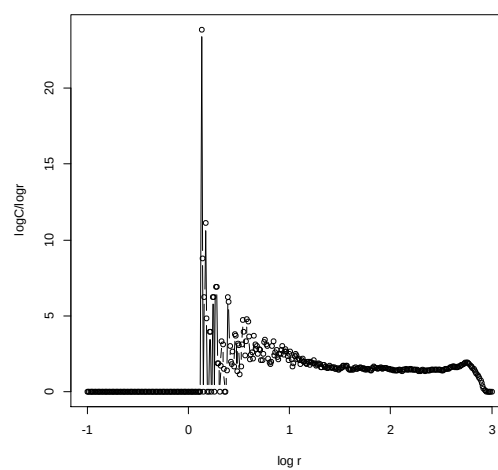
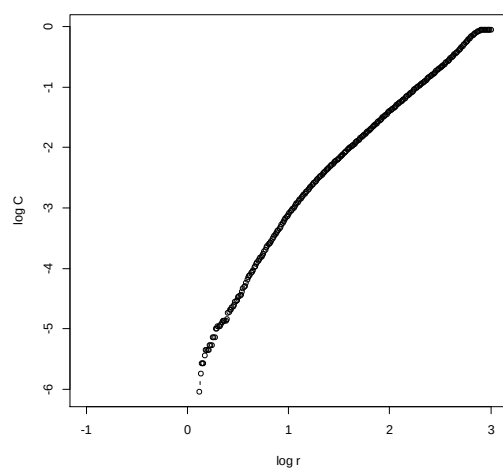
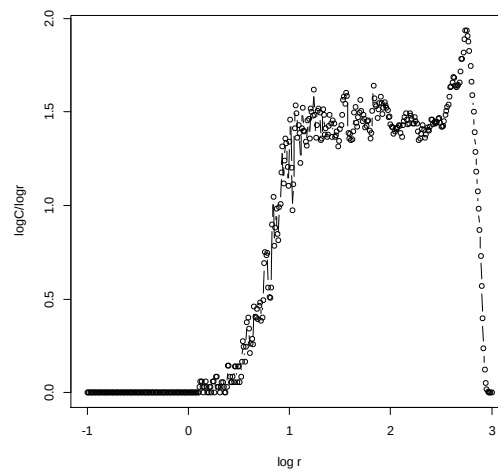
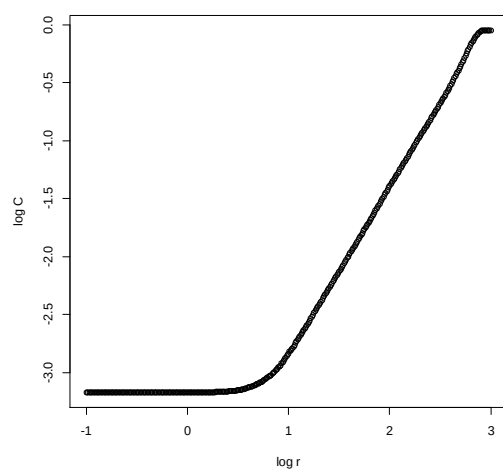
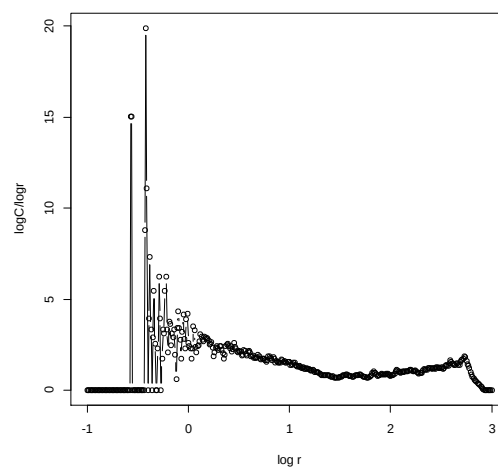
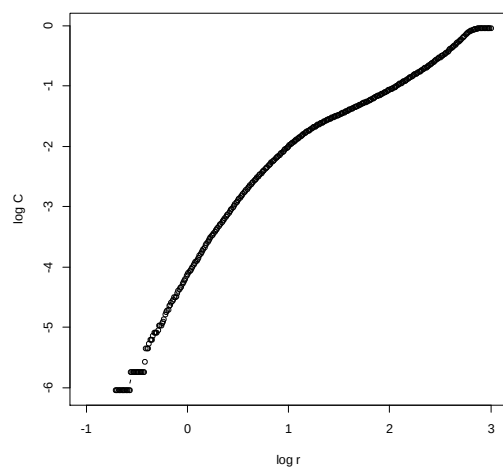


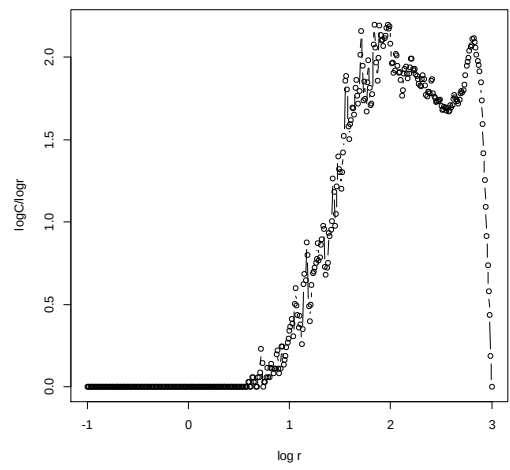
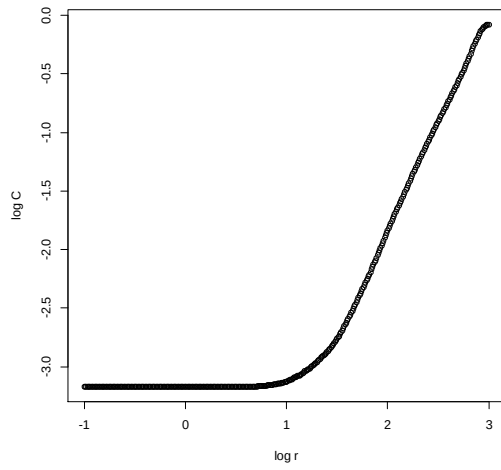
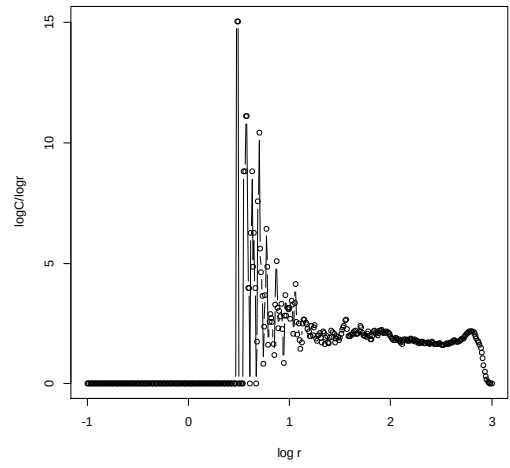
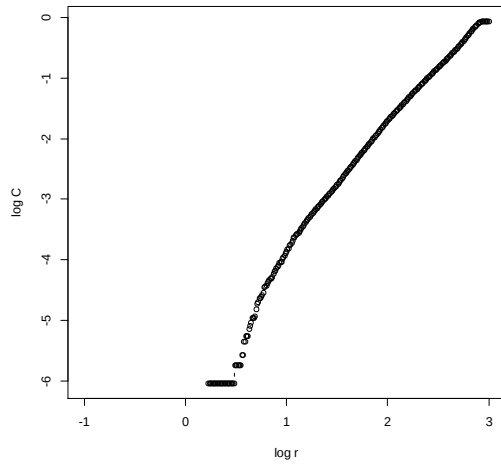
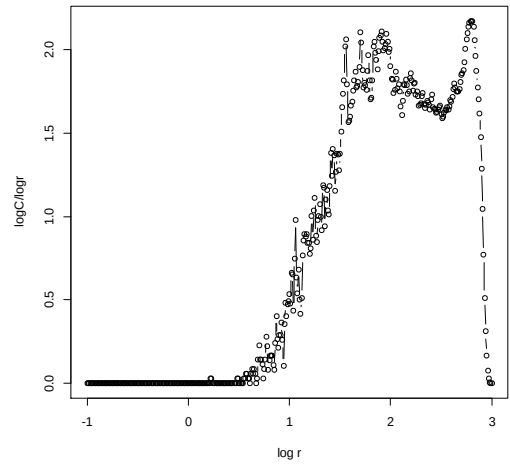
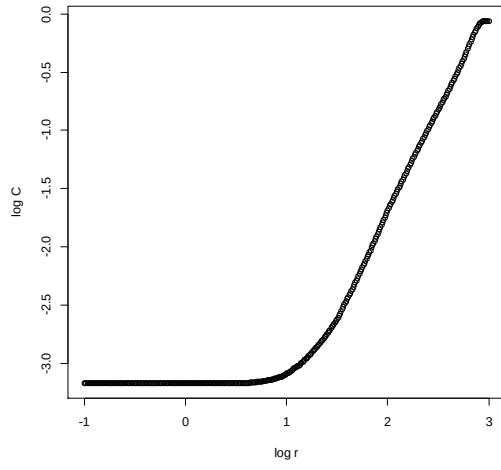


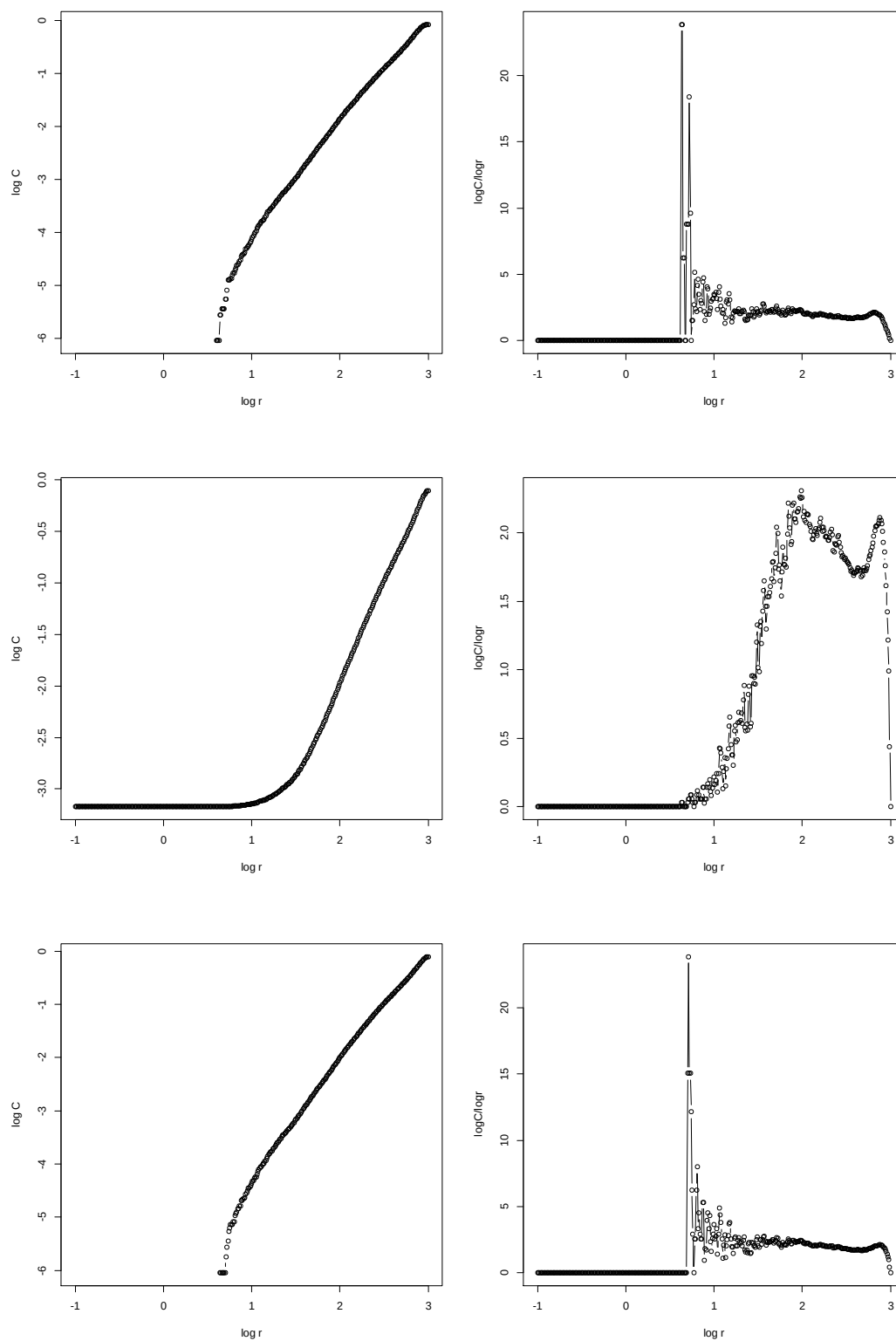


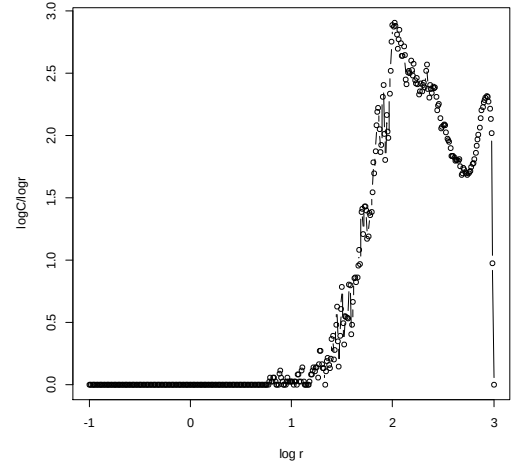
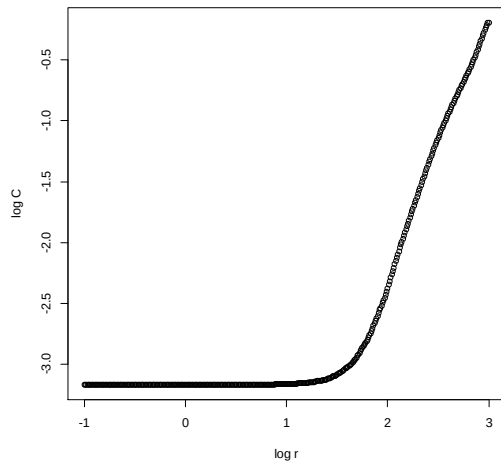
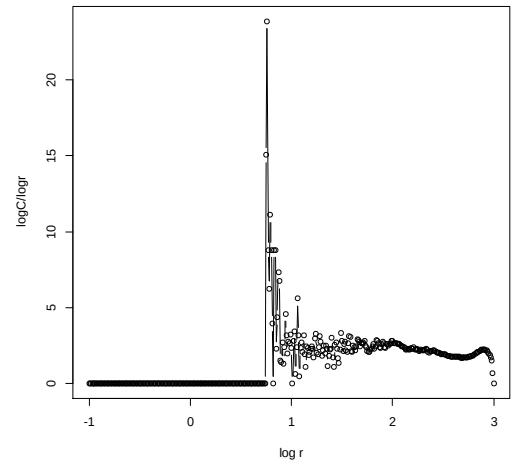
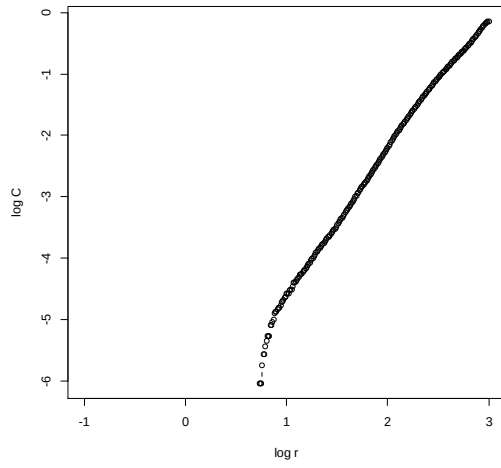
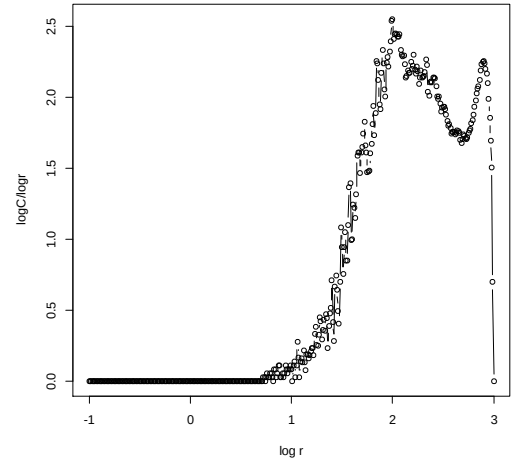
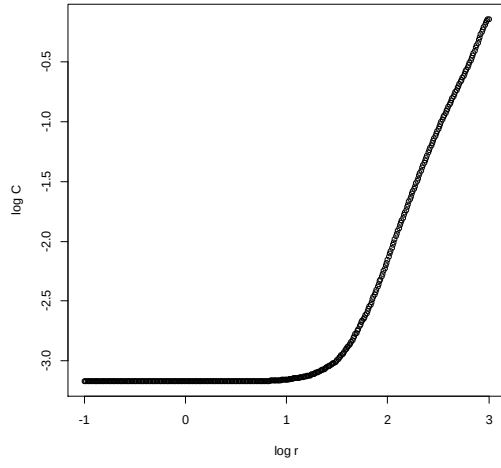


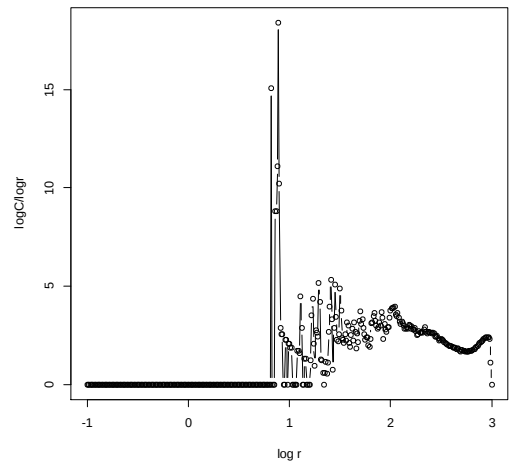
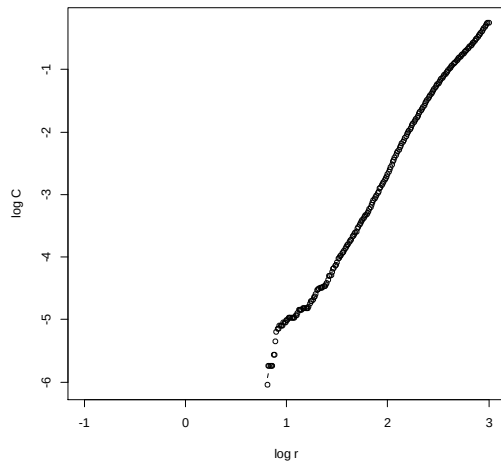
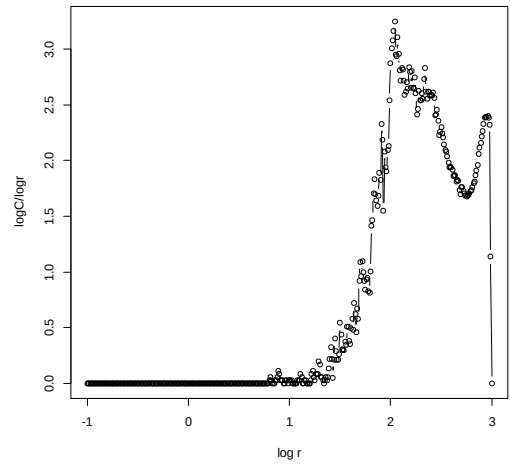
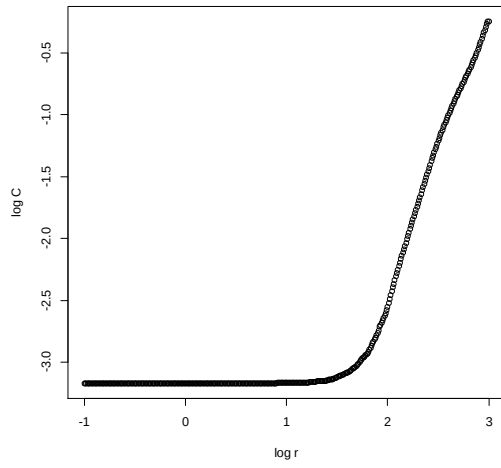
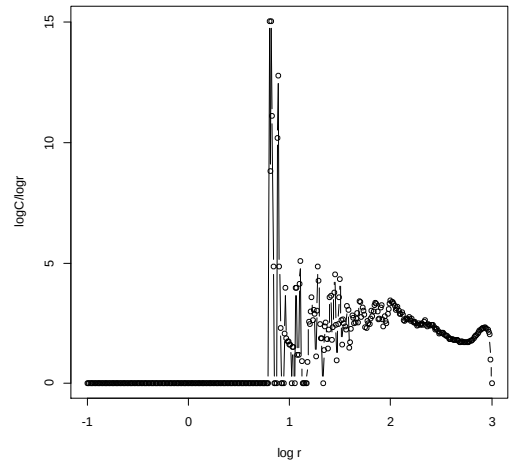
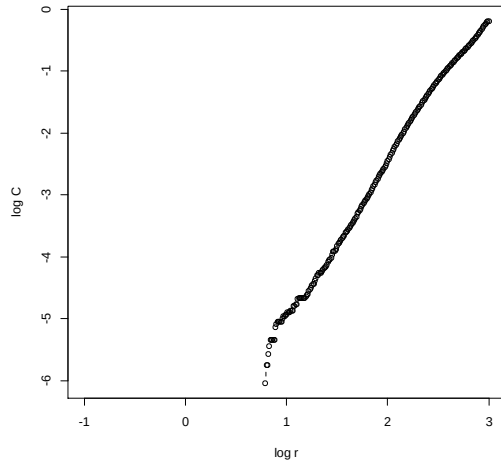
Rn mai/01

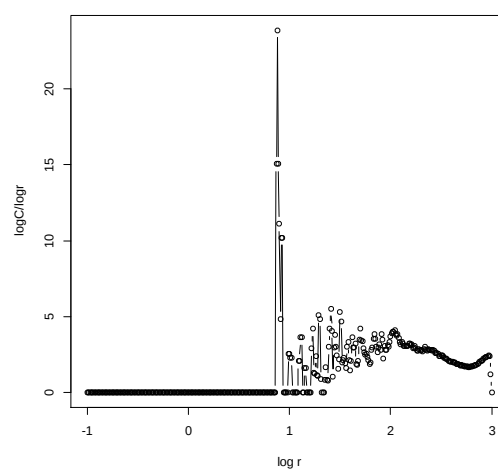
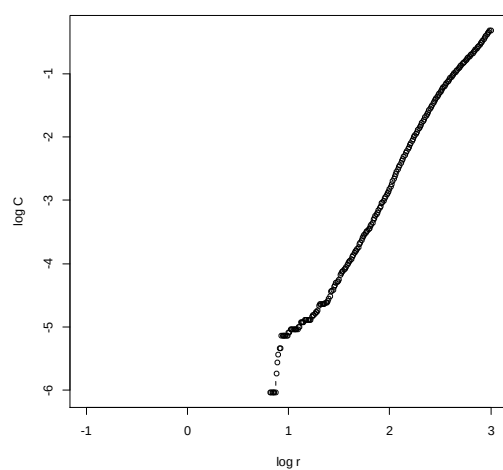
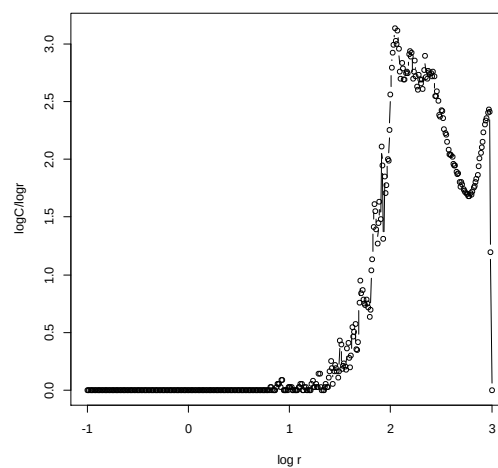
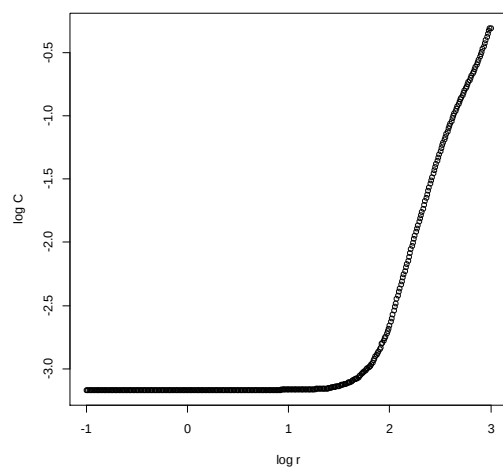


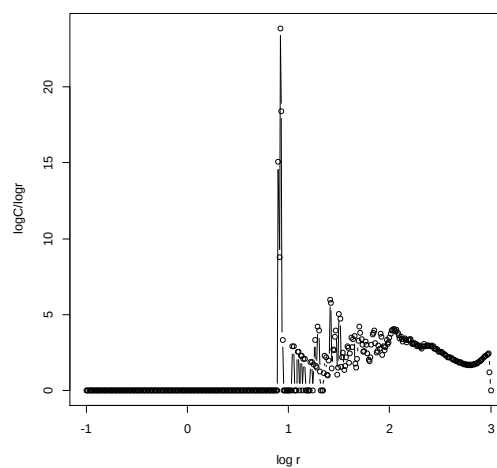
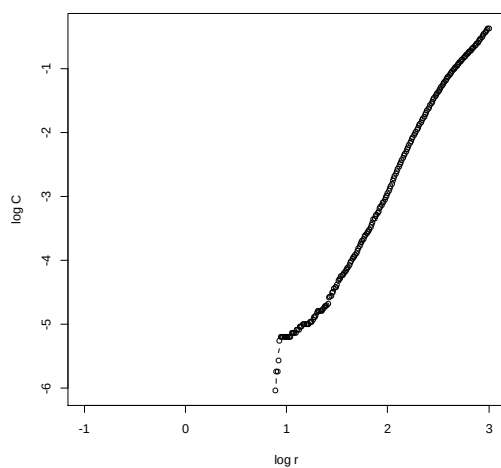
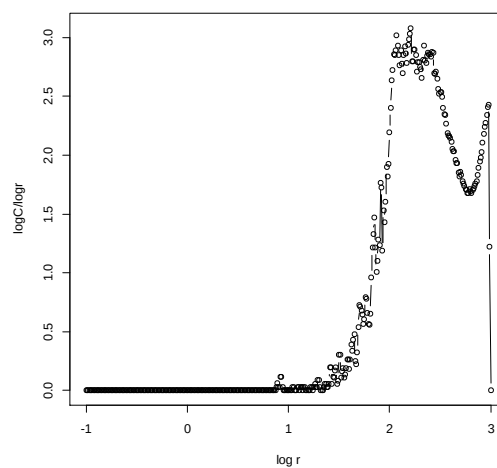
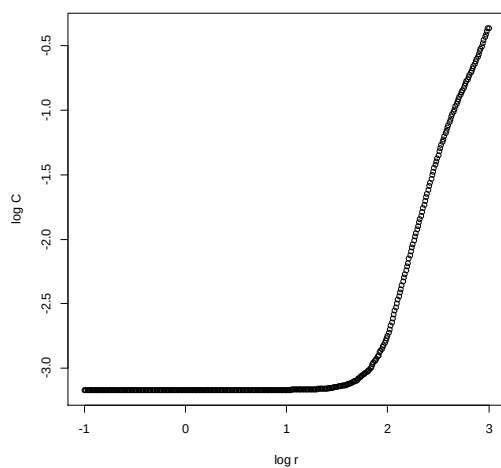




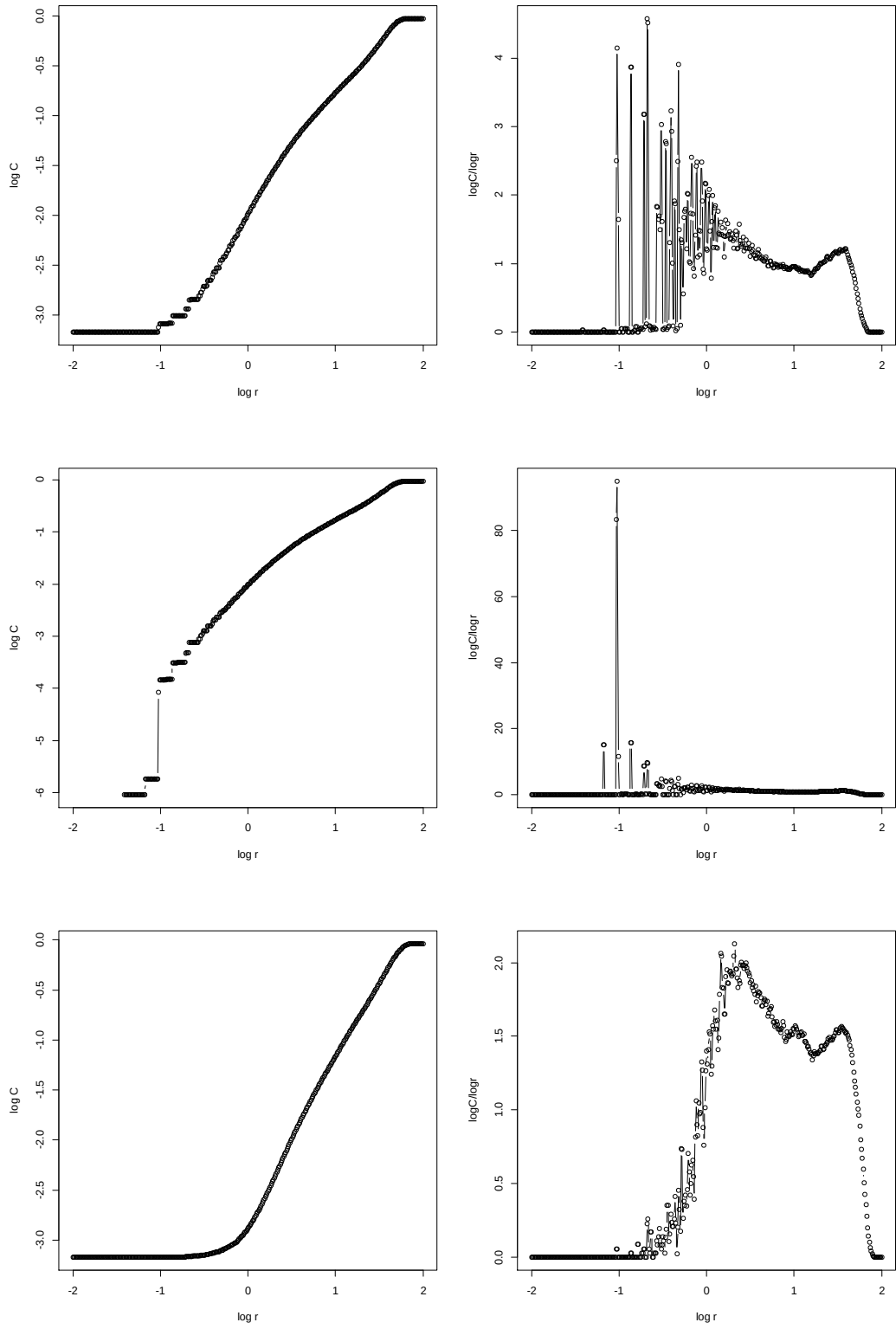


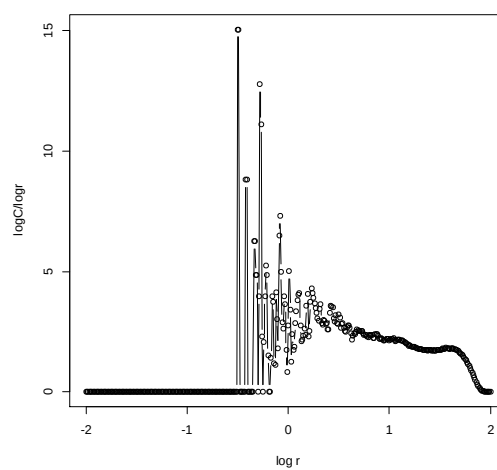
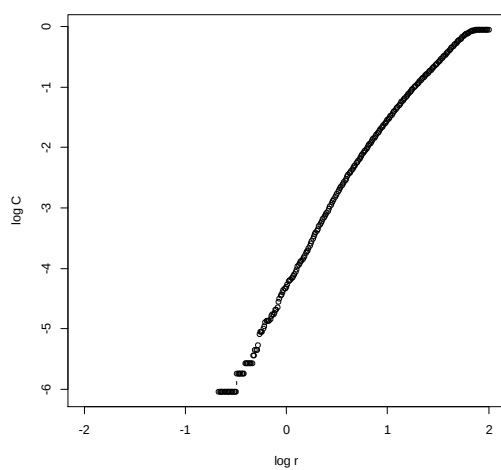
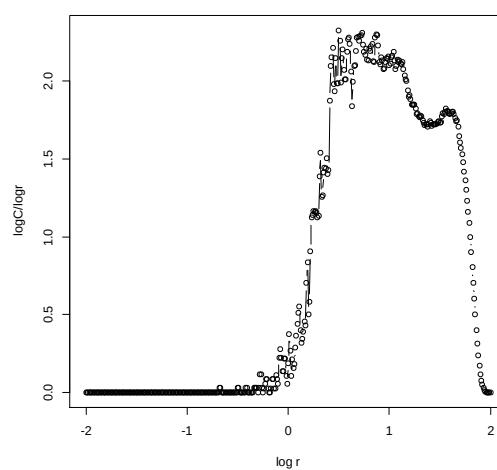
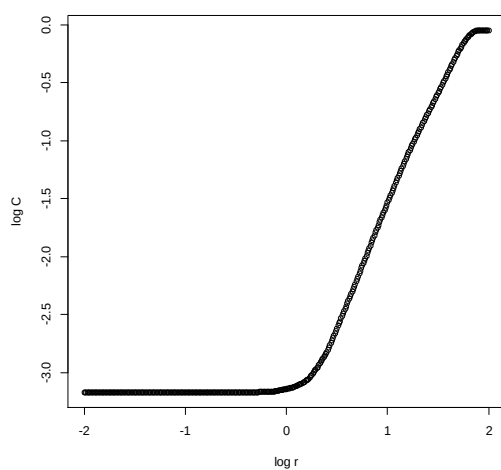
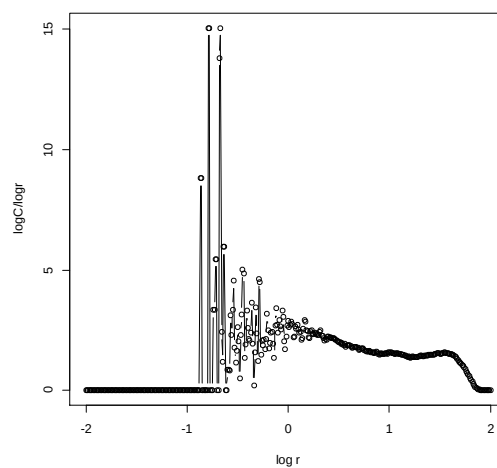
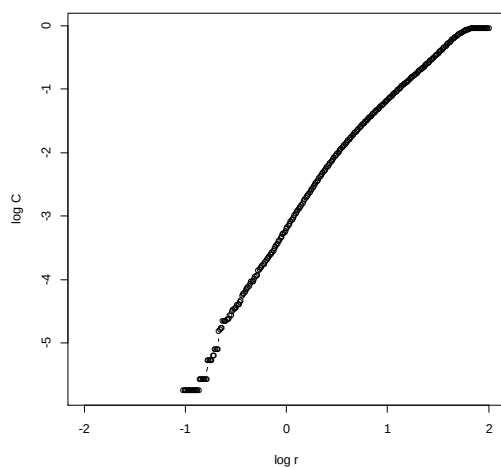


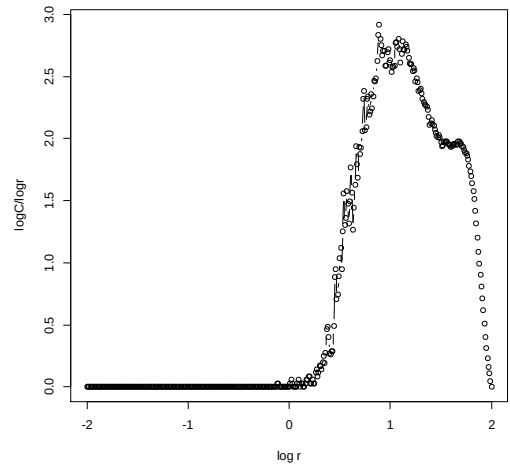
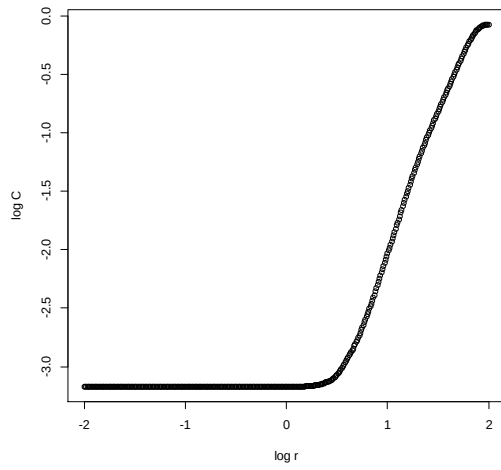
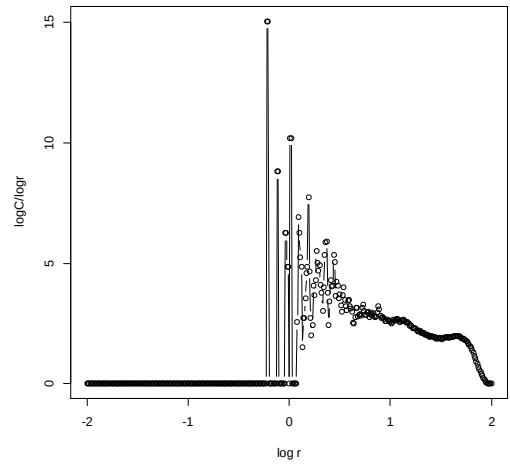
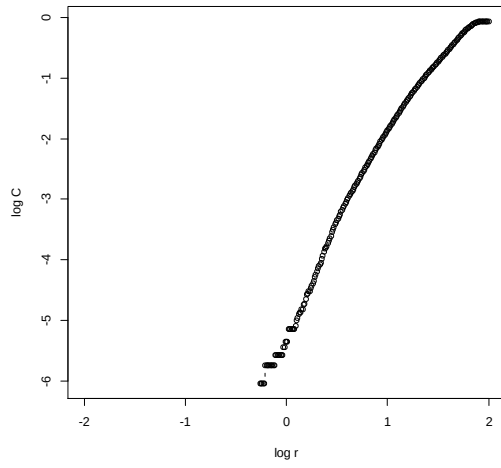
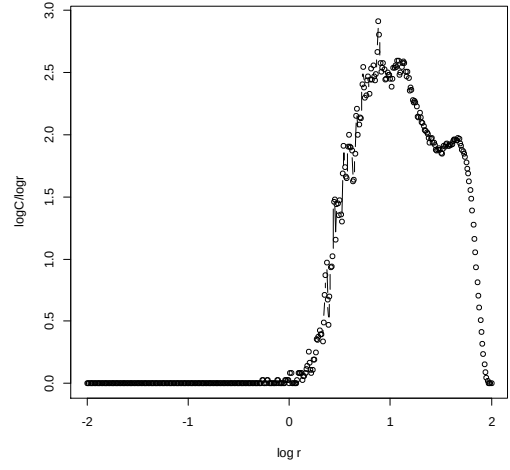
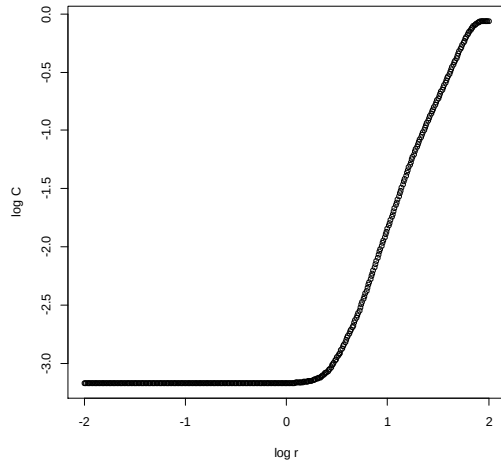


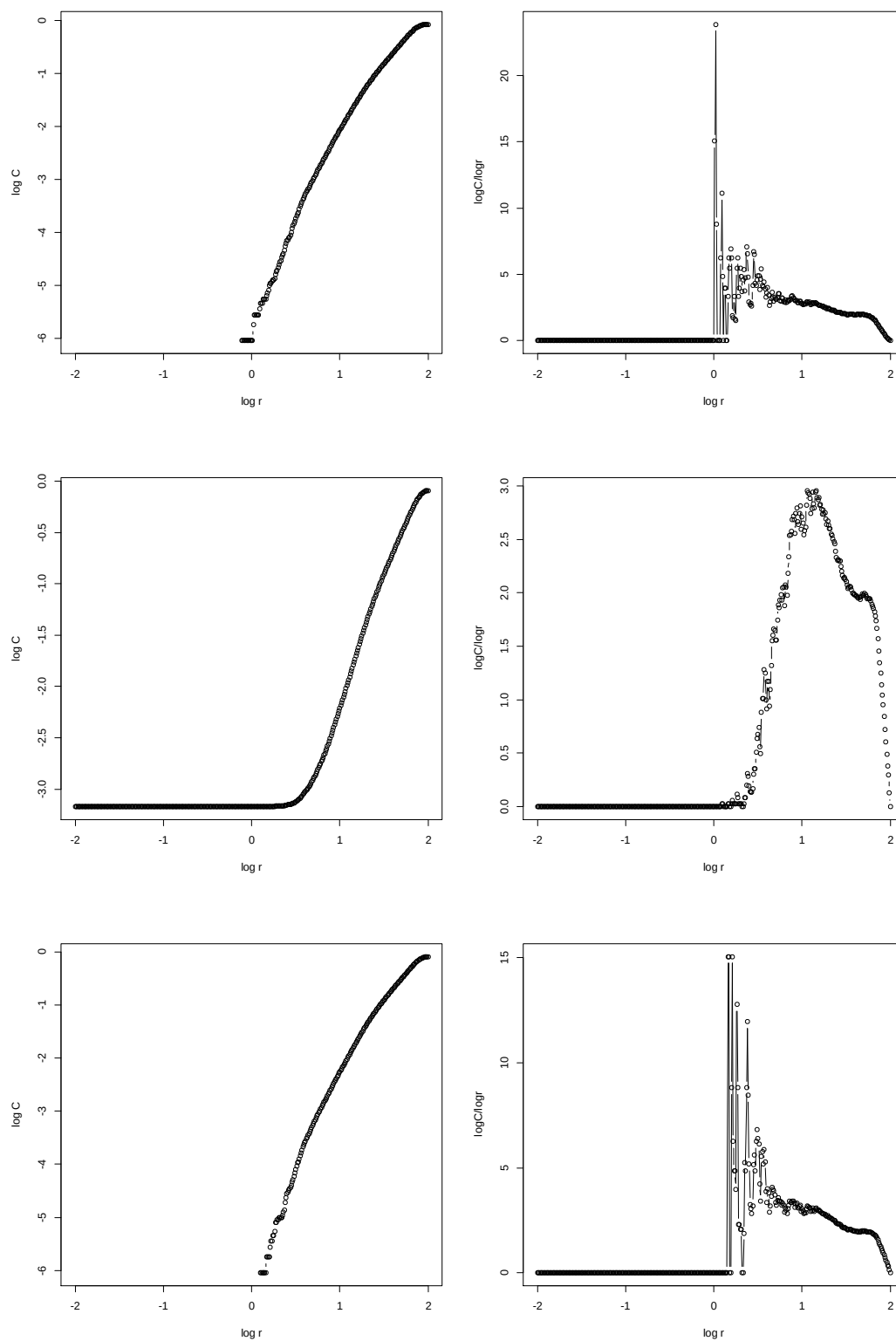


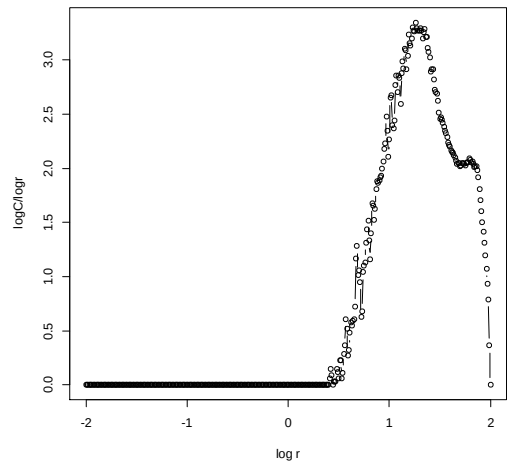
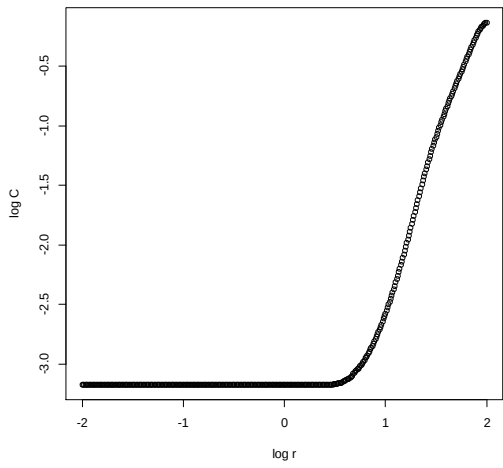
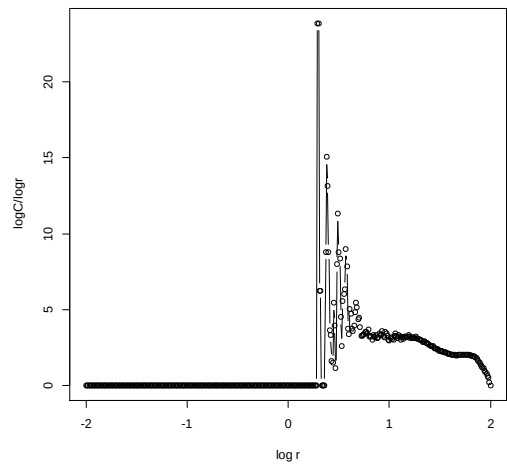
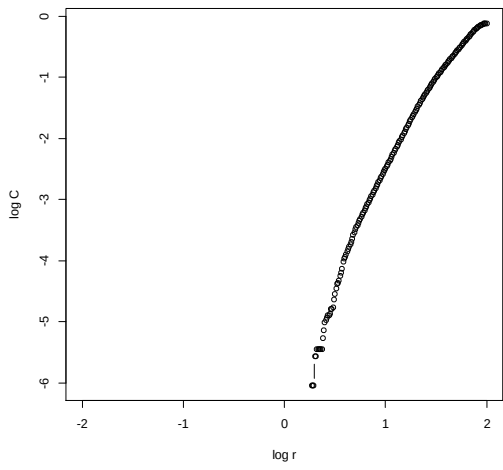
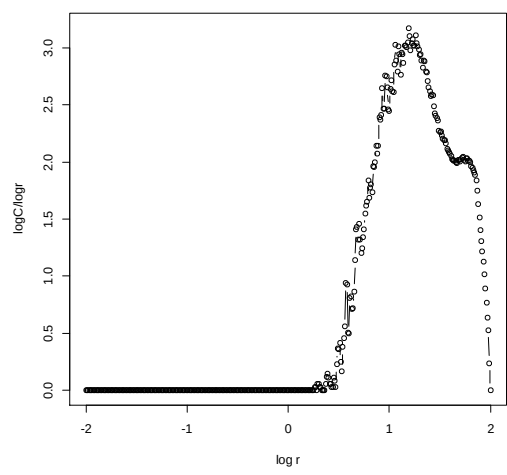
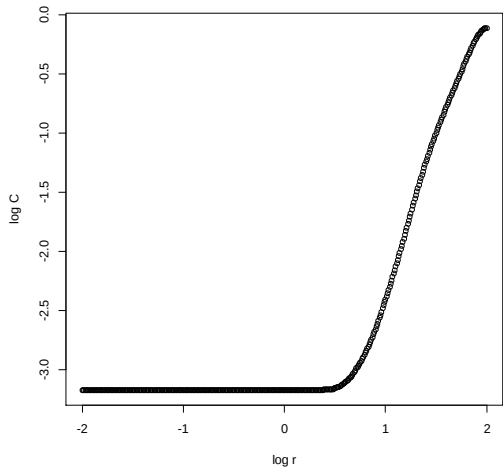
RH mai/01

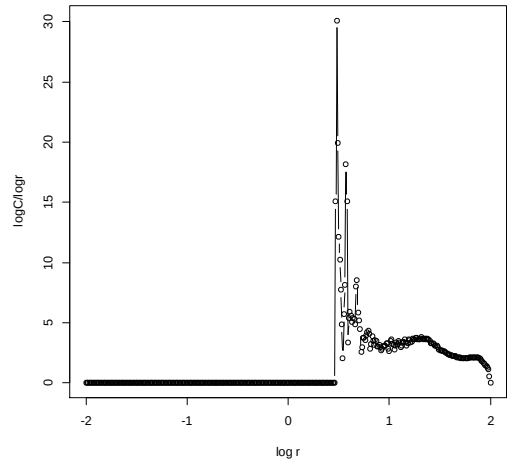
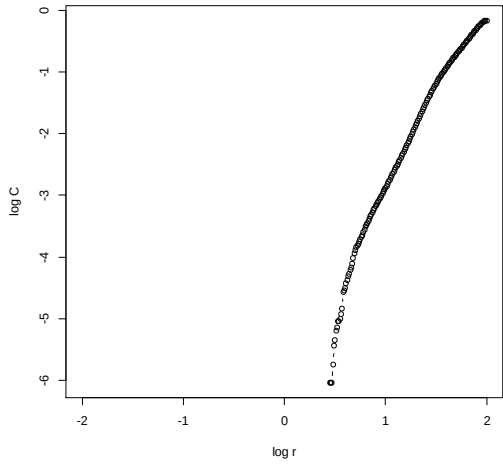
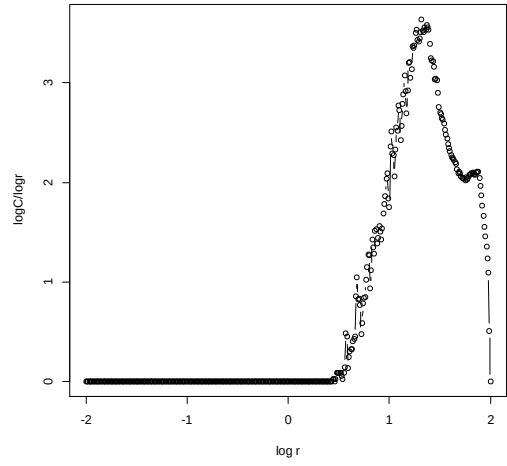
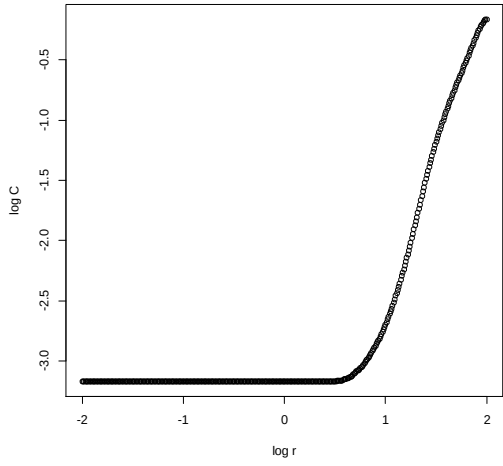
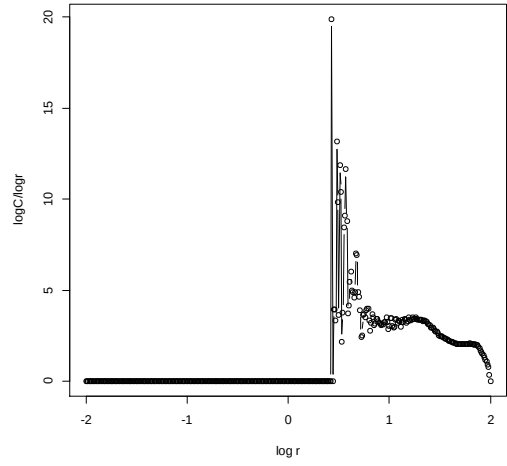
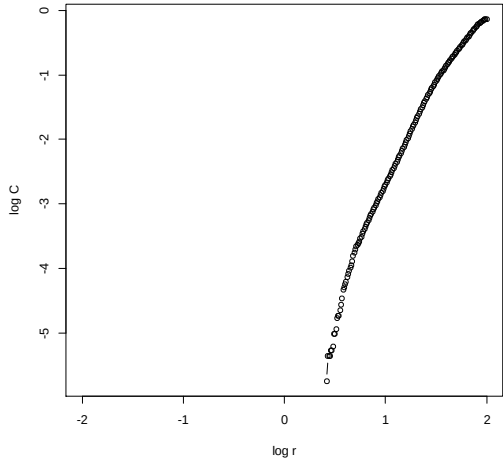


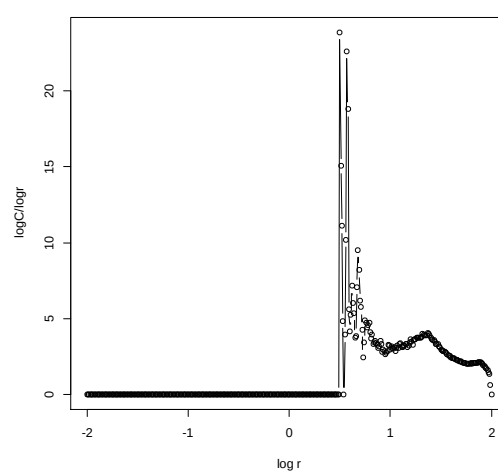
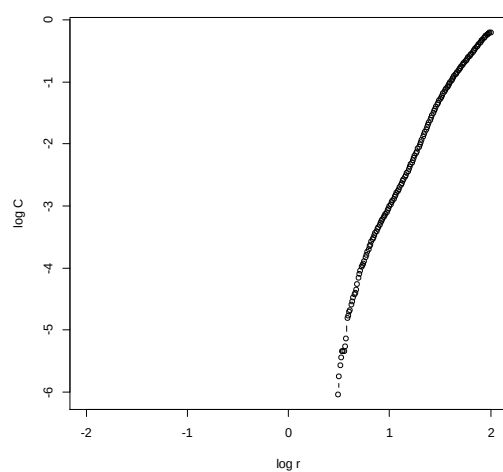
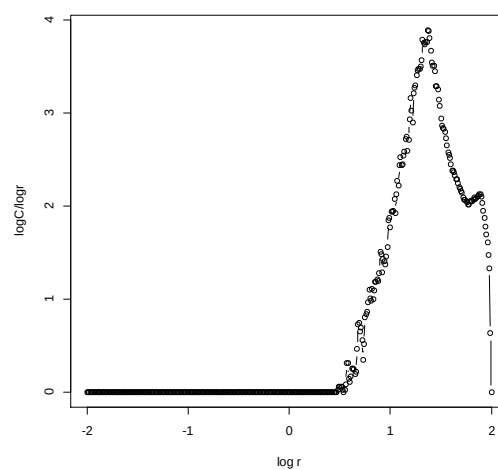
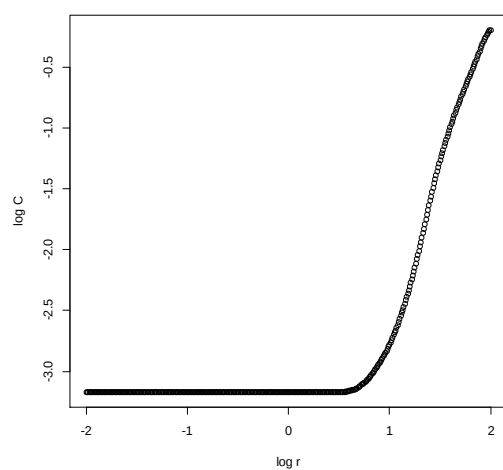


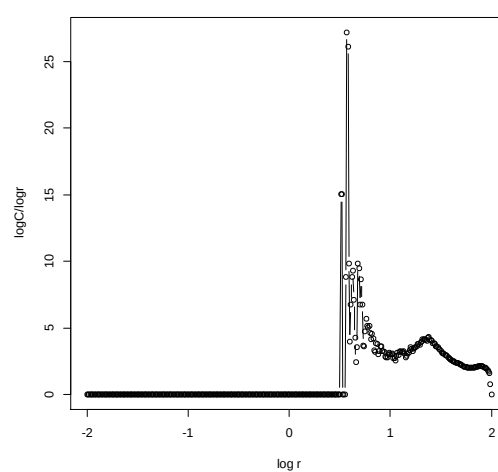
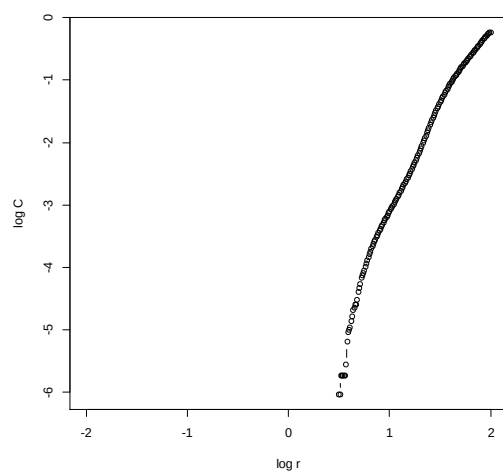
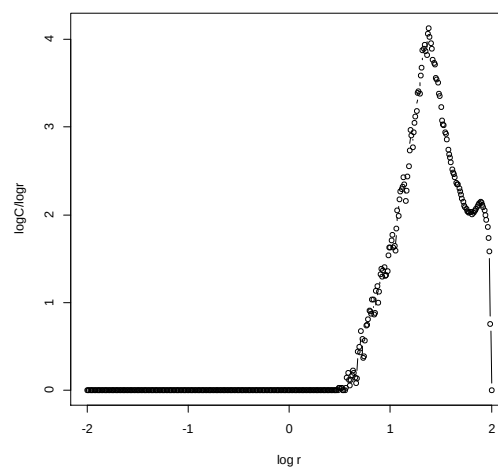
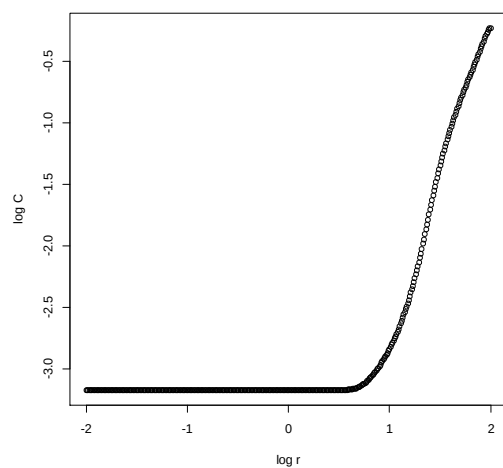


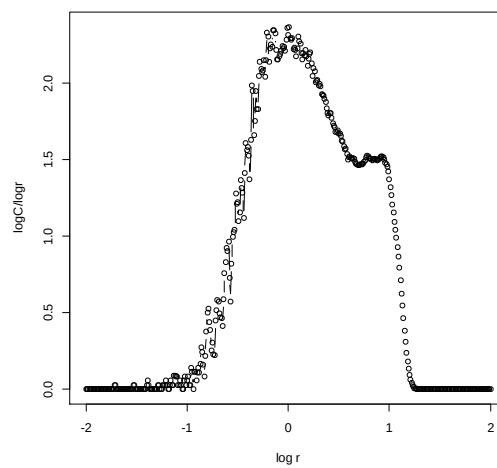
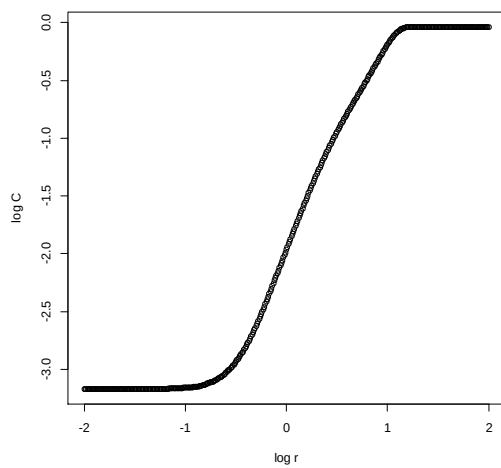
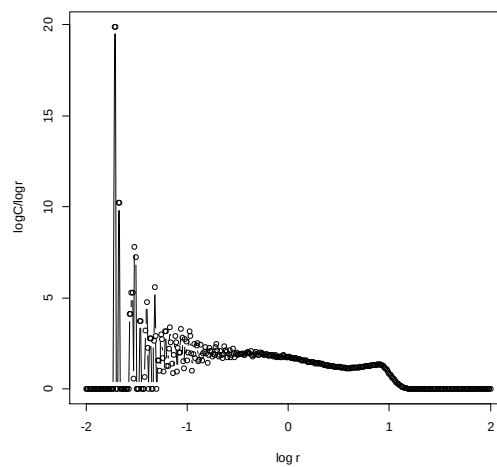
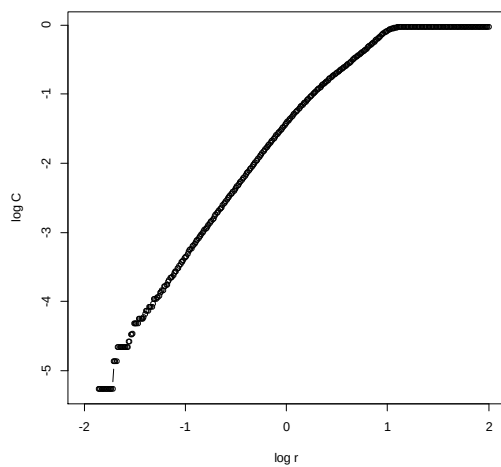
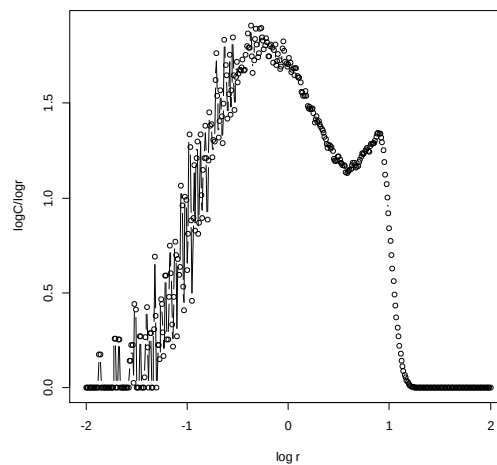
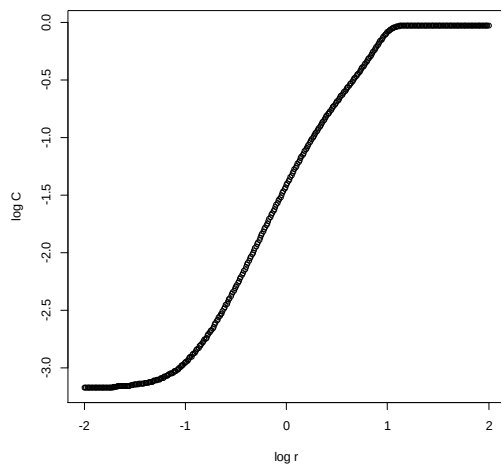


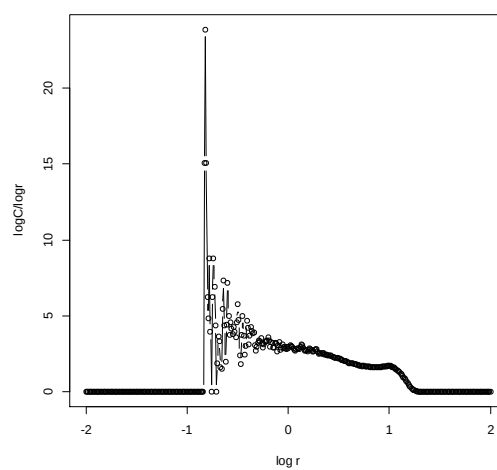
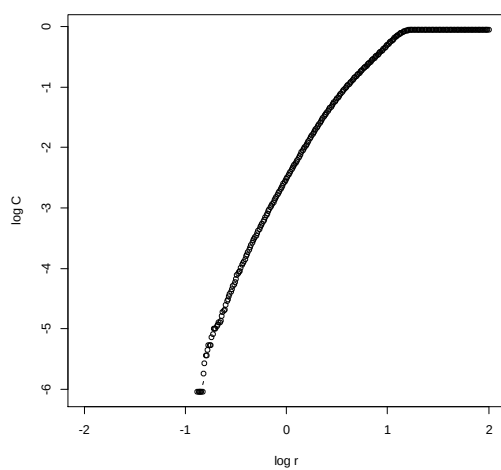
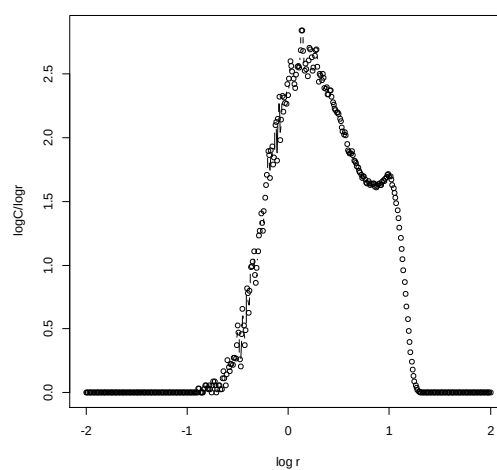
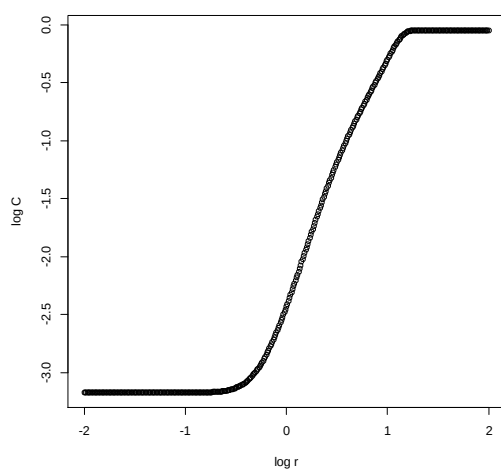
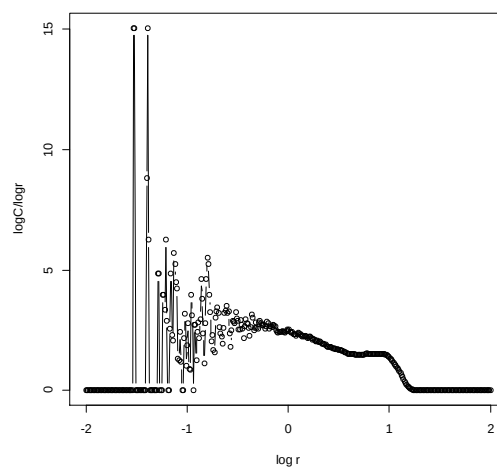
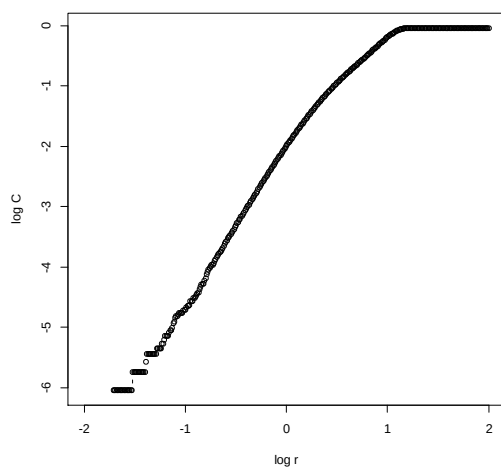


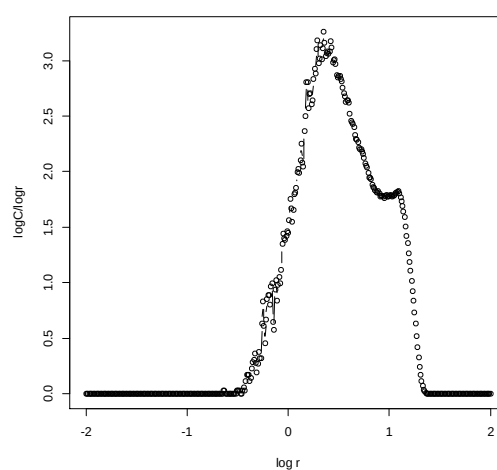
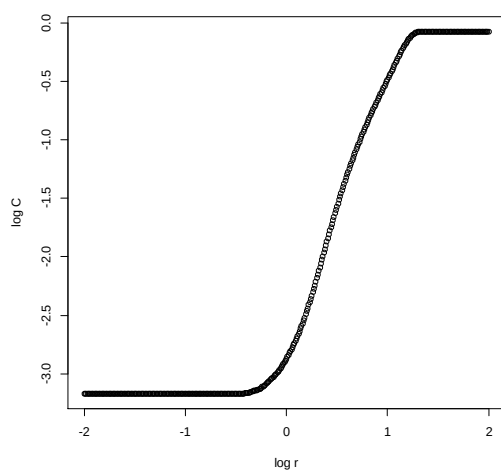
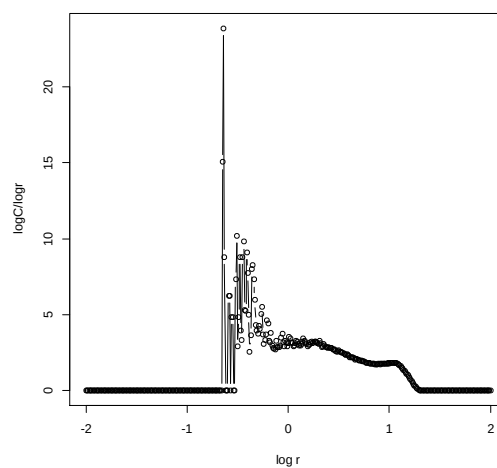
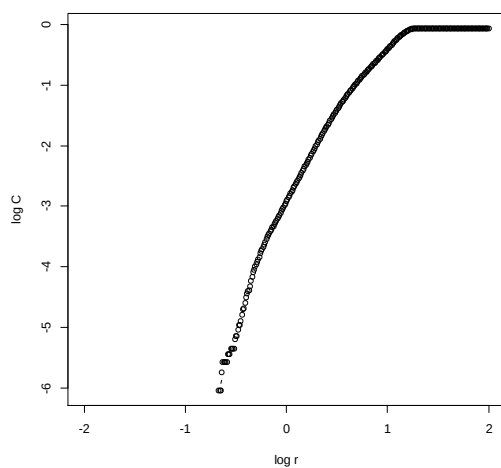
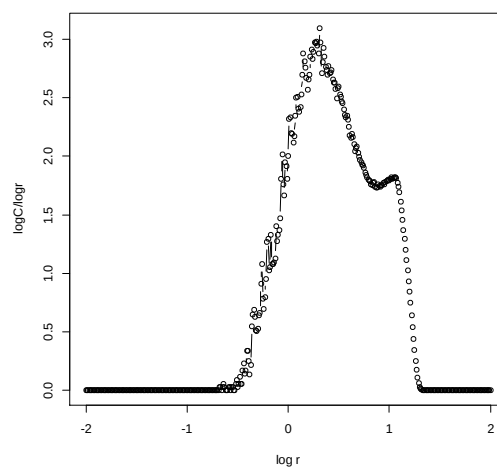
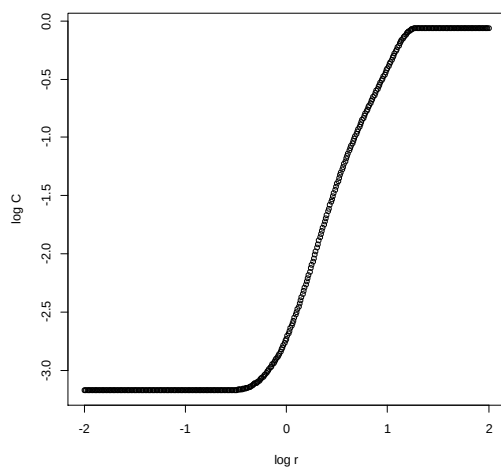


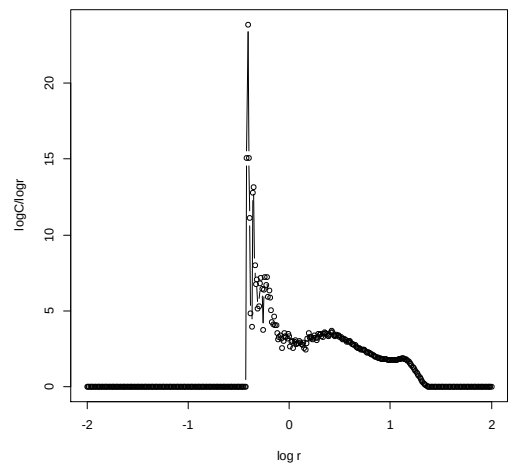
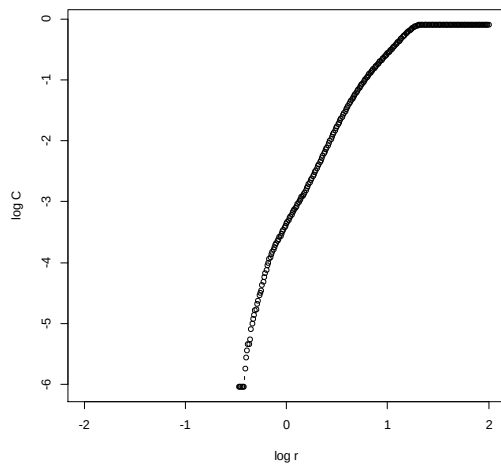
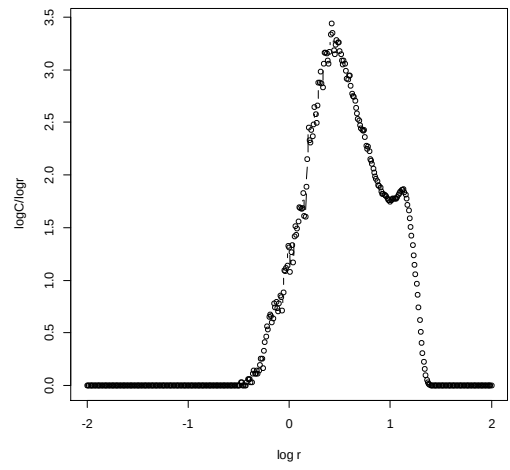
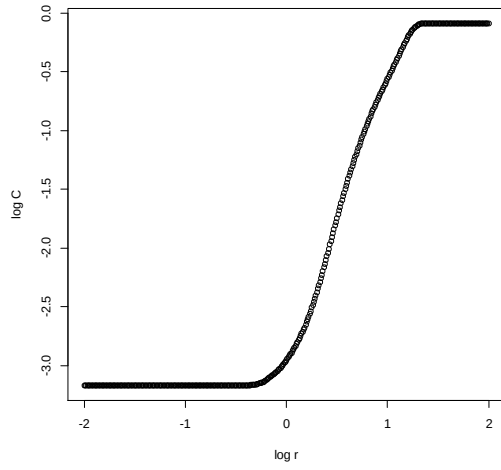
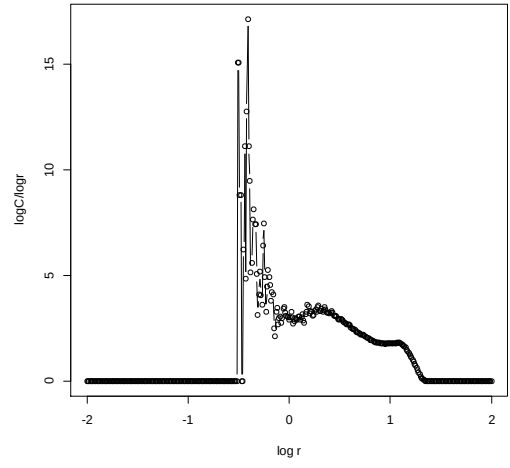
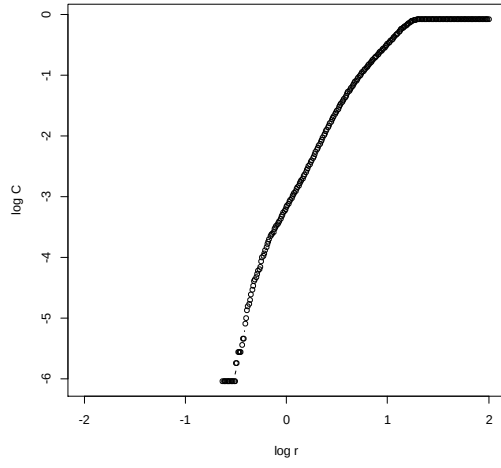


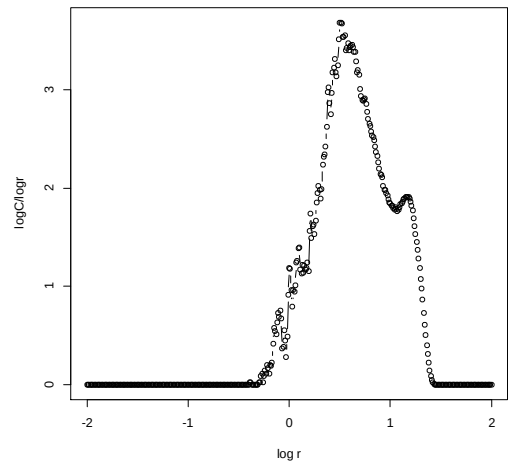
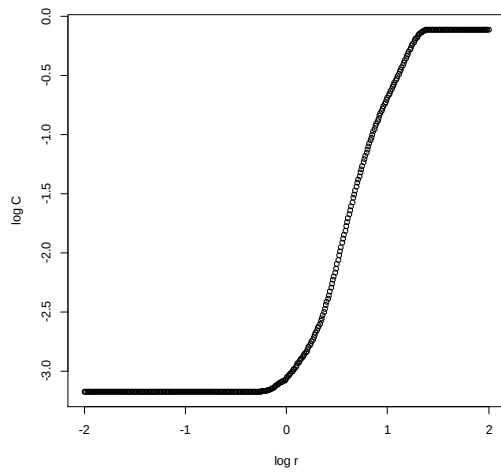
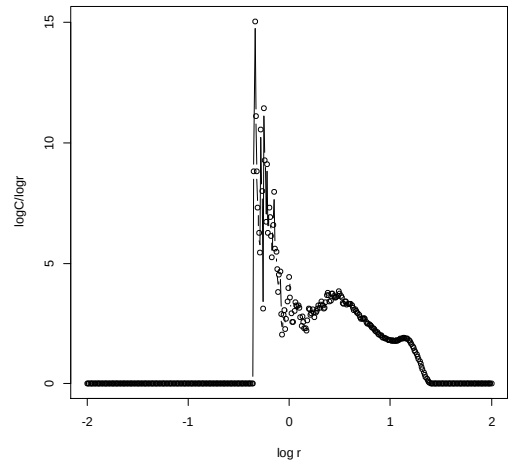
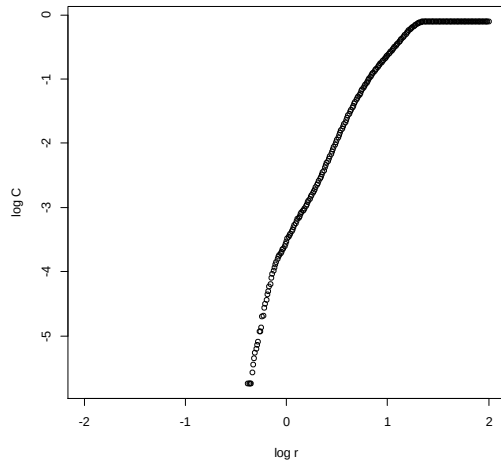
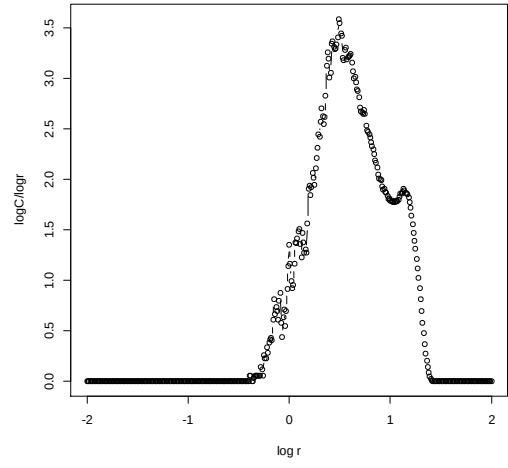
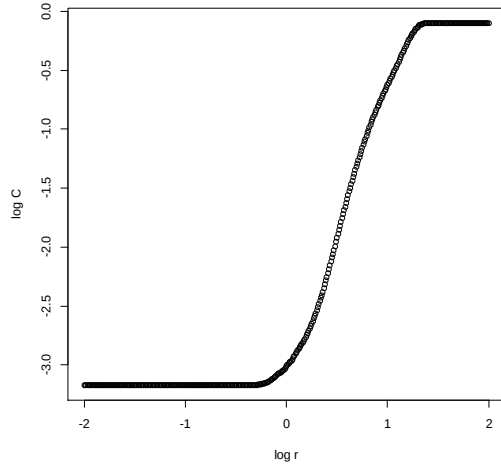


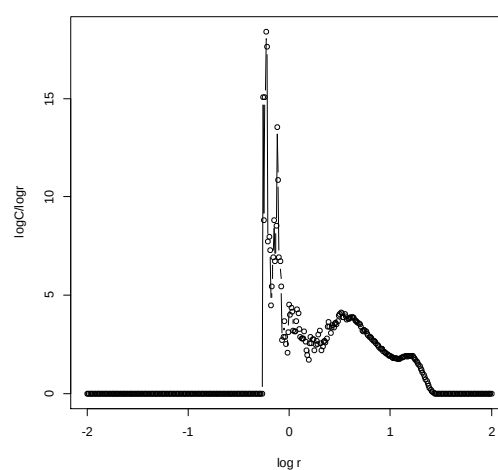
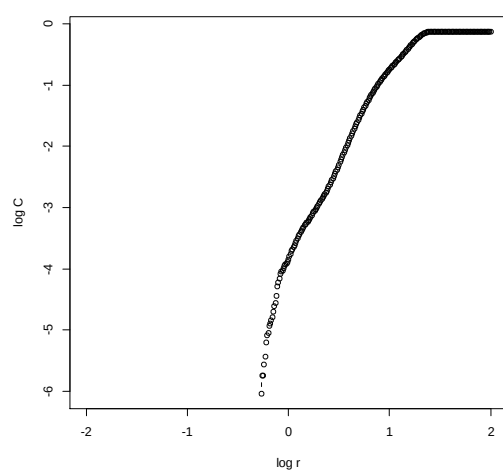
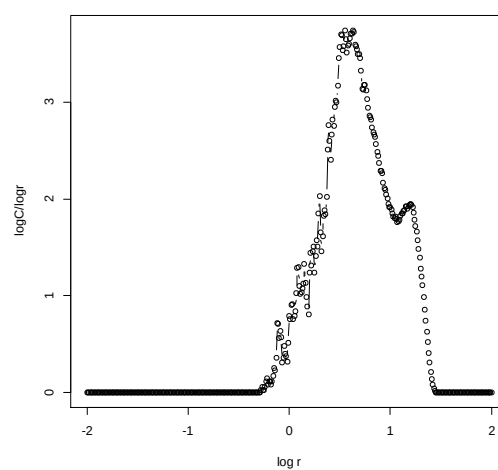
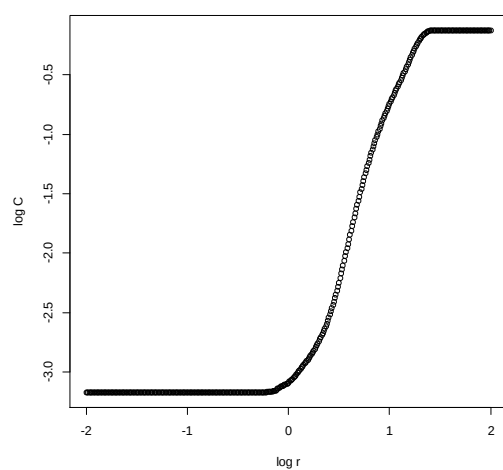
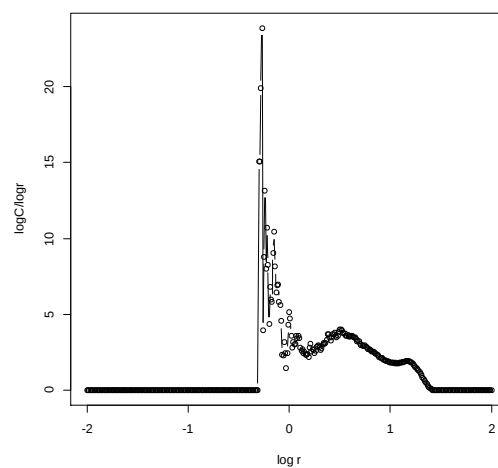
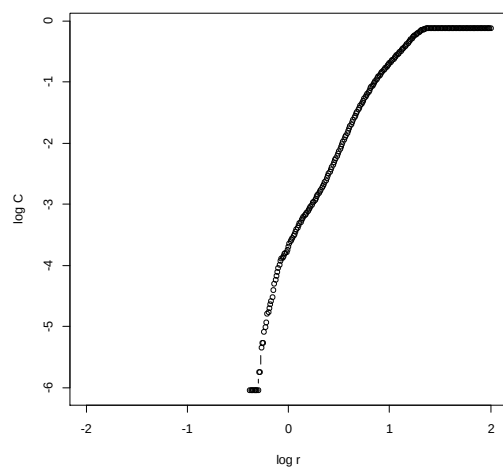
T40 mai/01

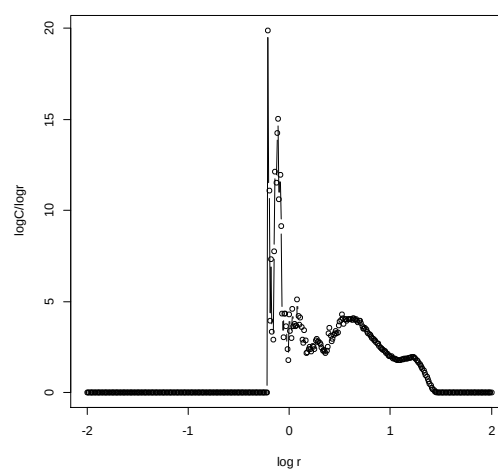
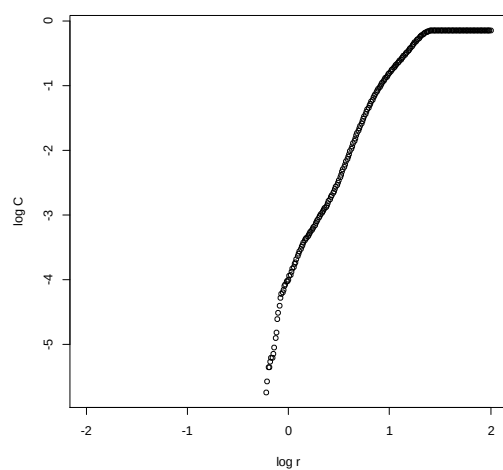
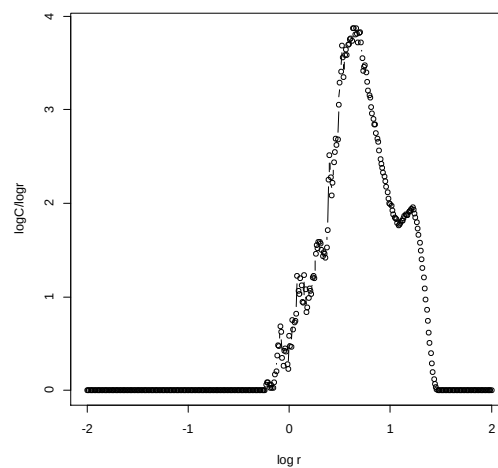
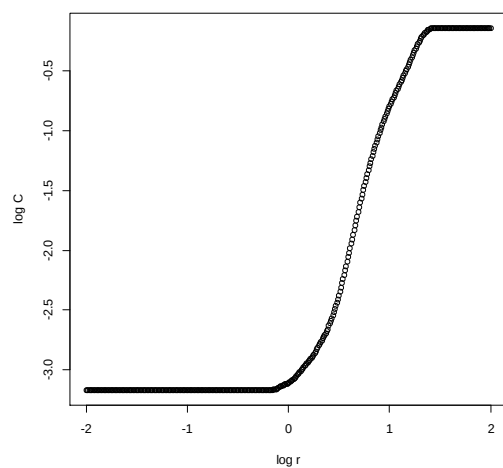


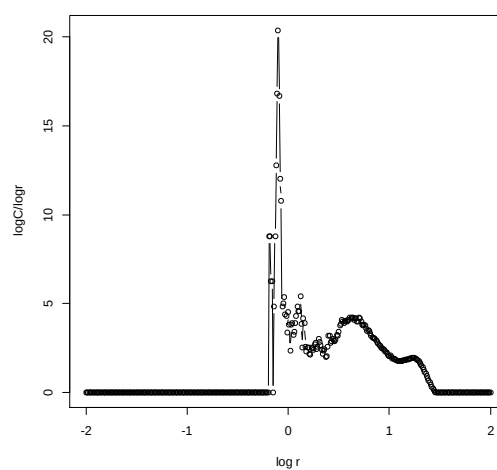
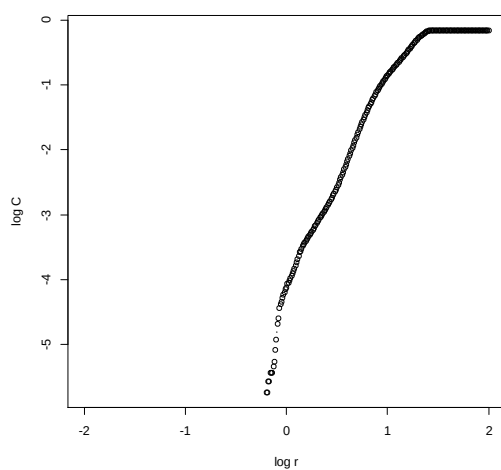
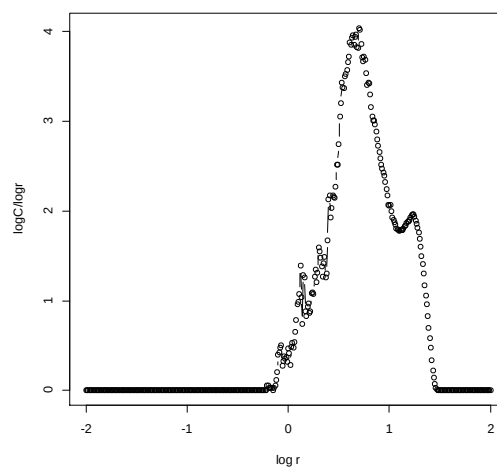
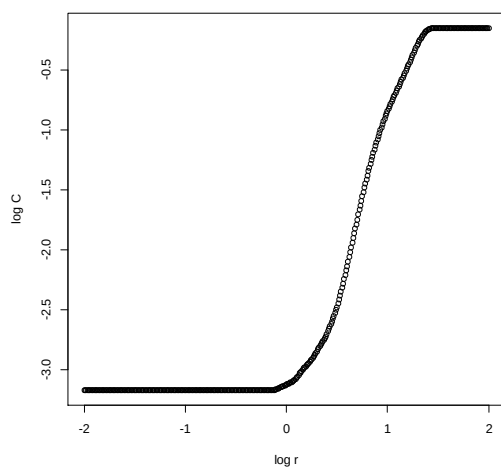




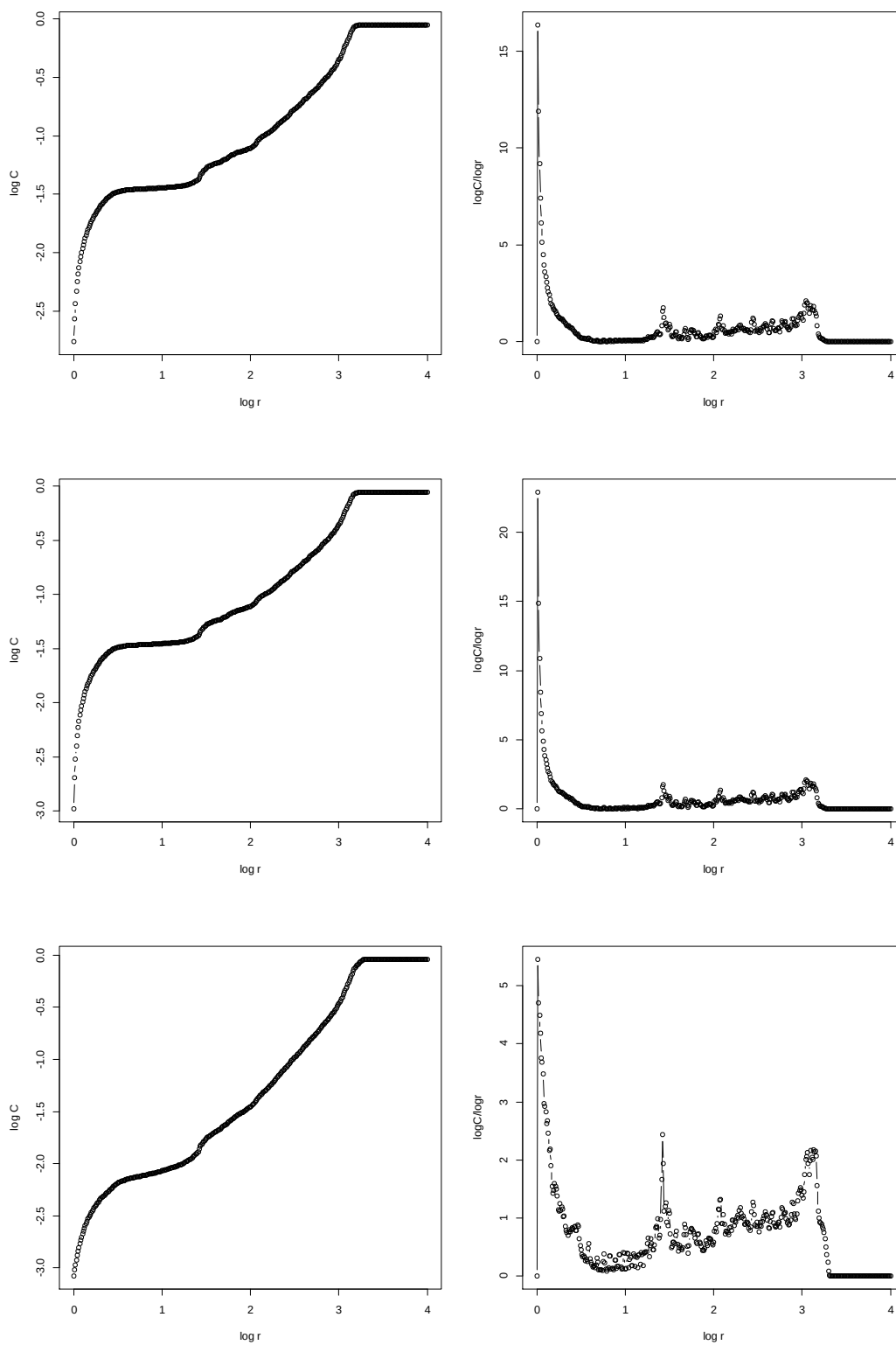


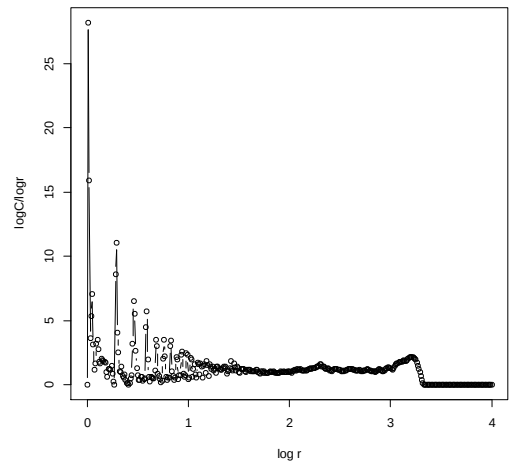
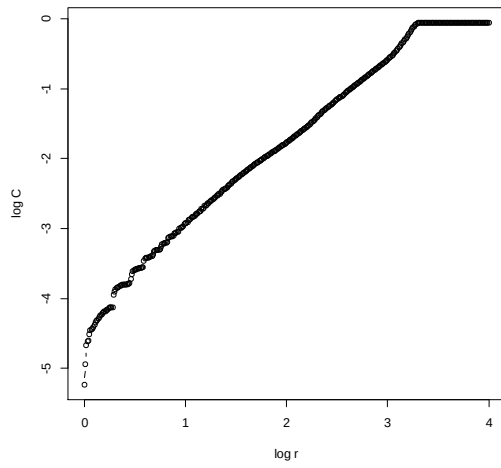
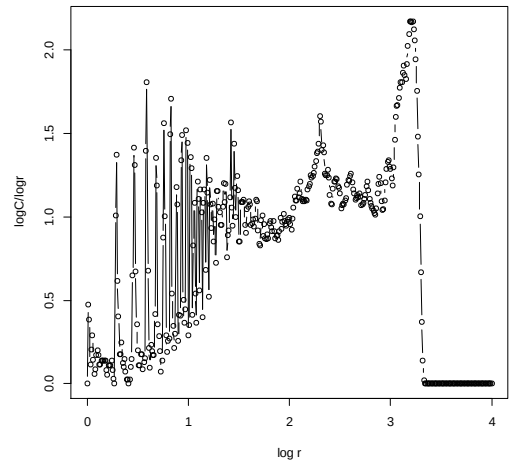
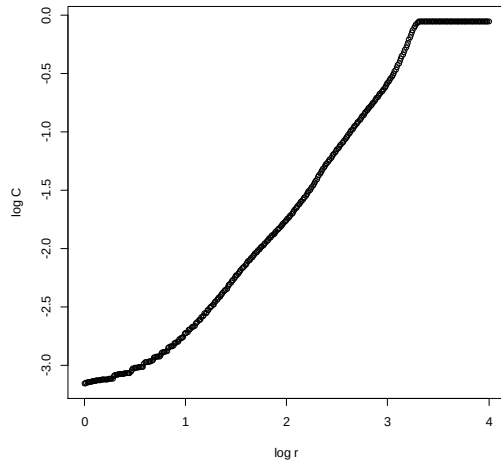
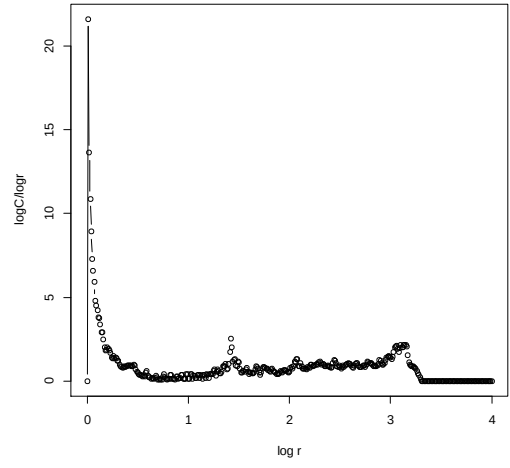
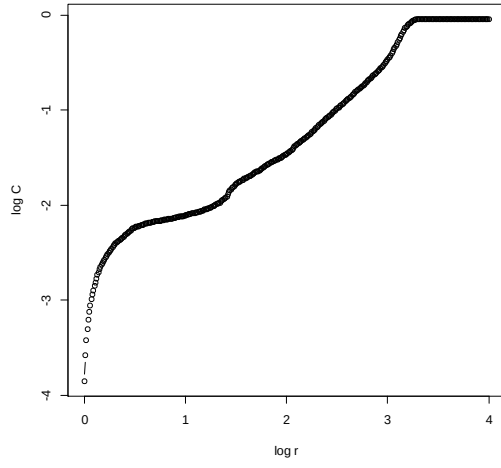


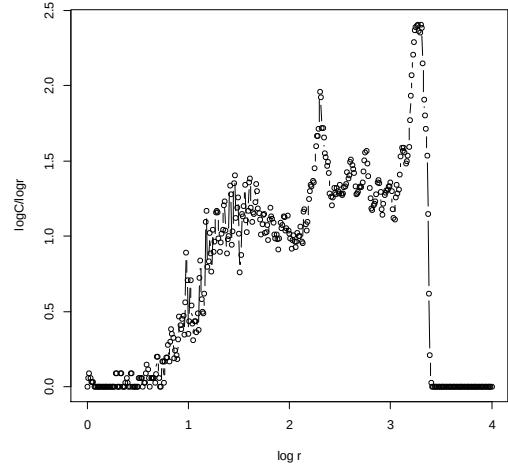
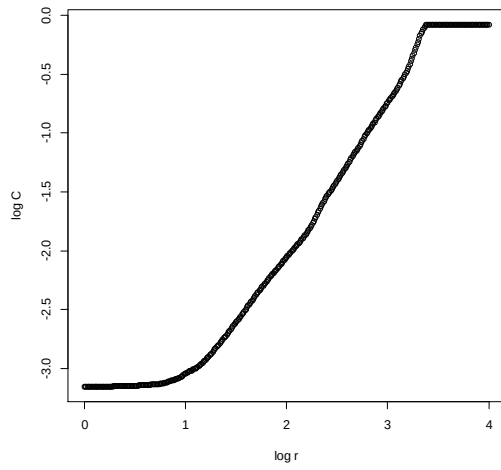
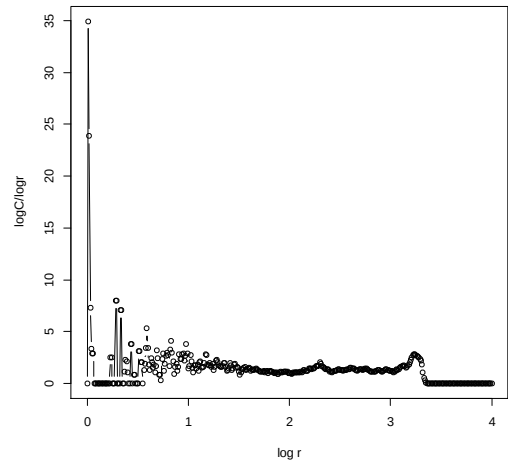
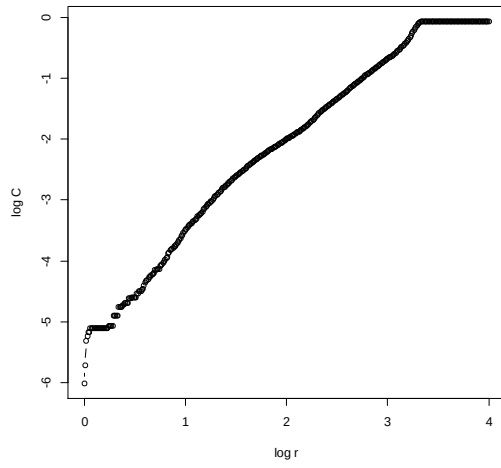
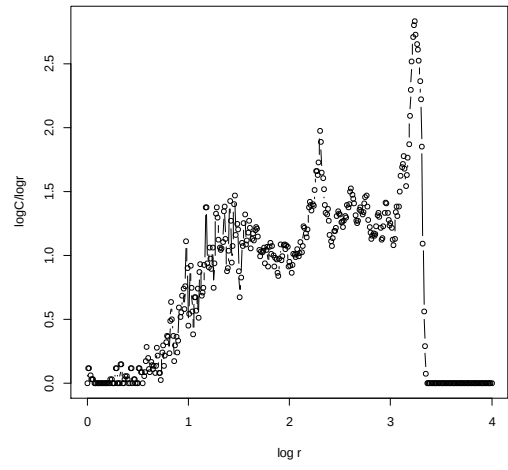
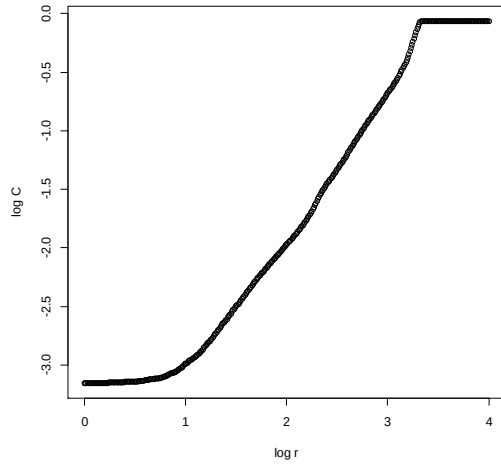


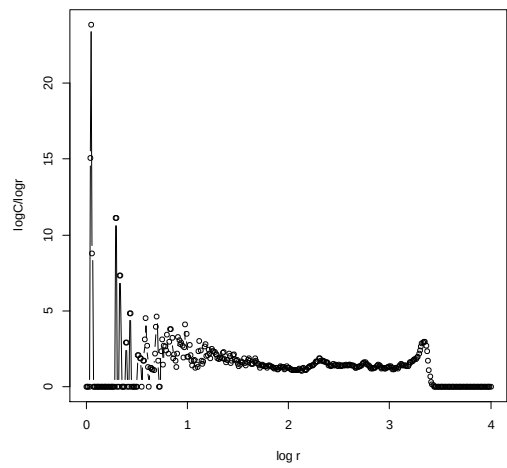
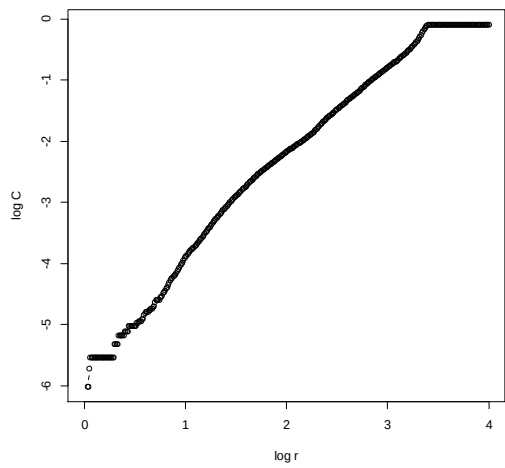
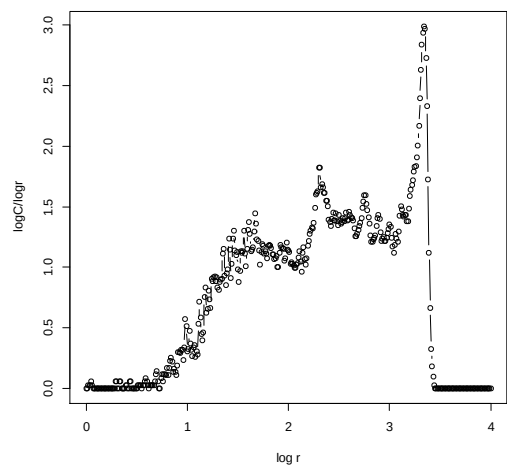
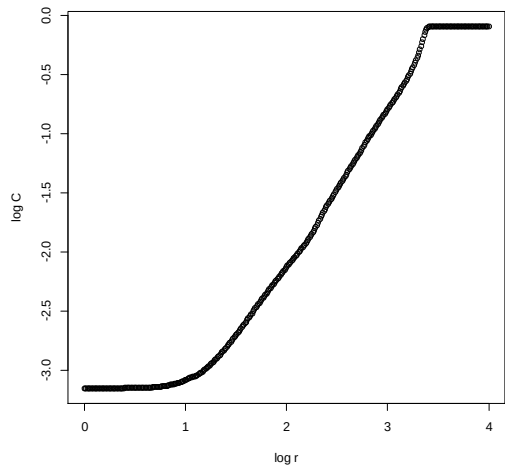
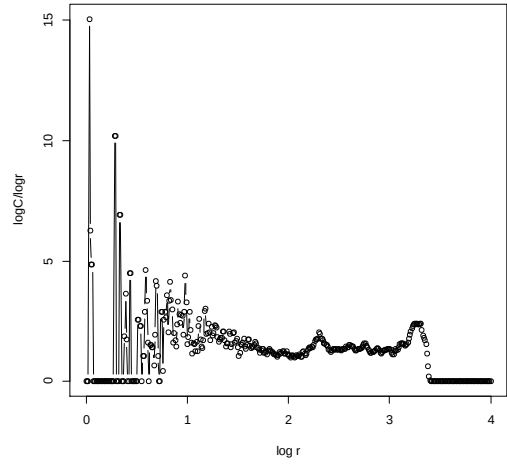
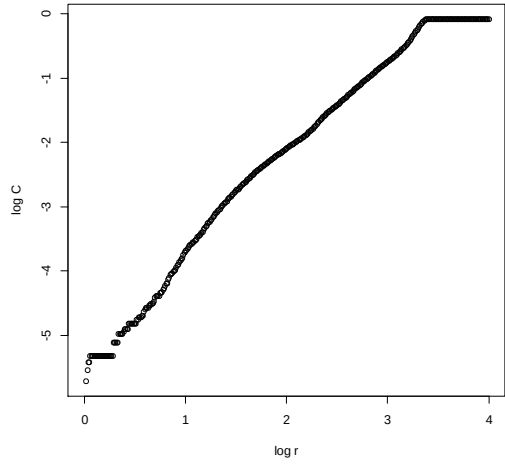


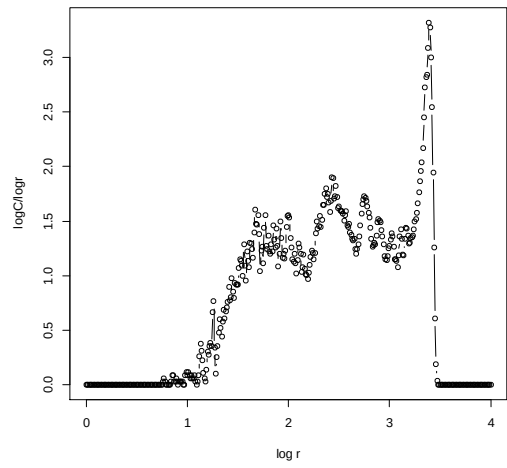
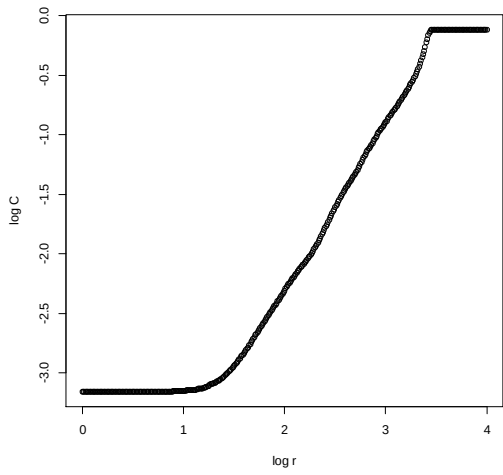
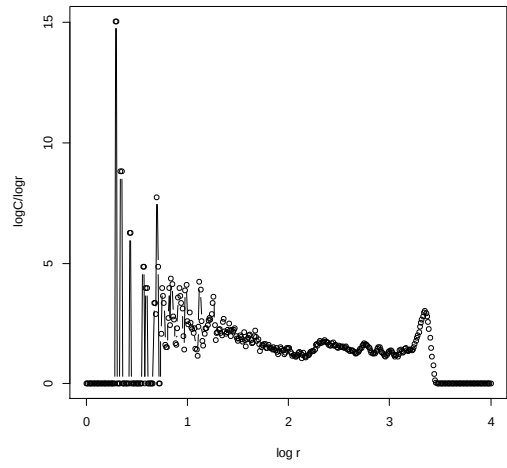
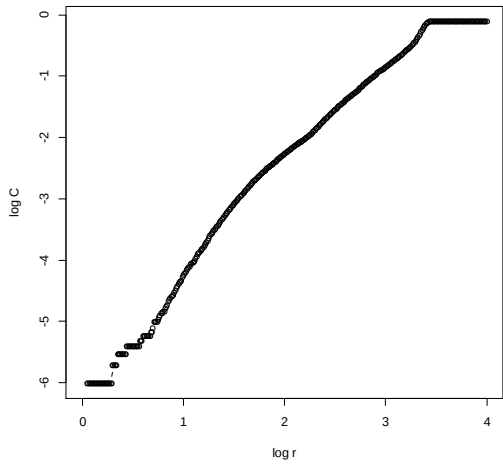
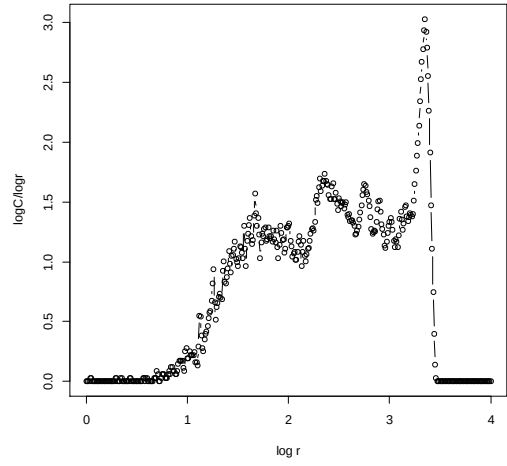
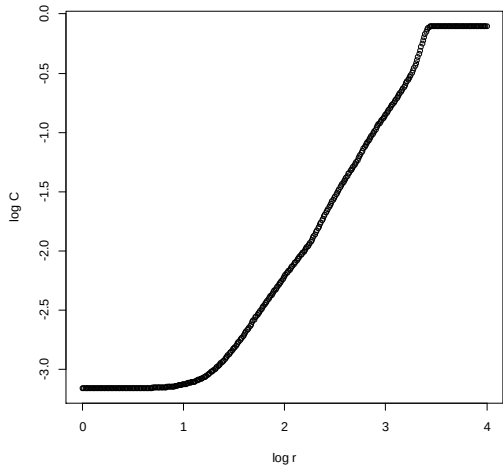
PARI jun/02

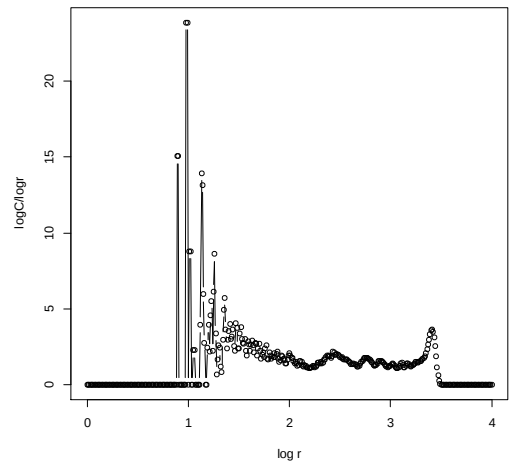
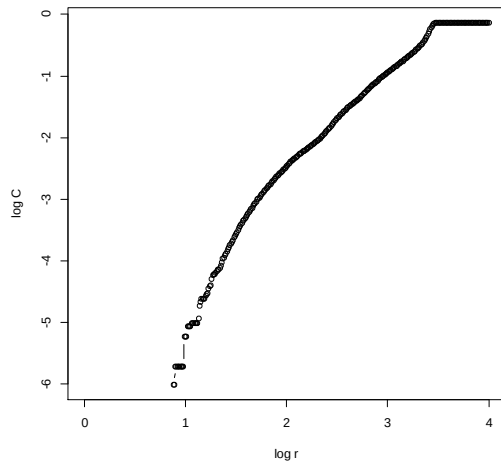
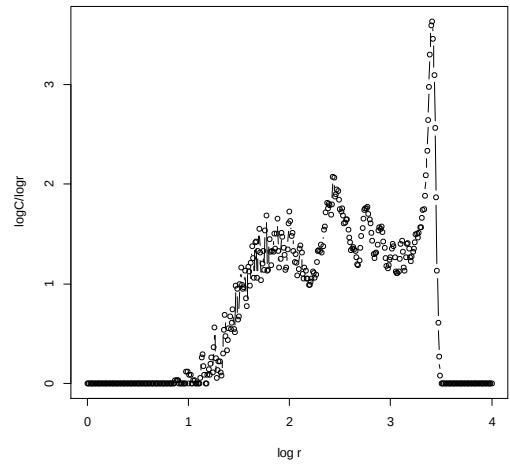
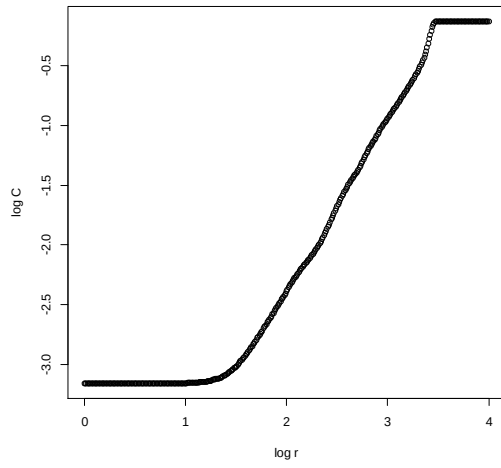
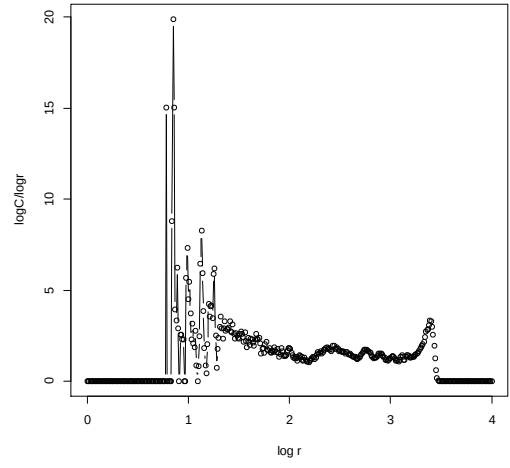
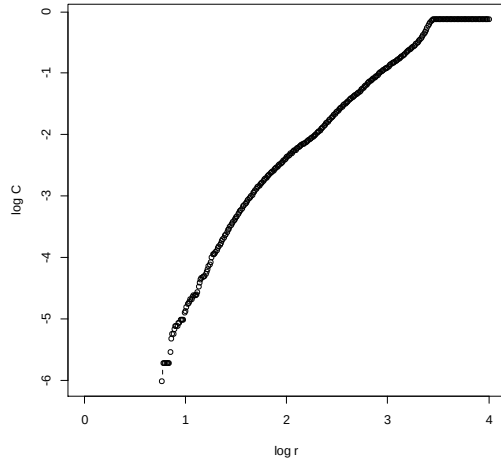


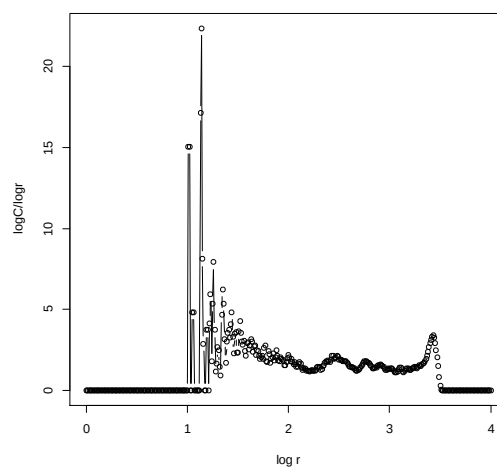
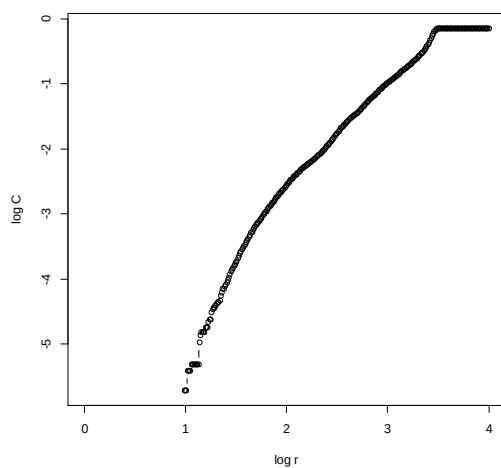
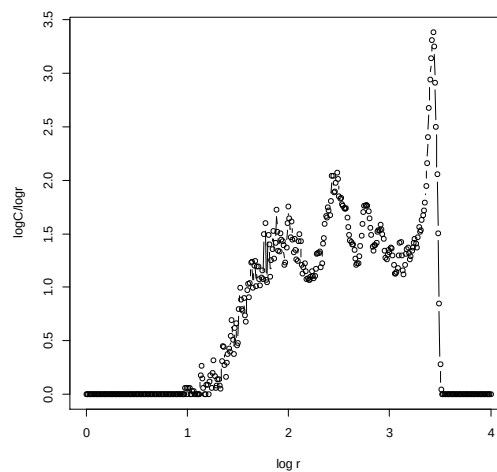
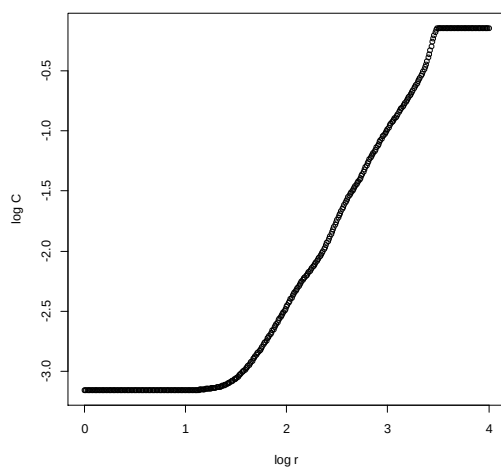


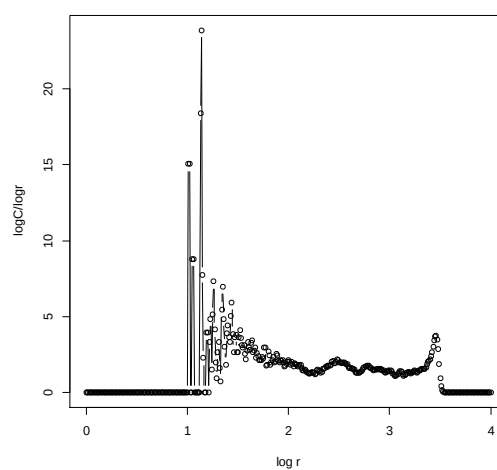
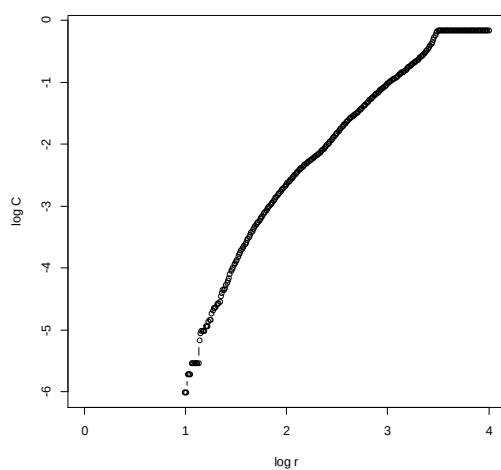
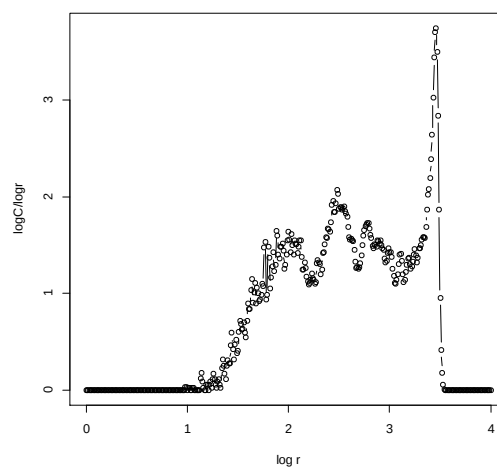
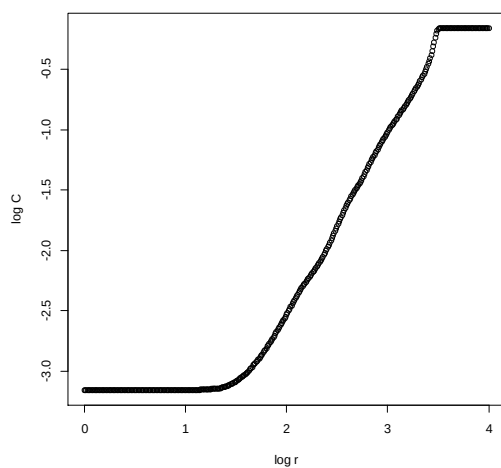




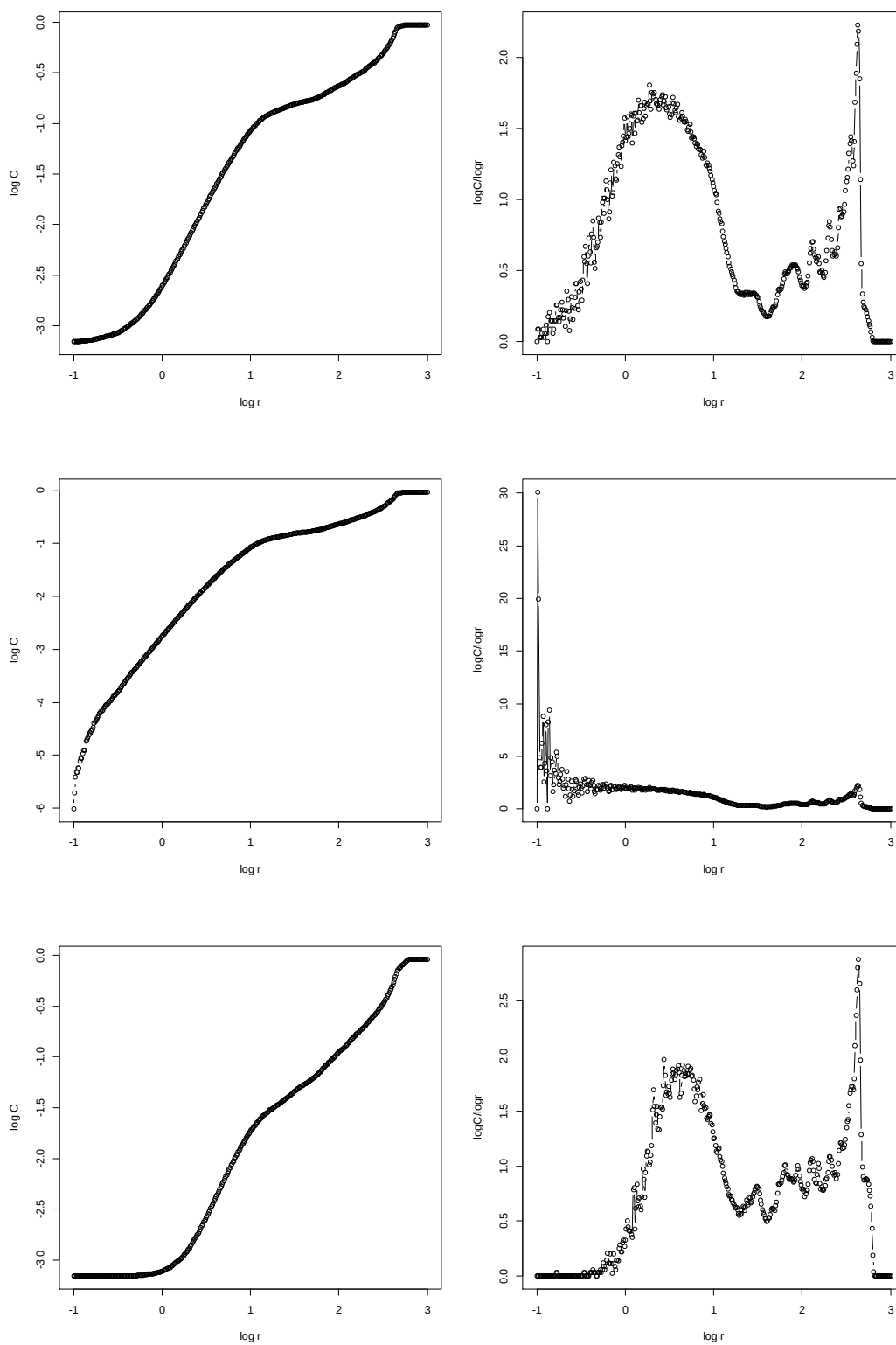


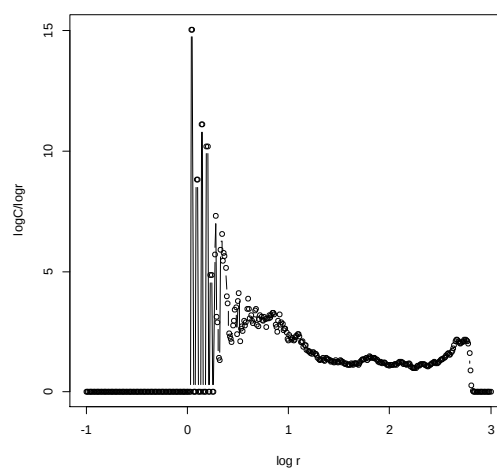
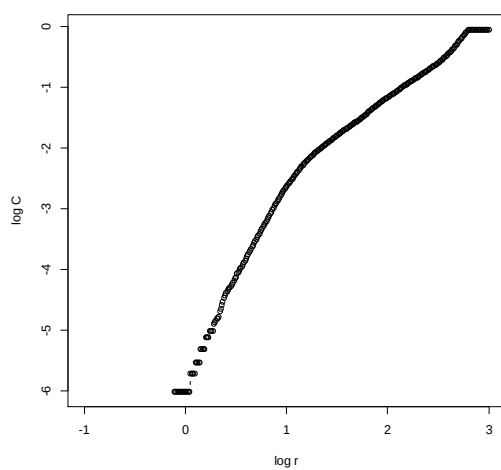
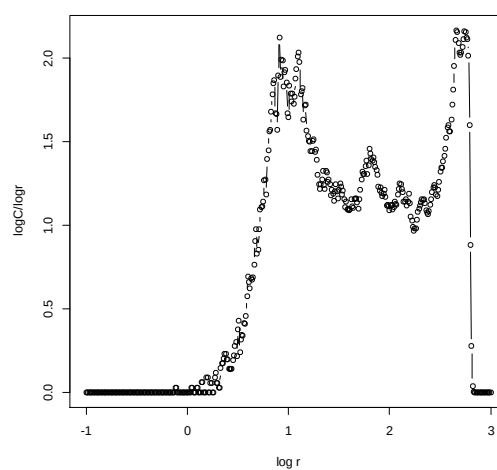
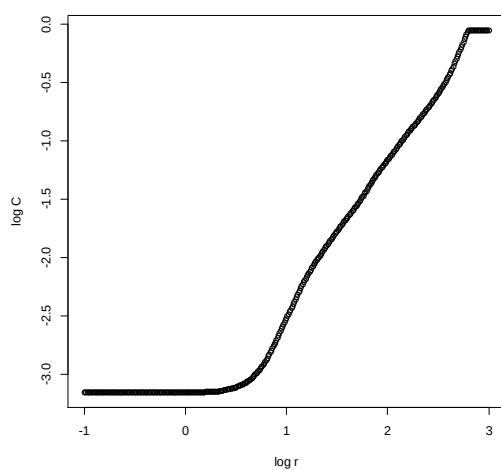
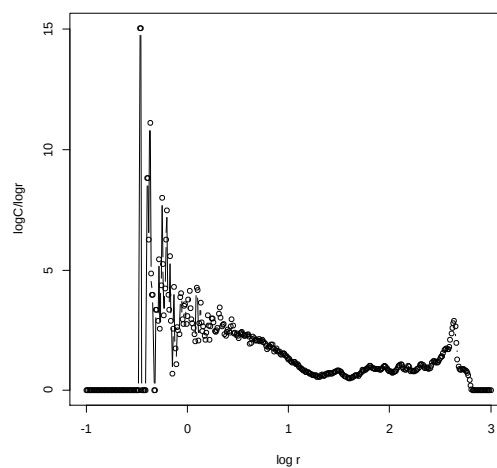
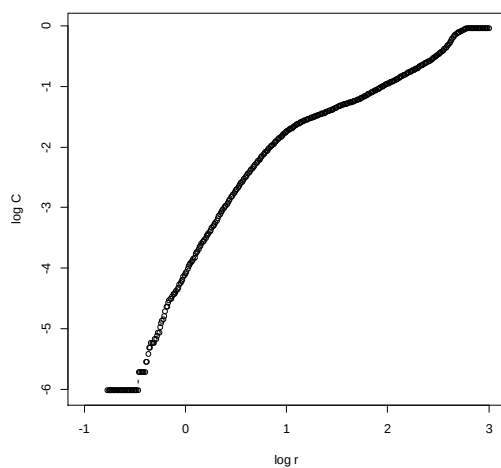


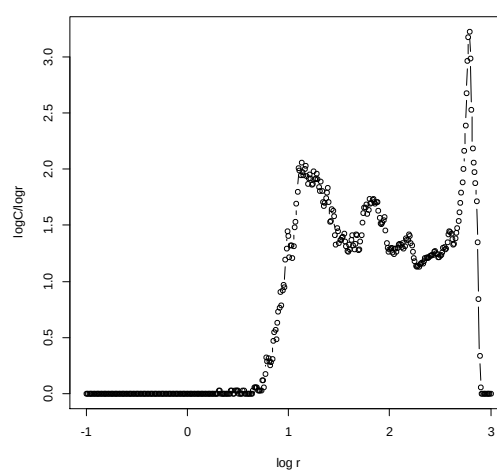
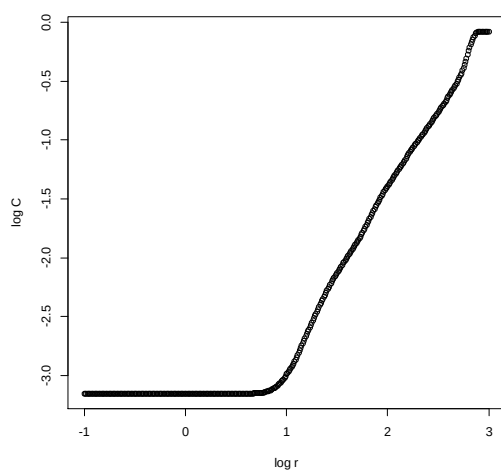
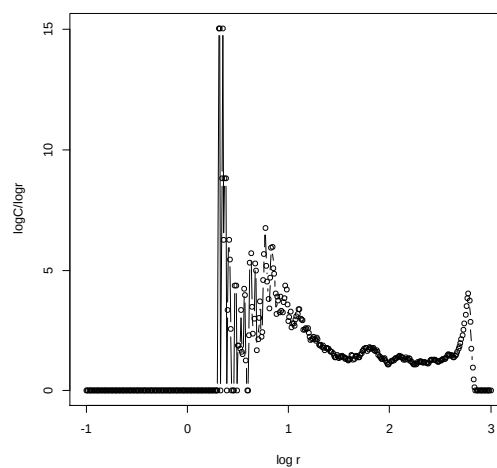
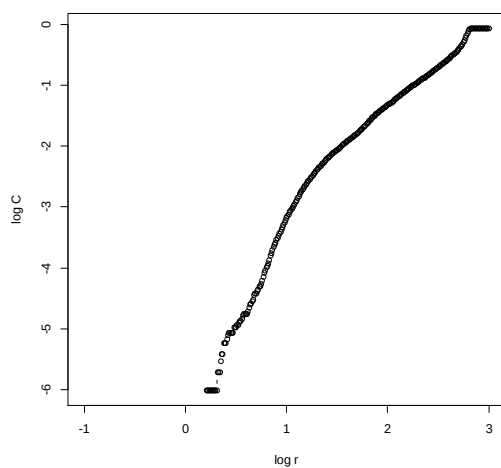
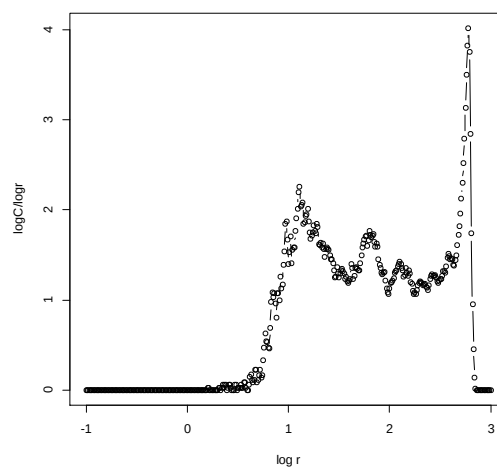
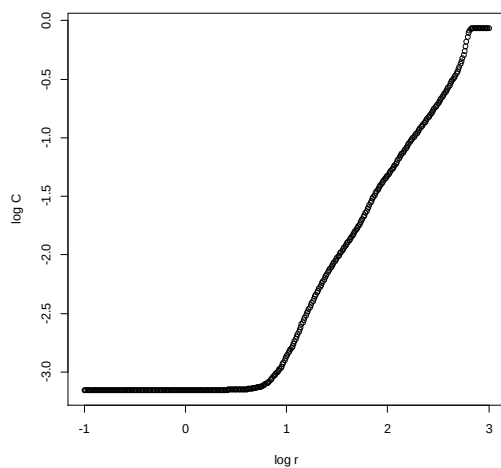


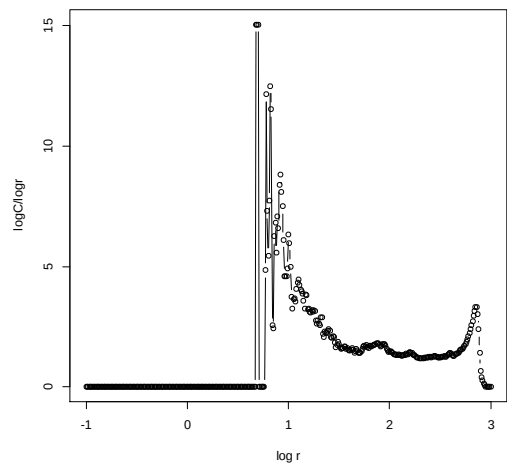
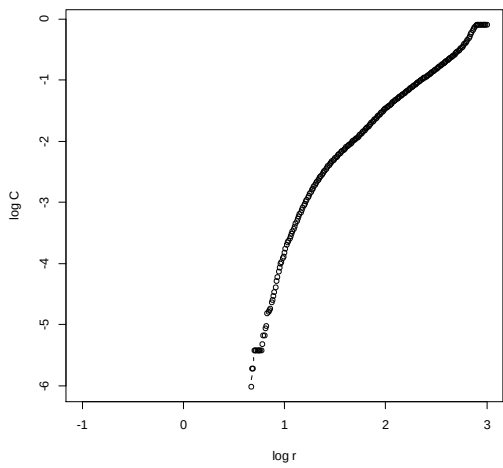
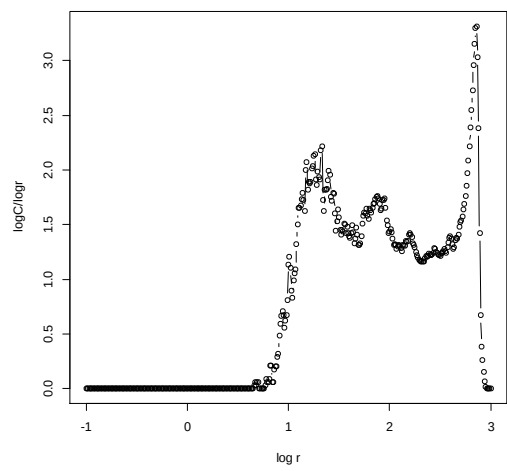
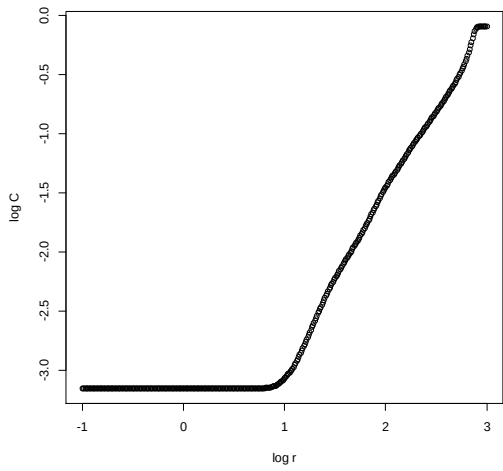
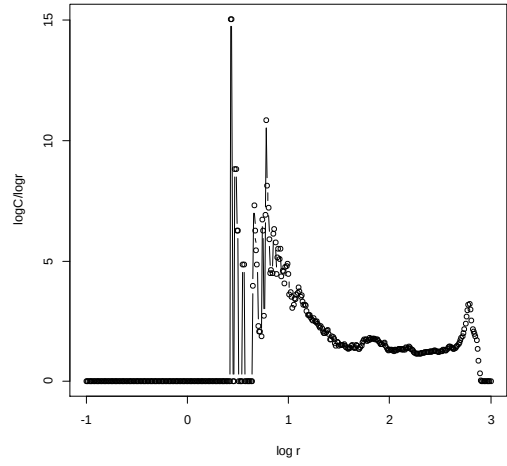
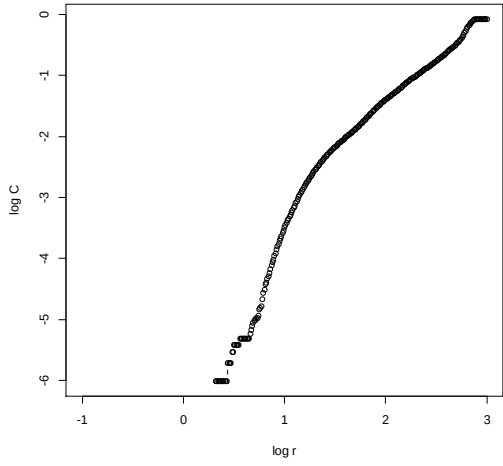


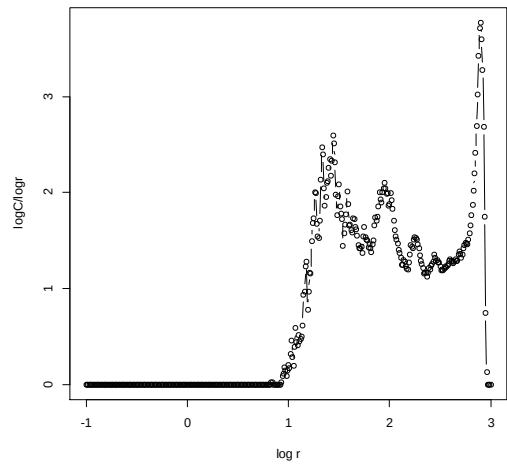
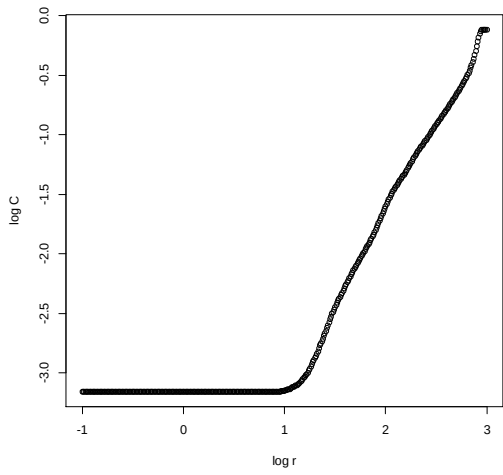
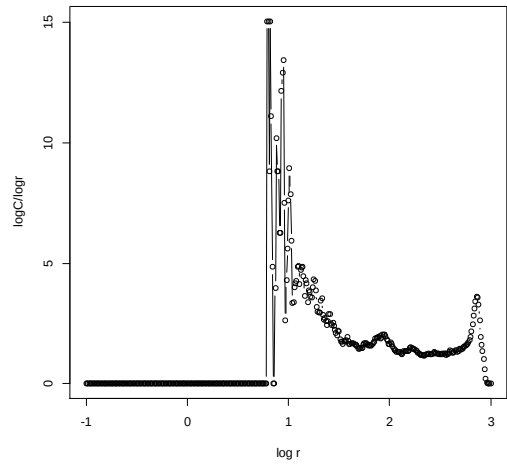
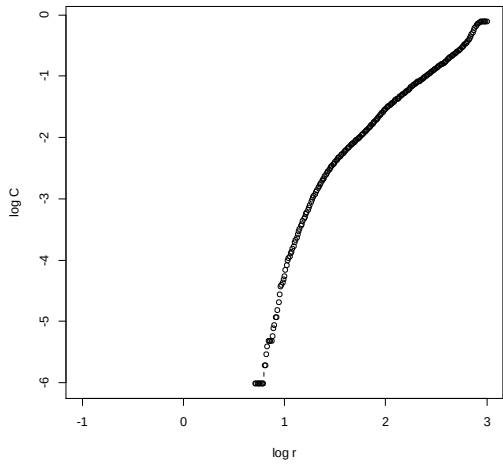
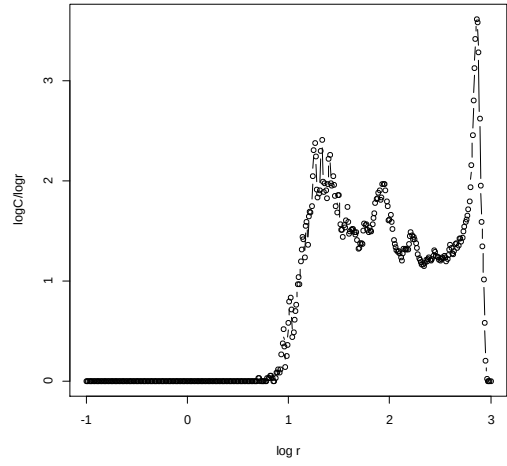
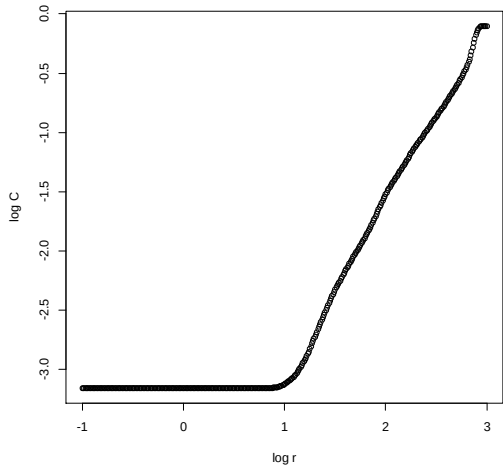
Rn jun/02

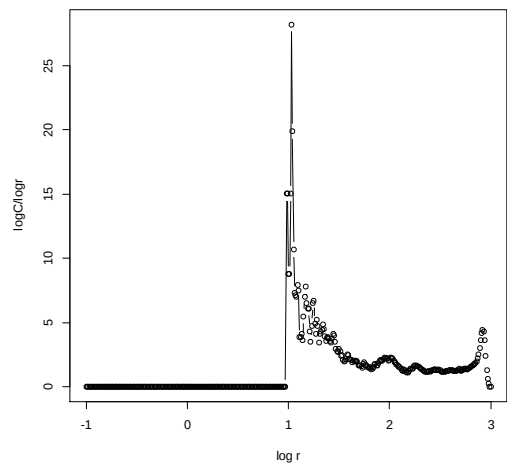
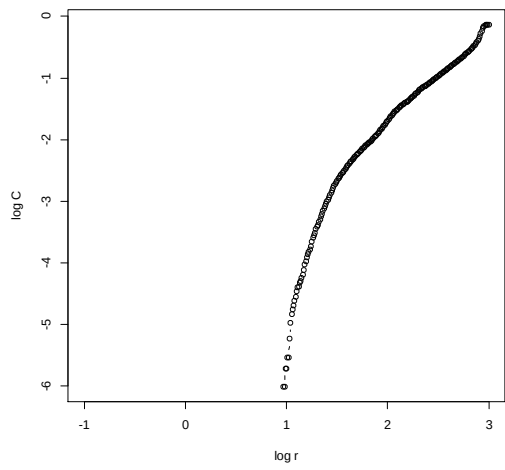
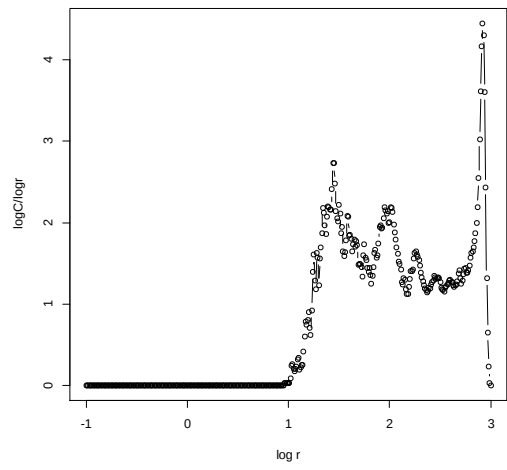
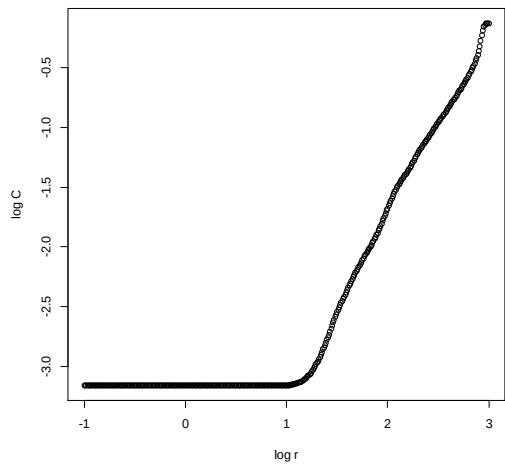
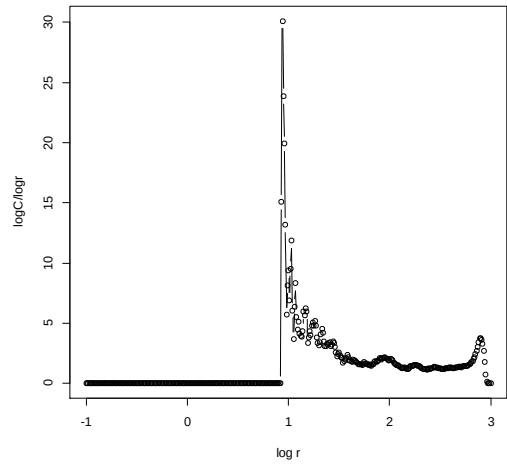
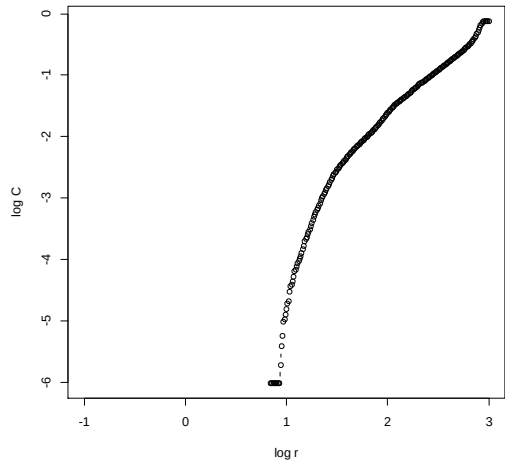


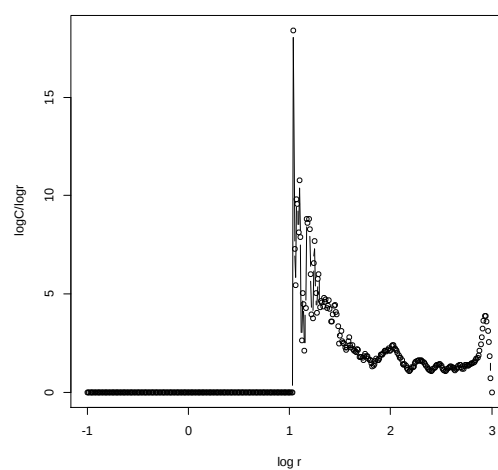
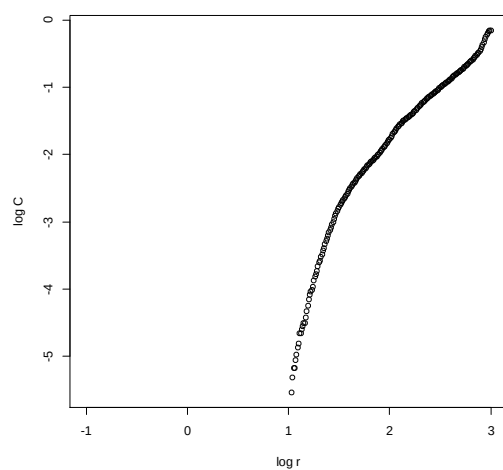
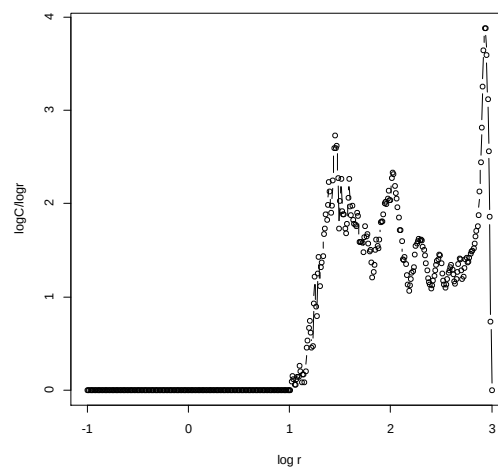
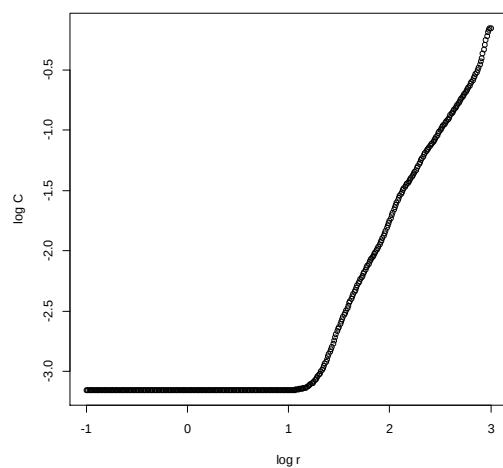


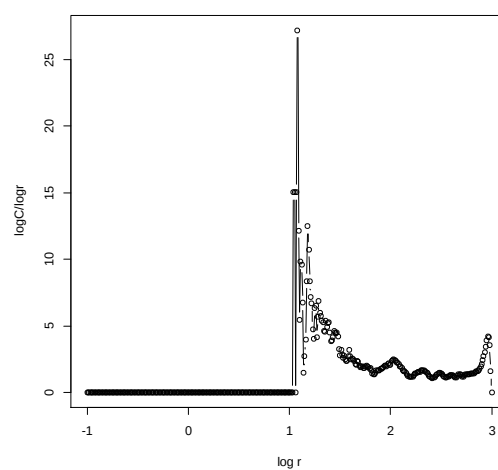
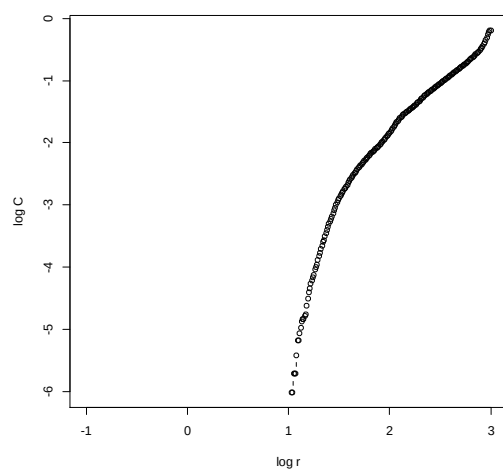
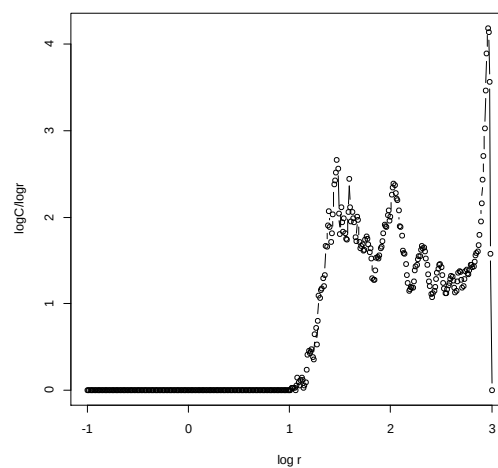
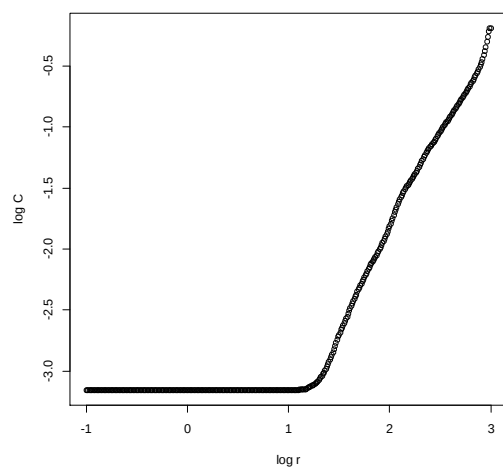




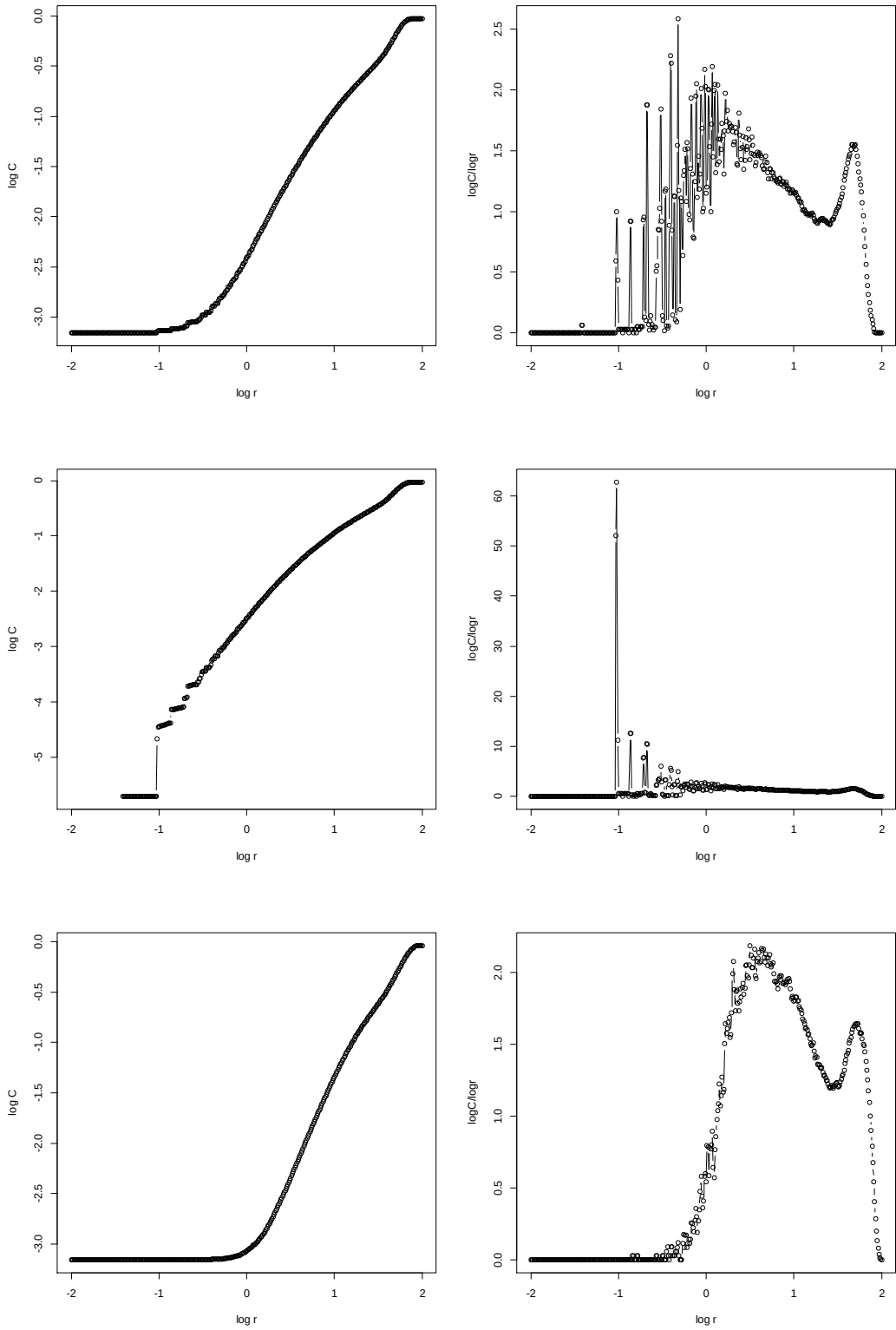


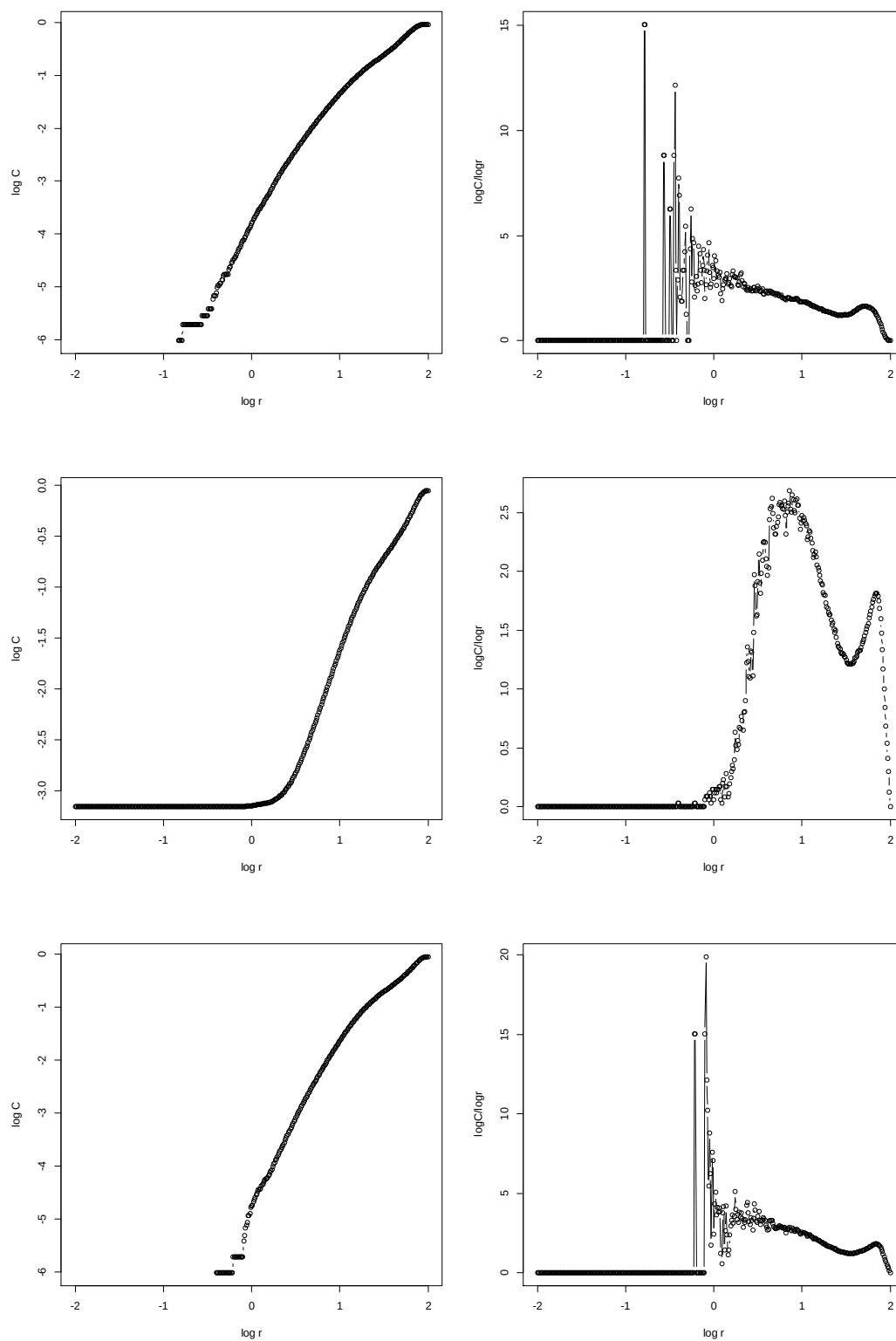


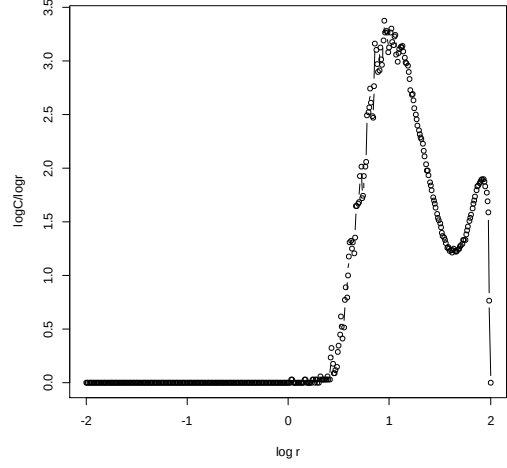
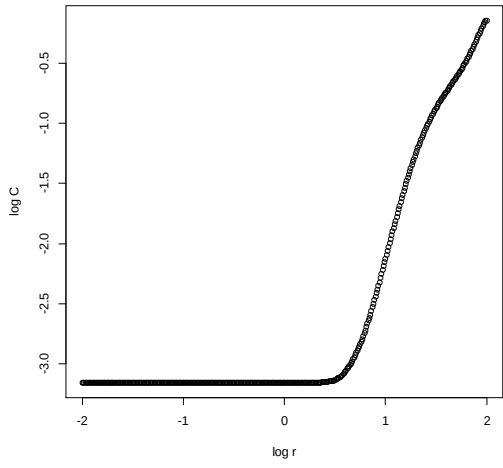
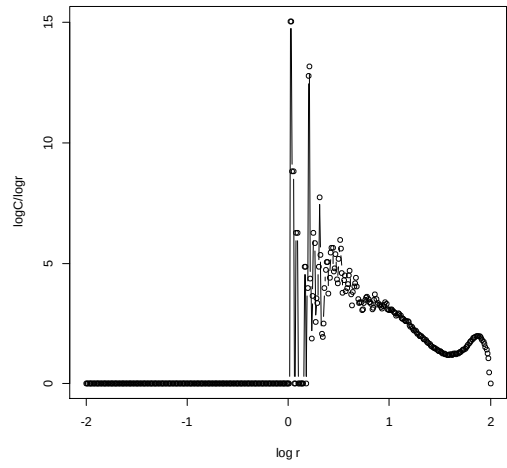
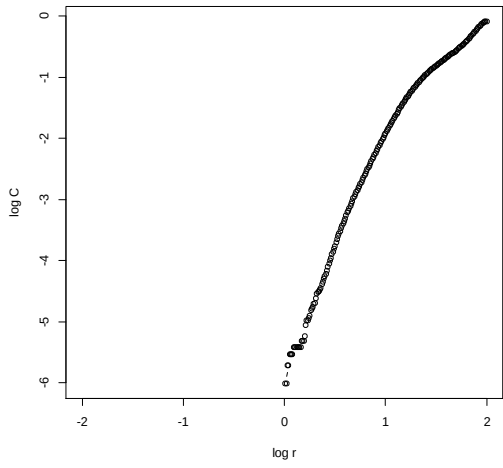
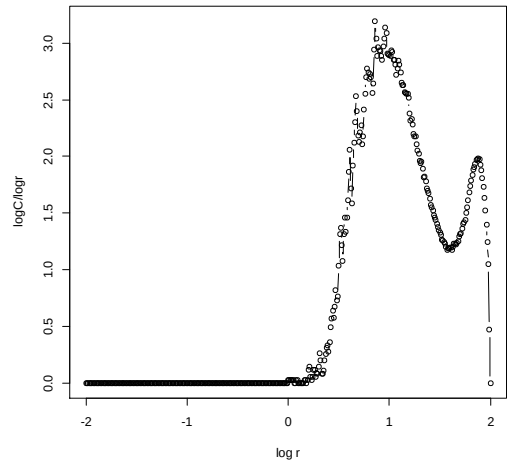
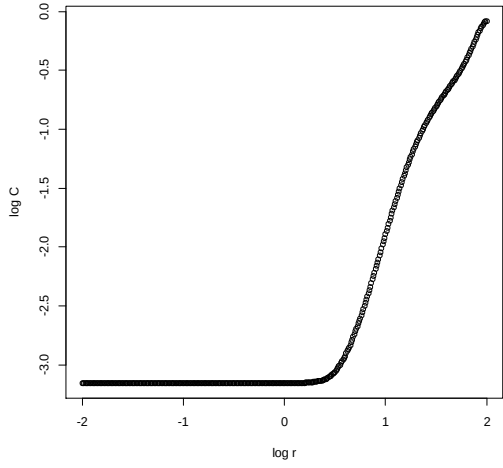


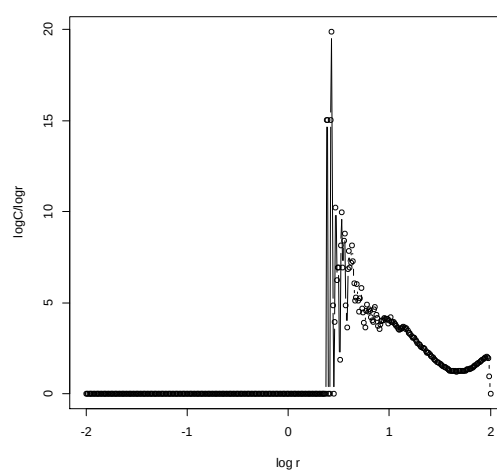
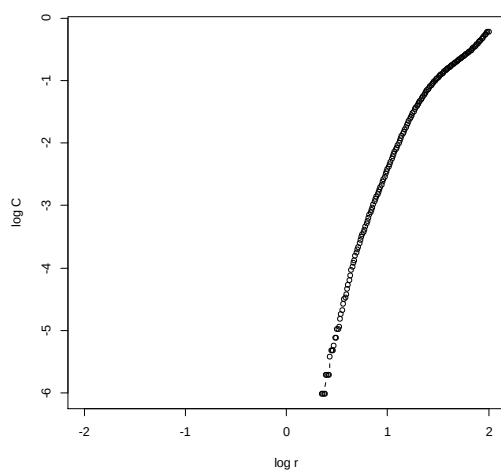
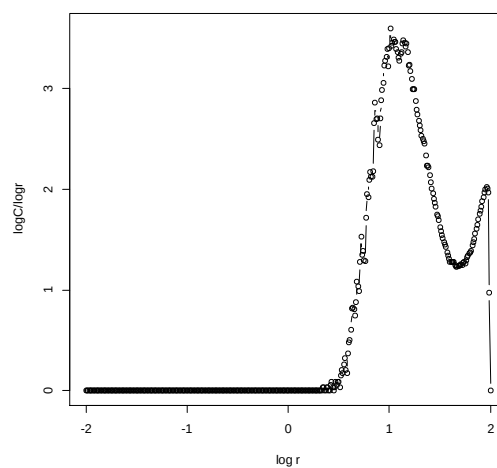
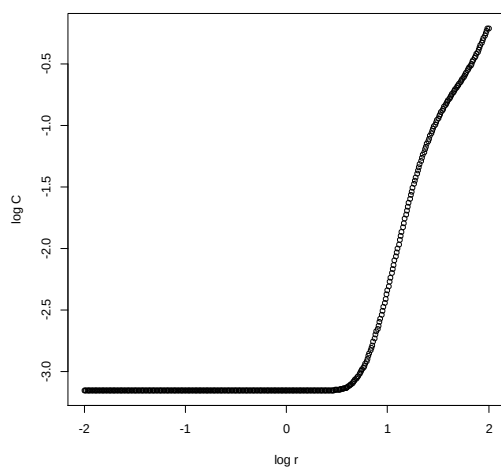
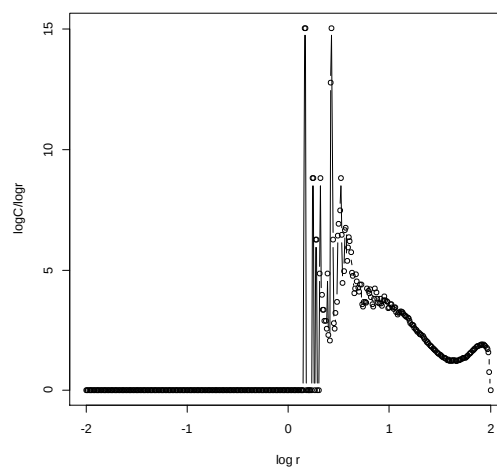
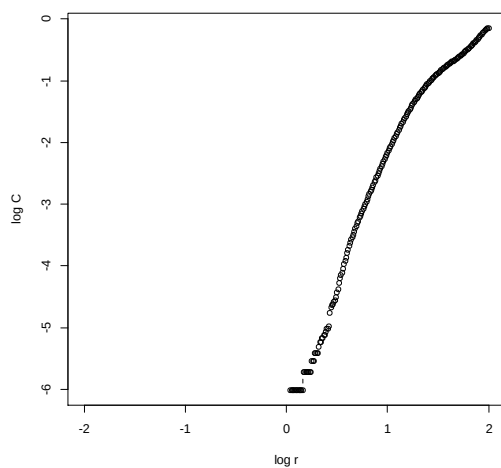


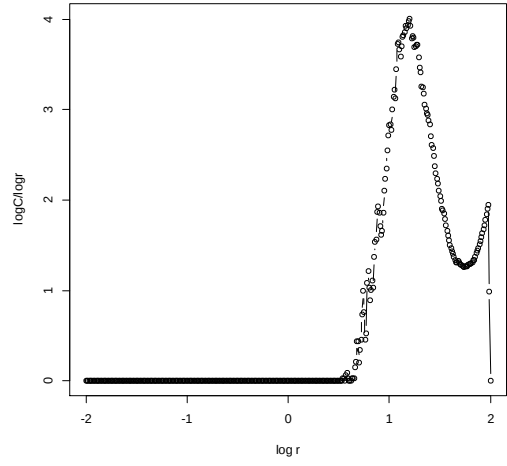
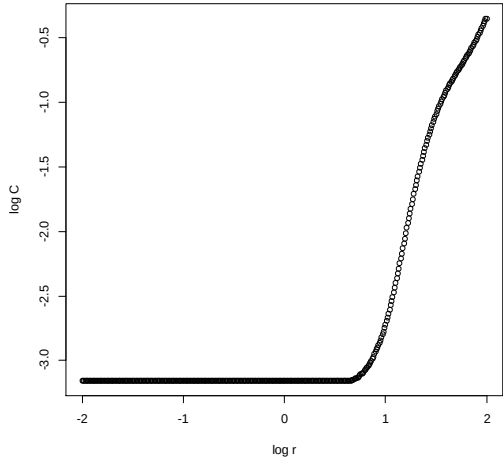
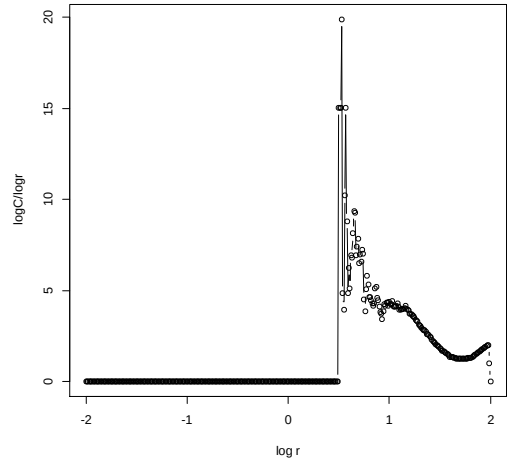
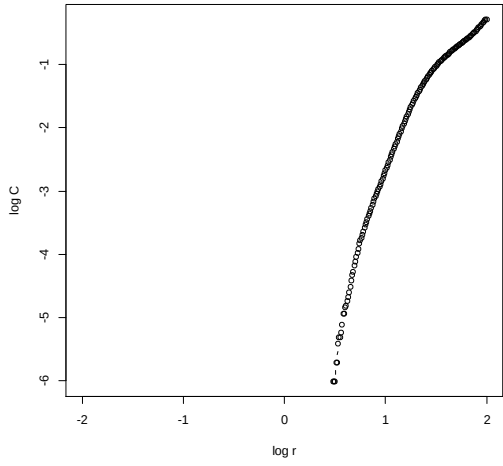
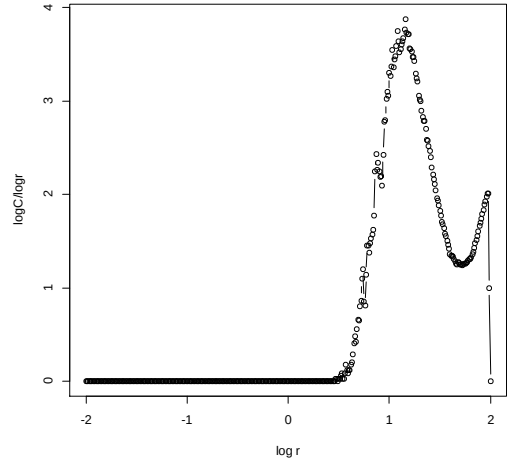
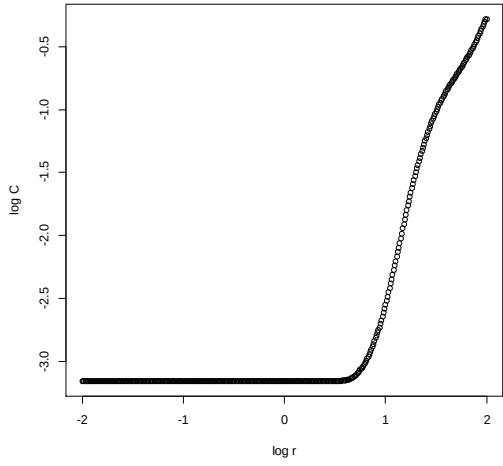
RH jun/02

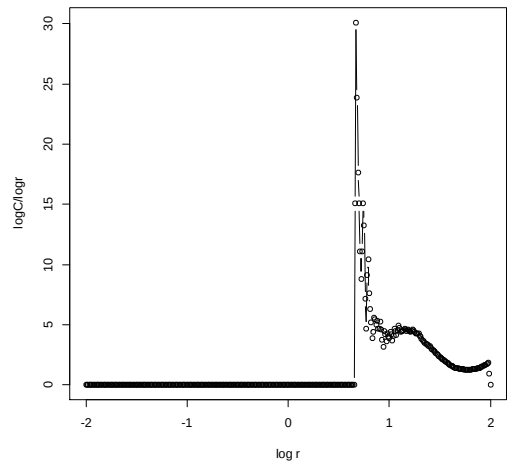
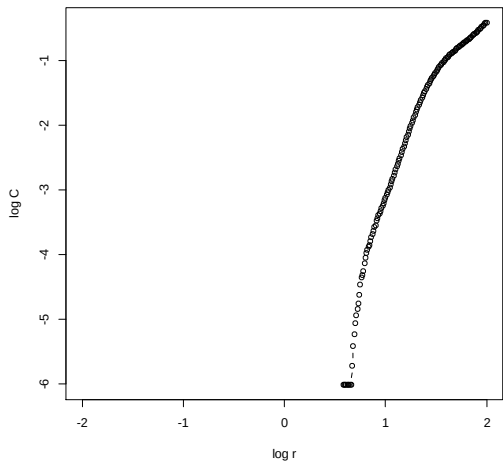
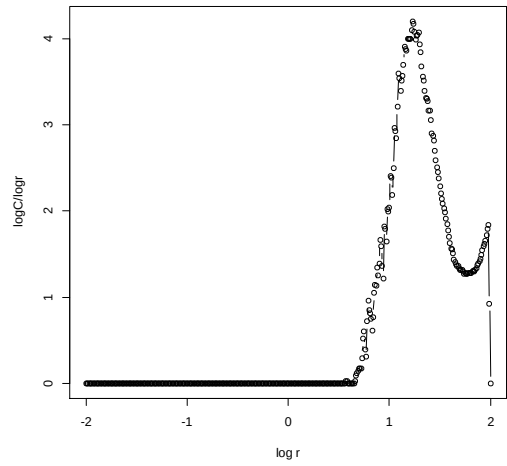
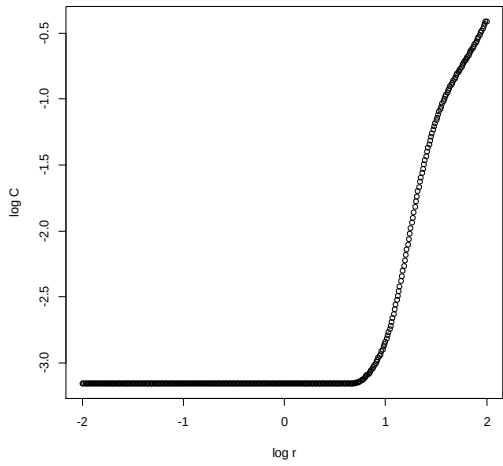
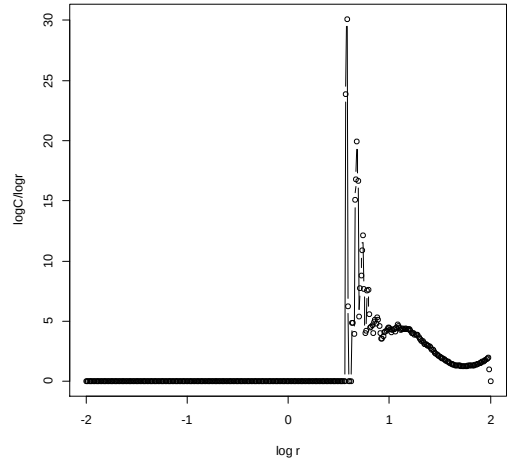
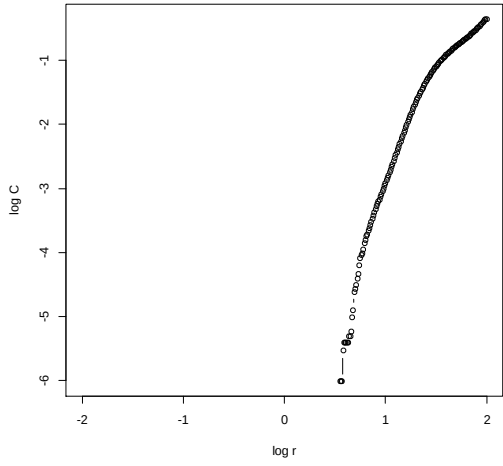


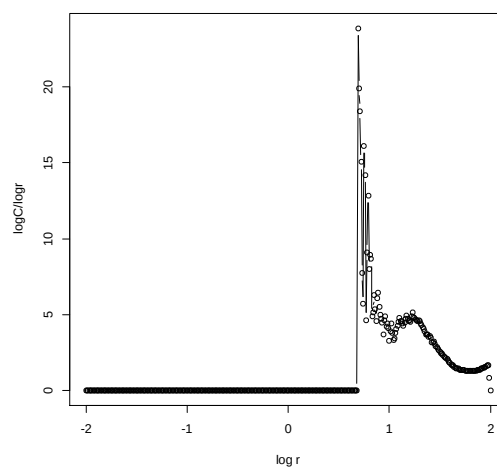
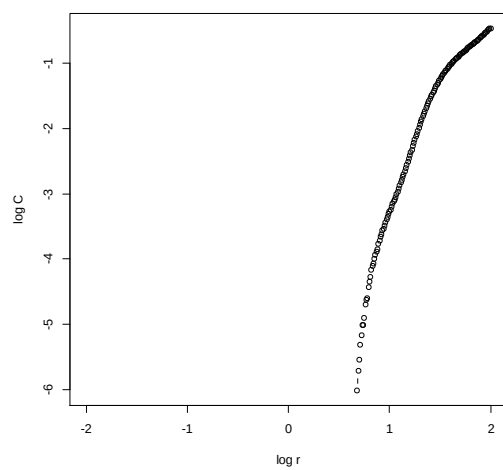
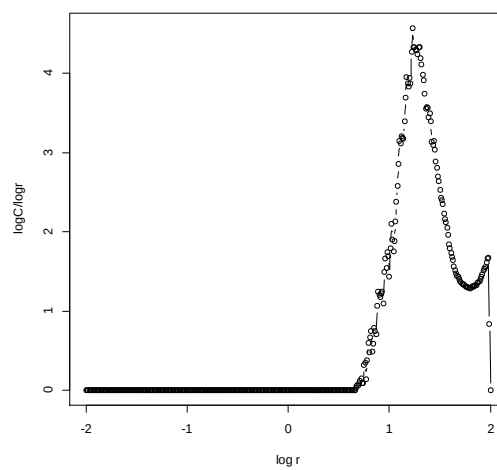
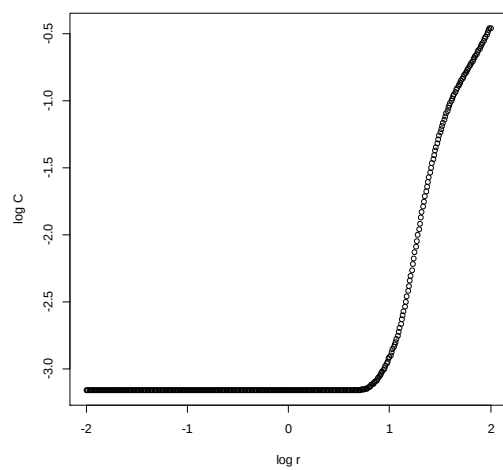


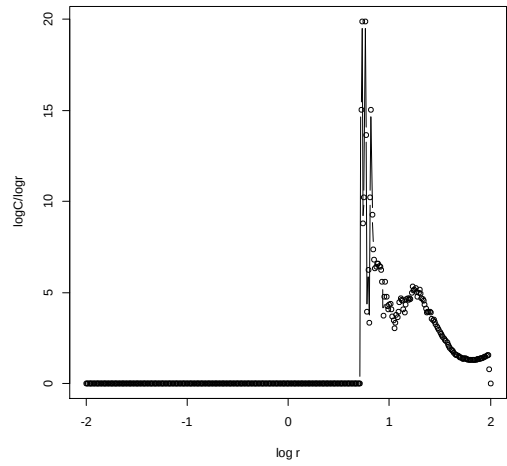
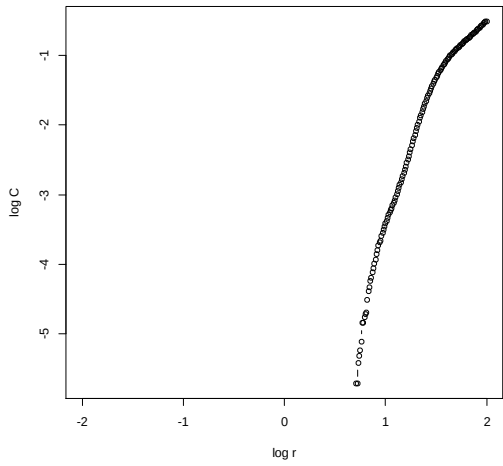
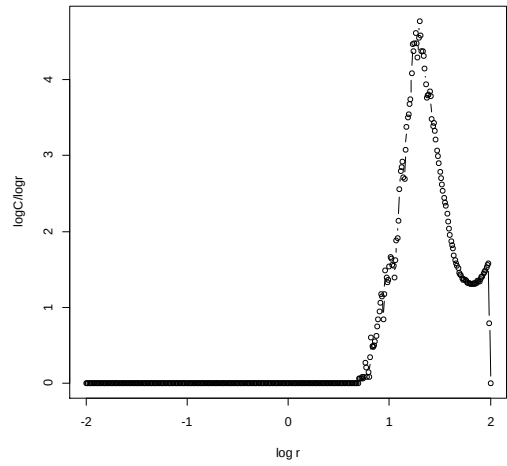
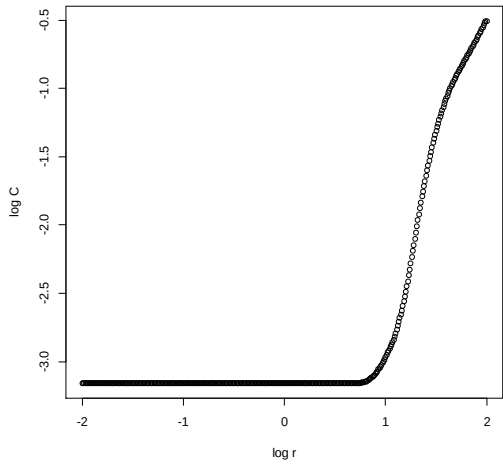




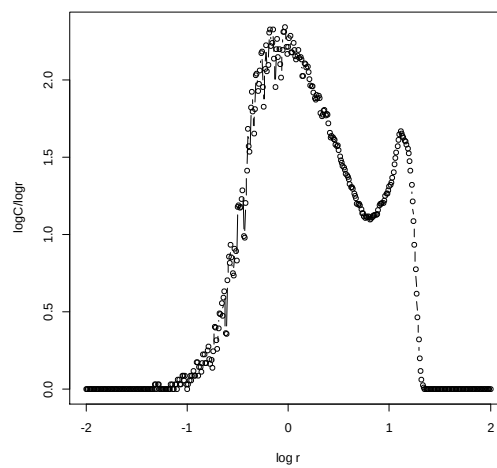
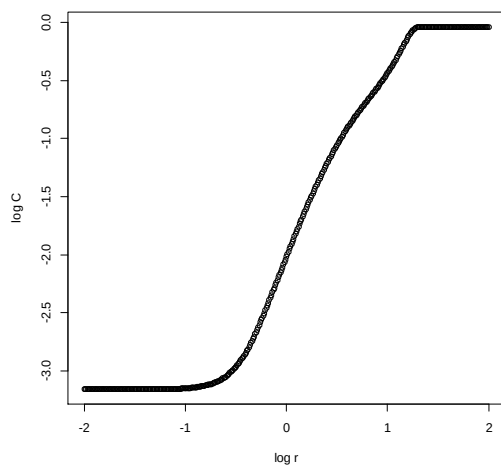
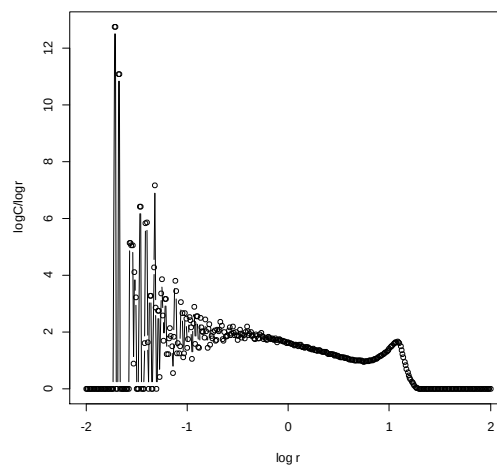
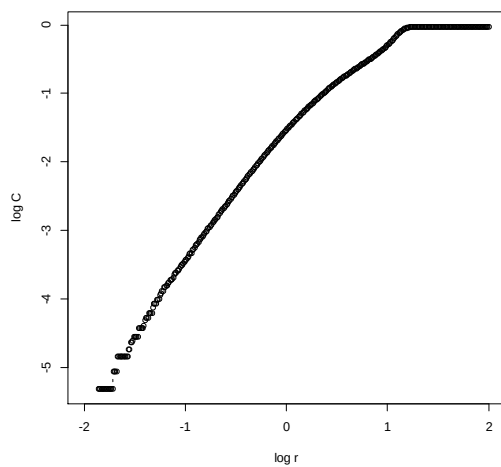
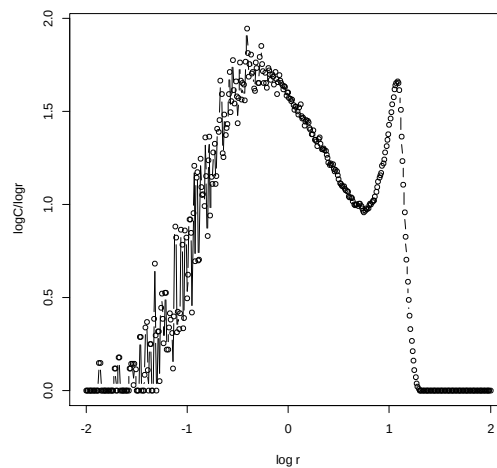
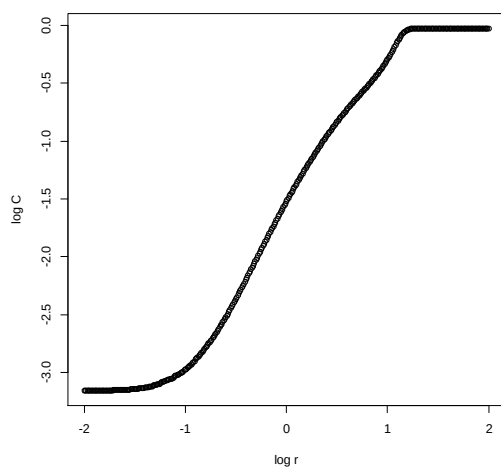


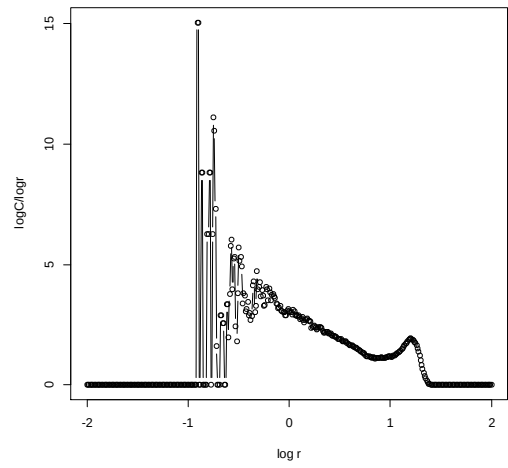
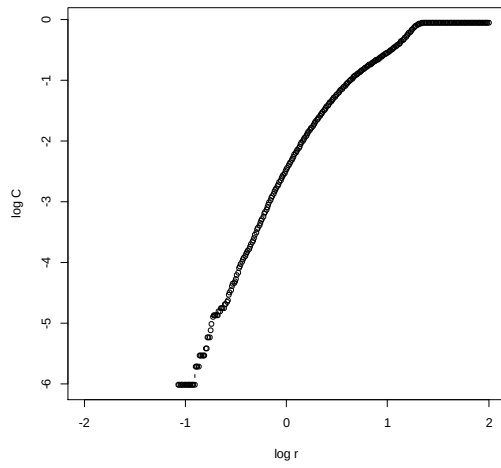
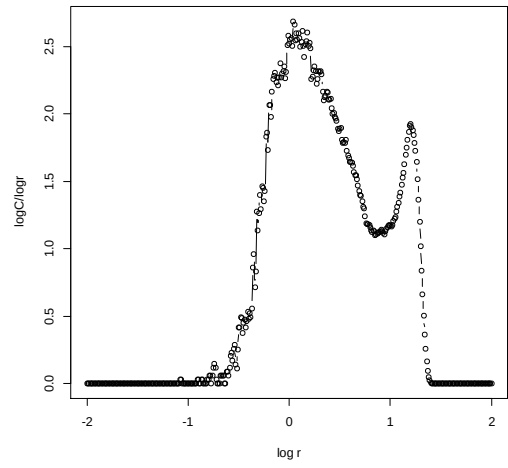
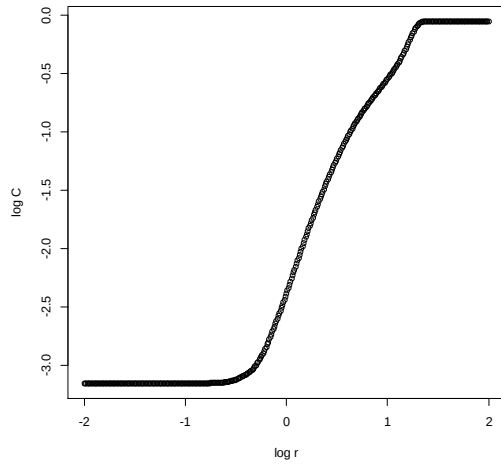
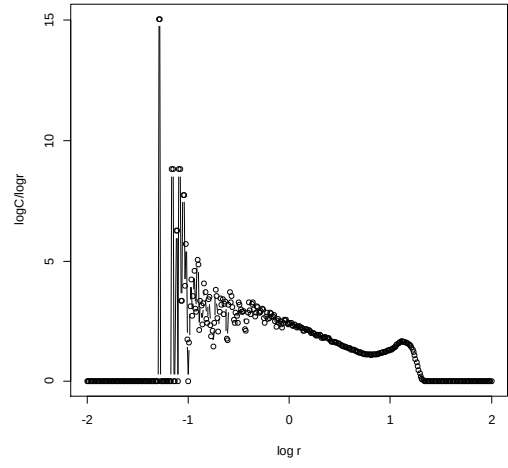
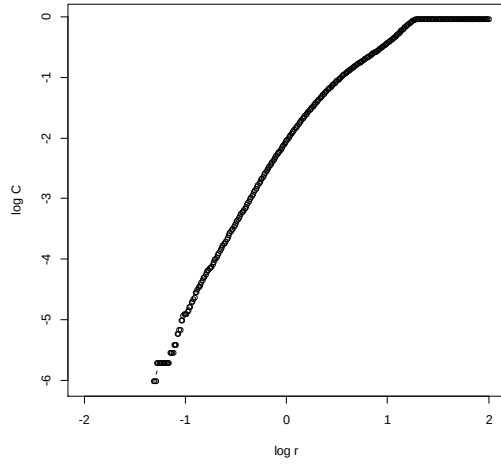


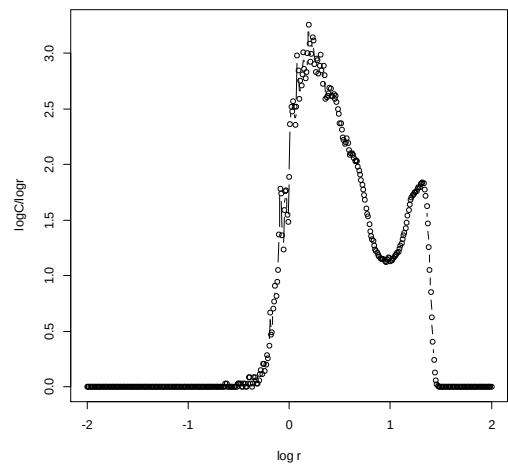
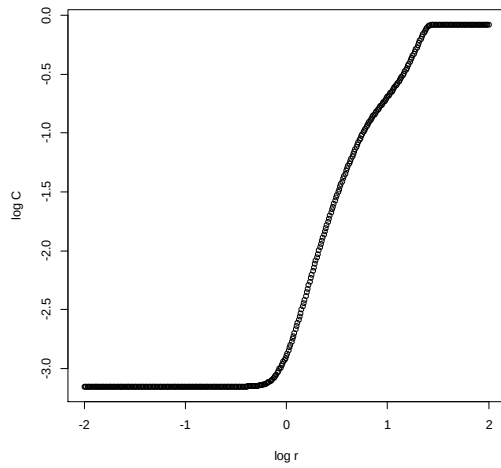
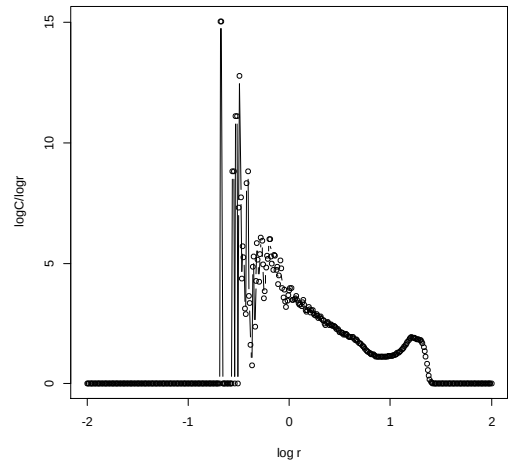
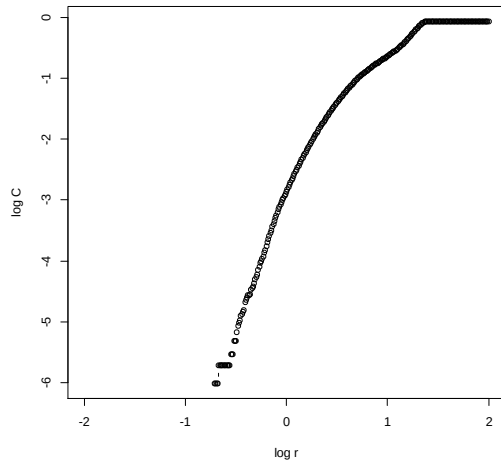
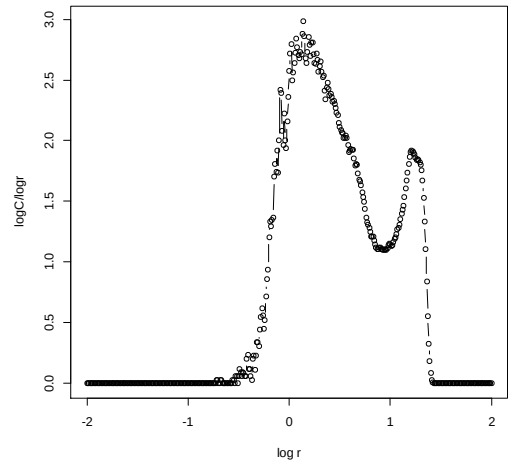
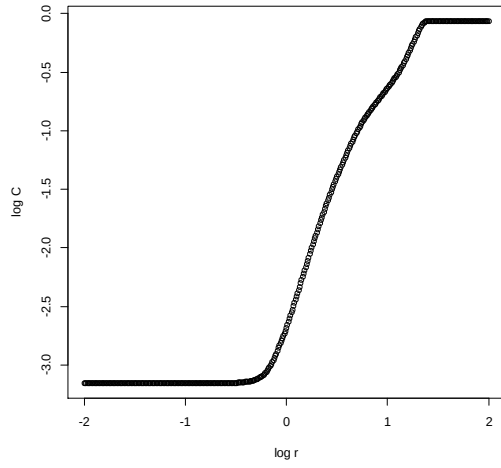


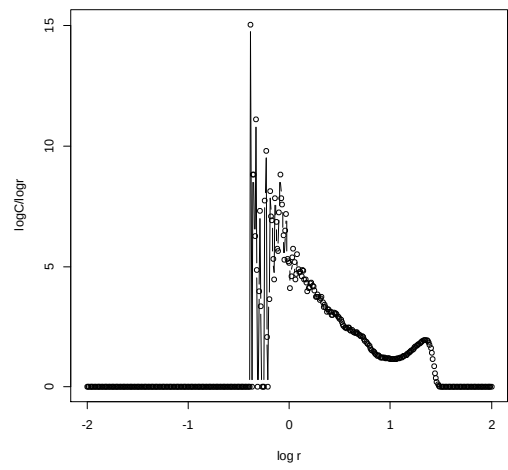
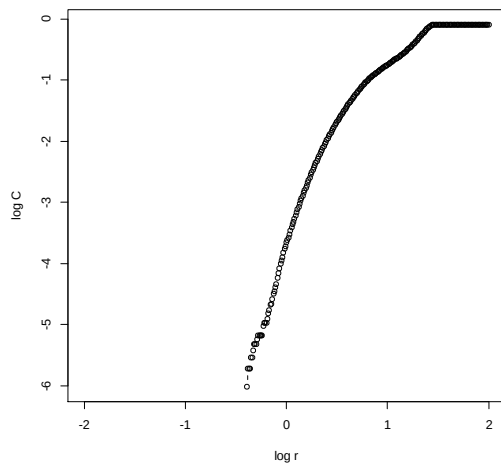
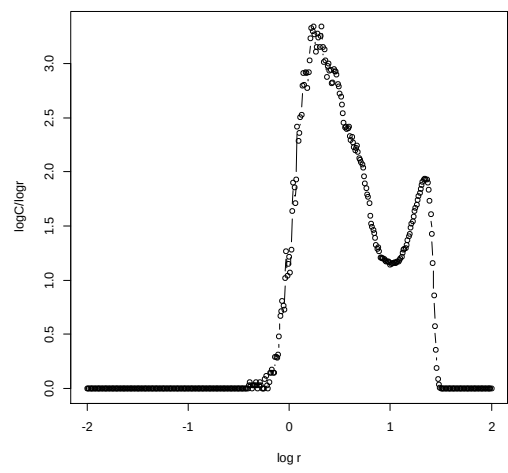
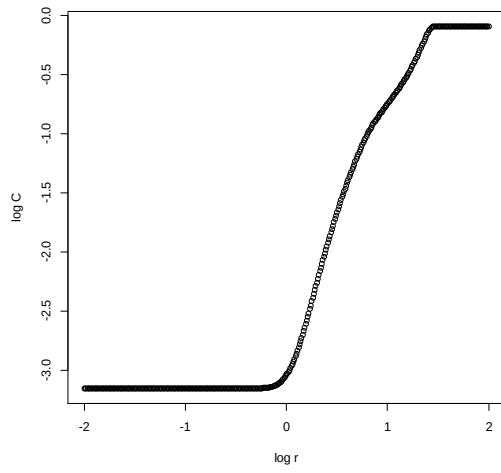
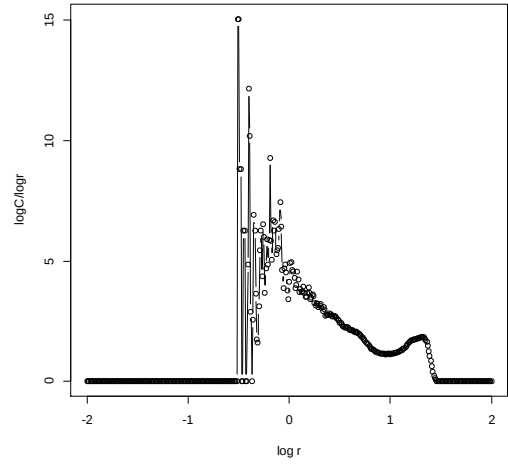
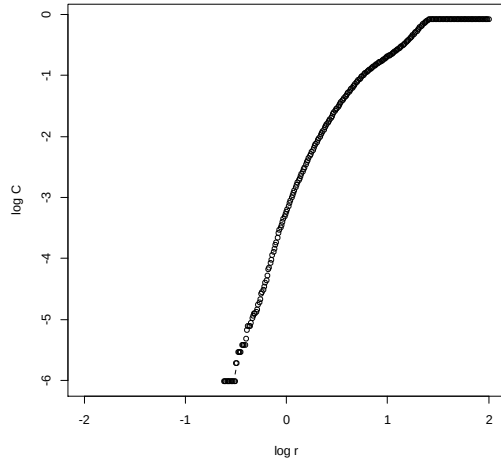


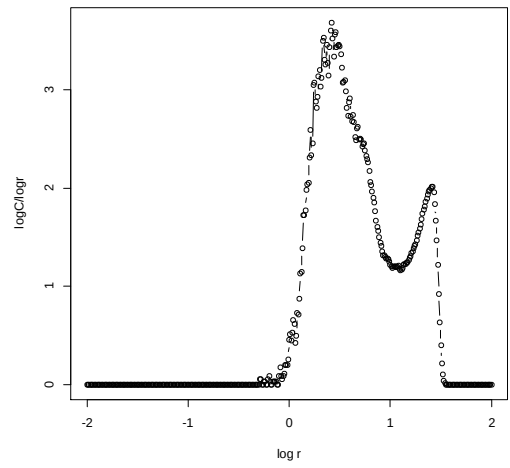
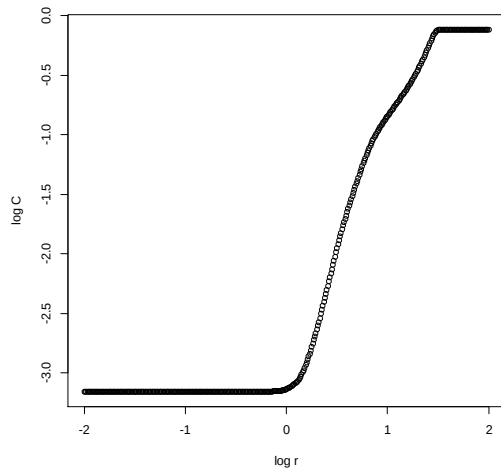
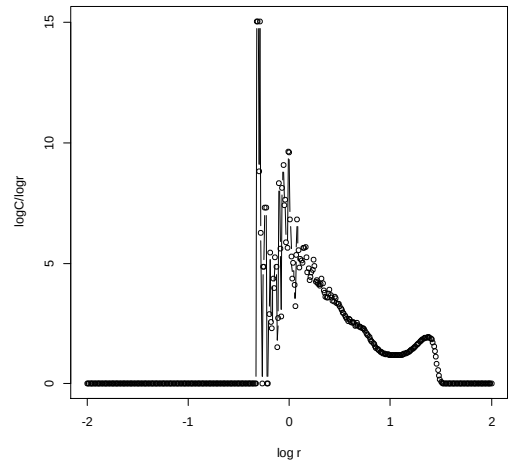
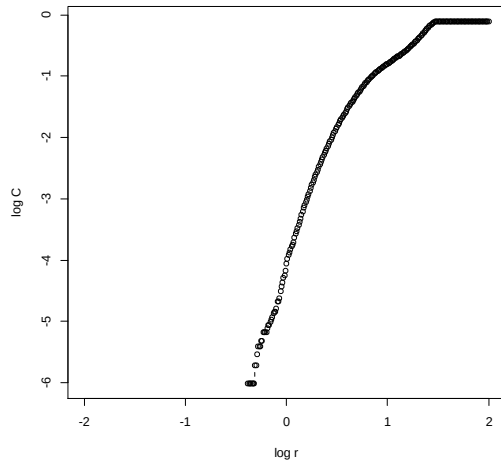
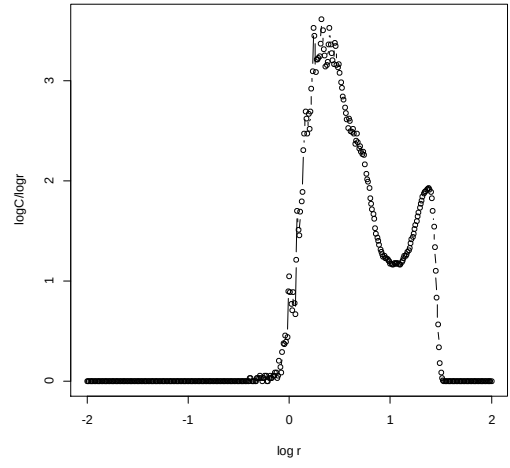
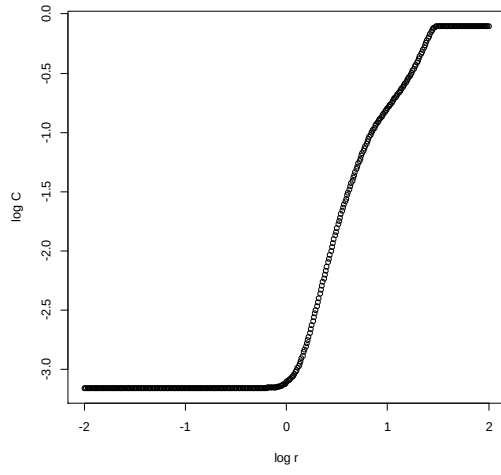
T40 jun/02

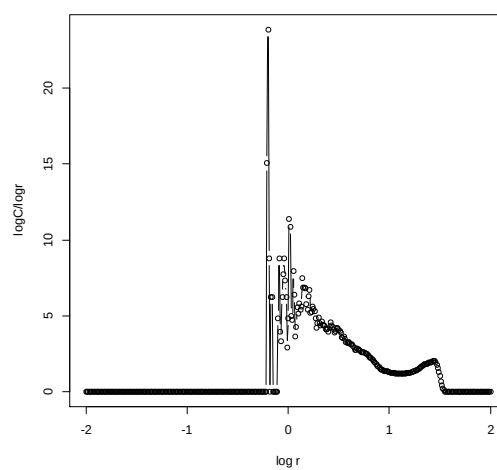
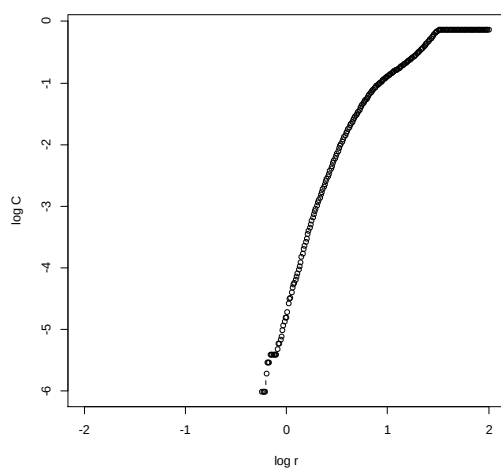
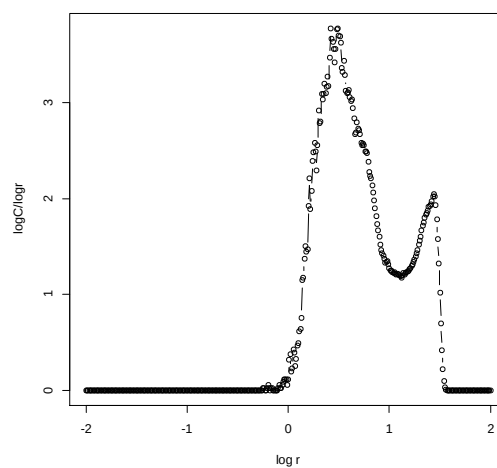
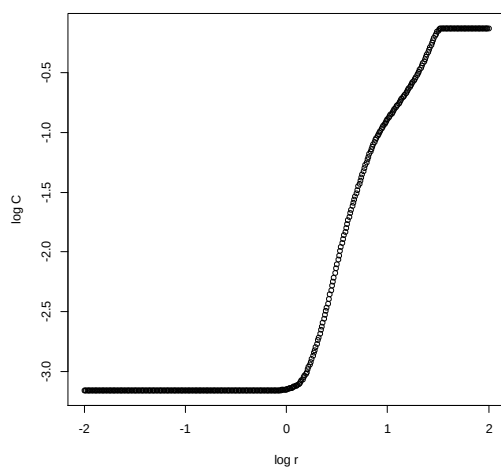
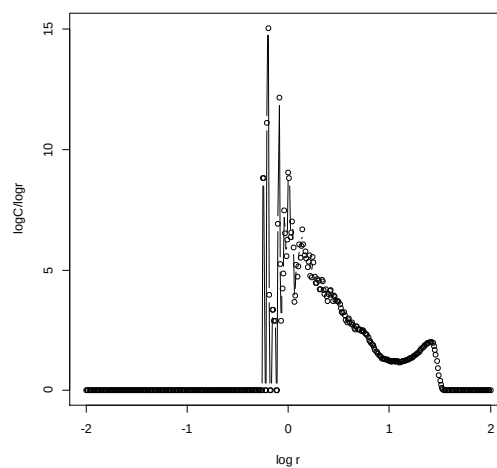
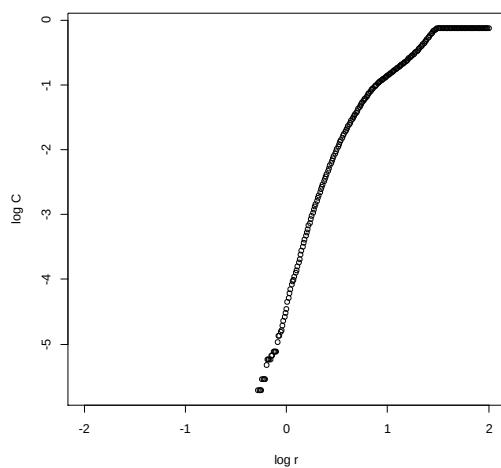


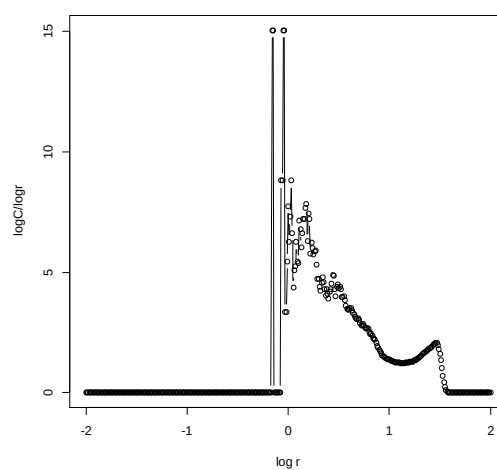
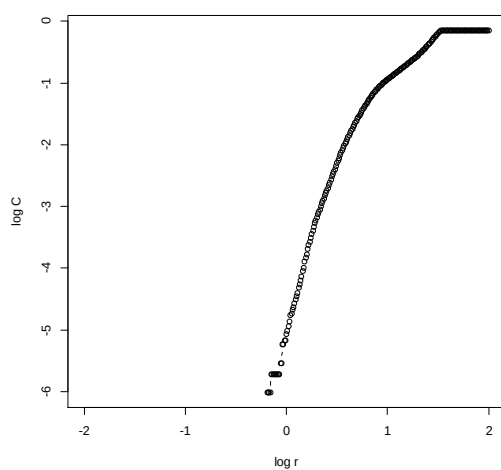
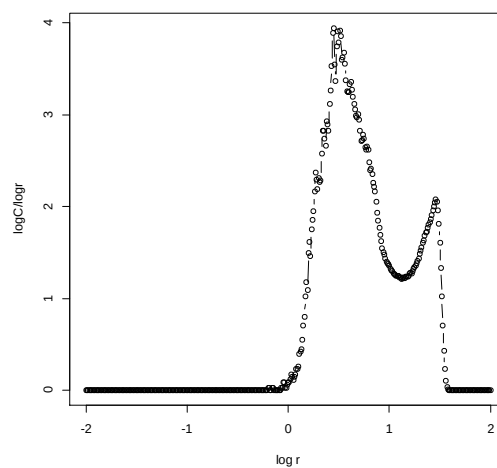
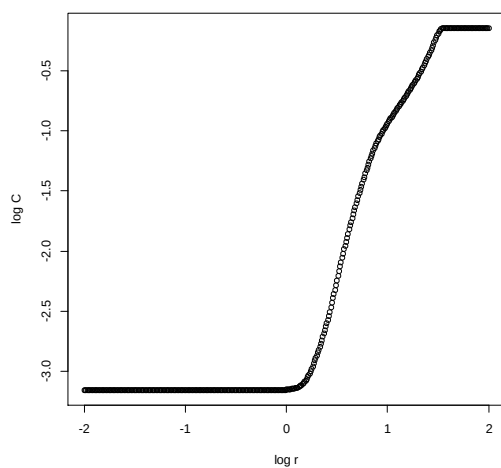


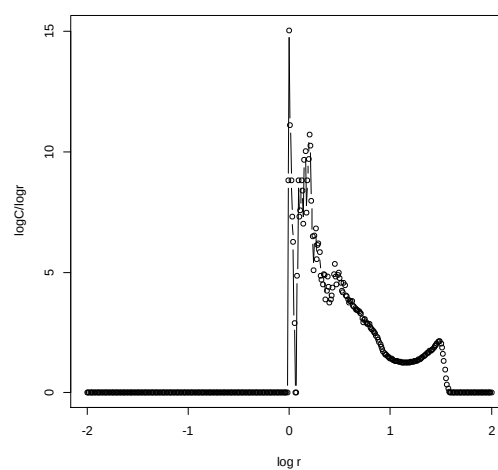
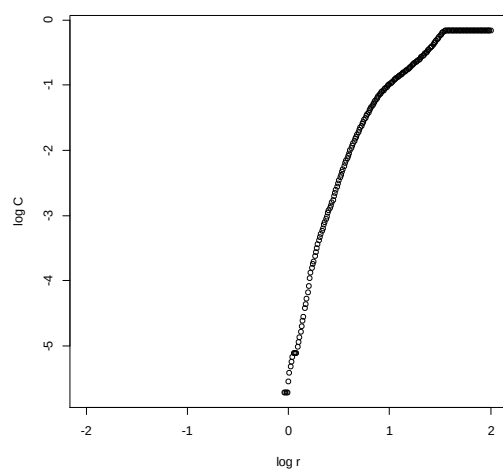
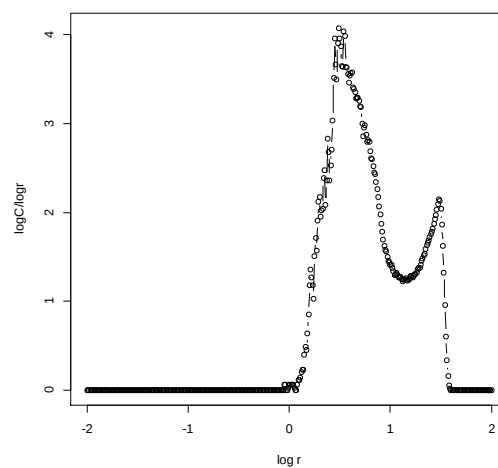
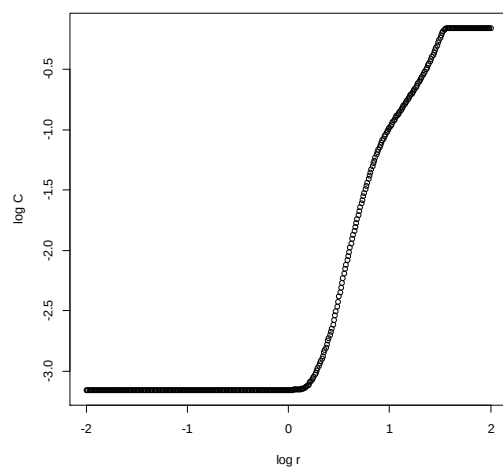




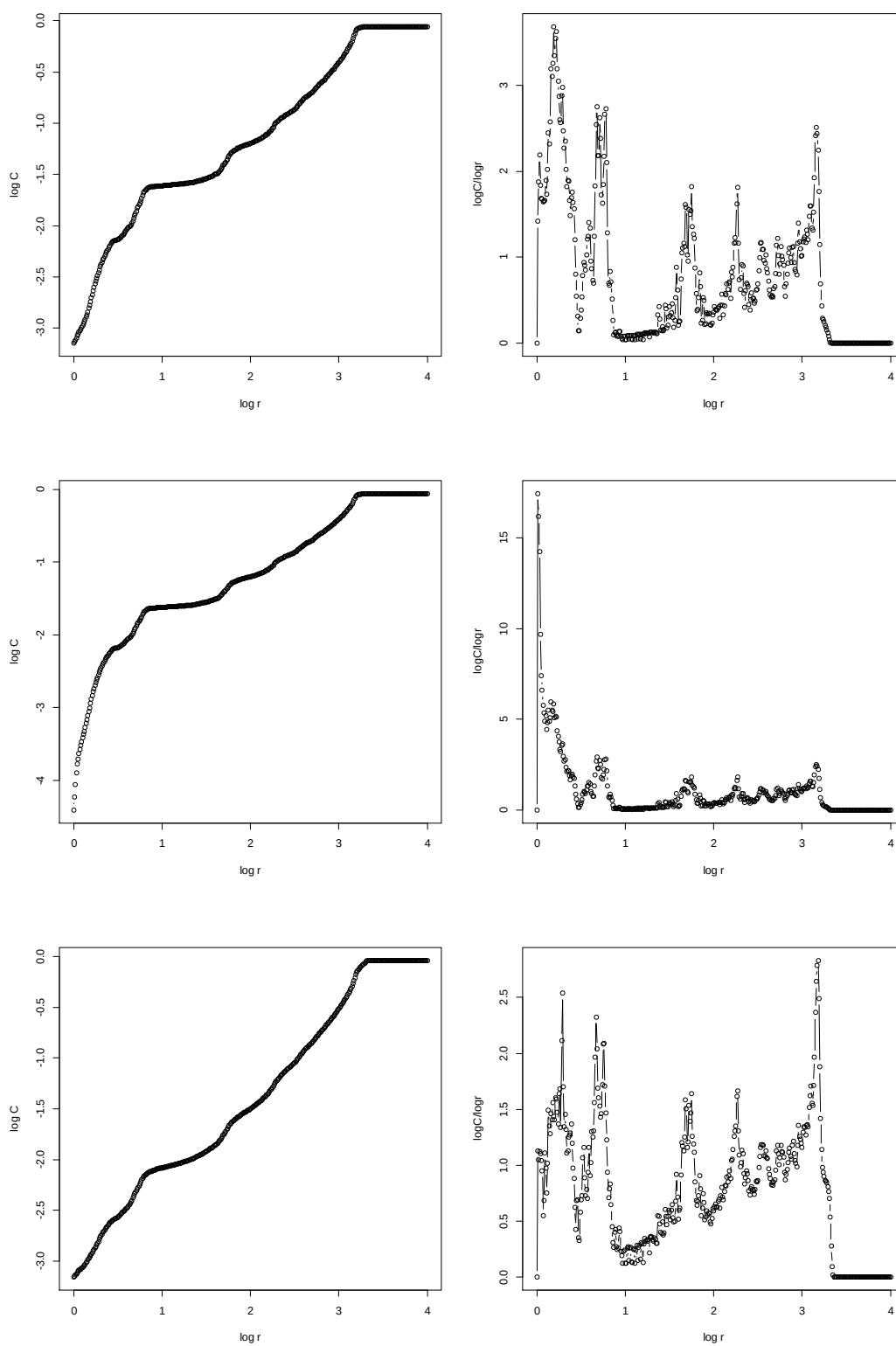


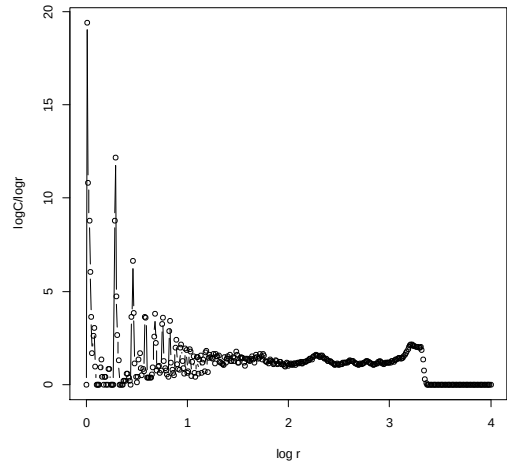
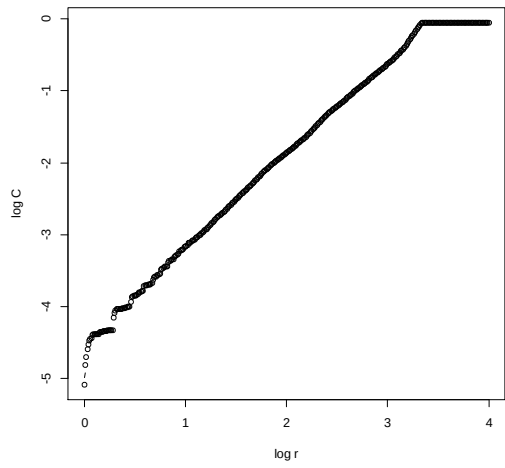
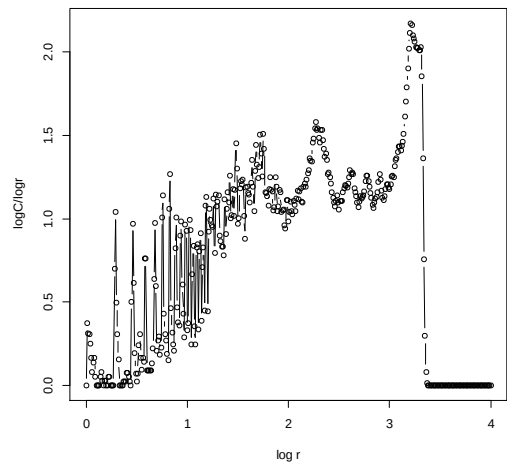
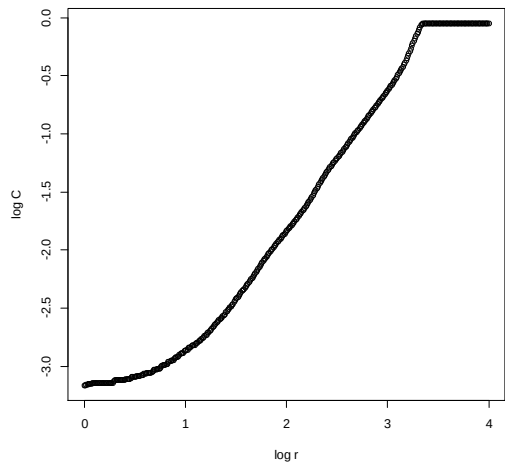
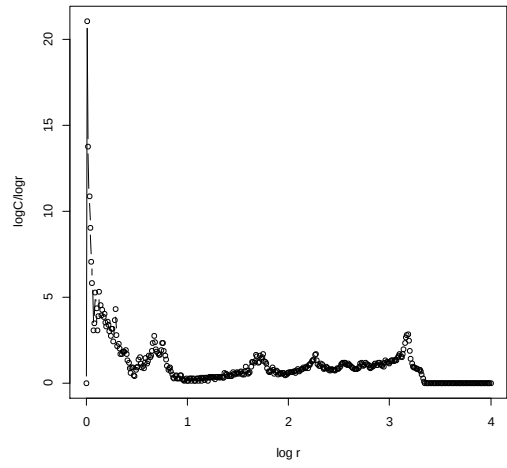
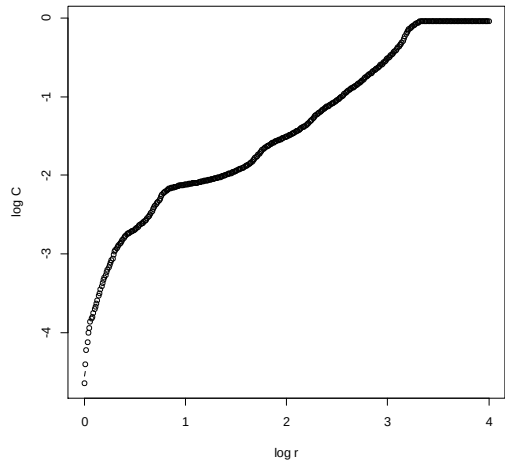


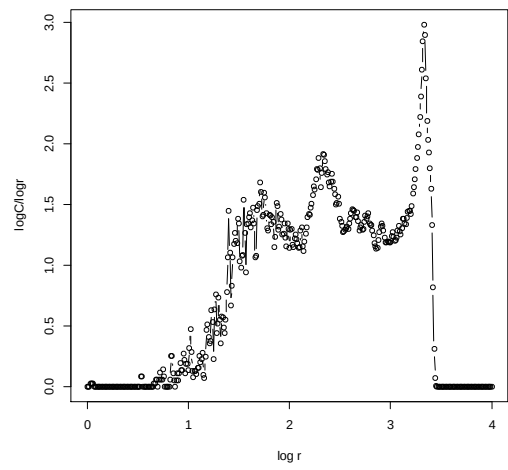
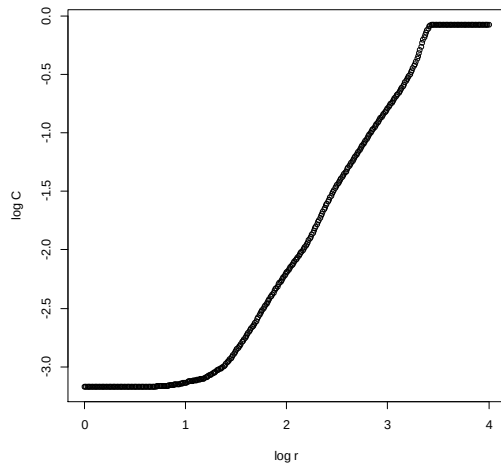
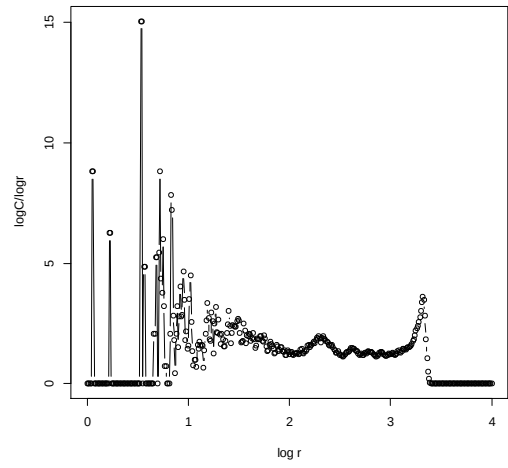
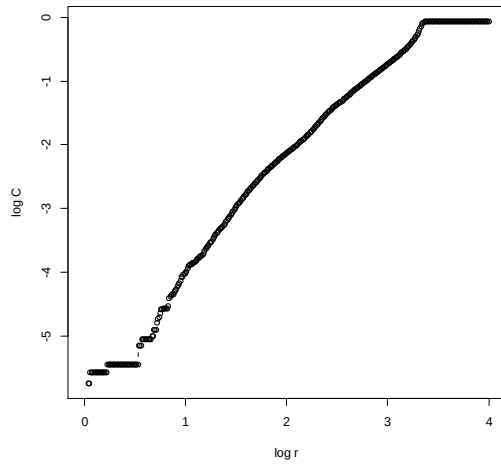
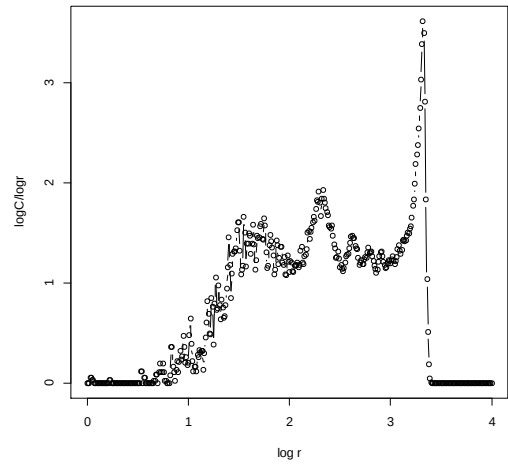
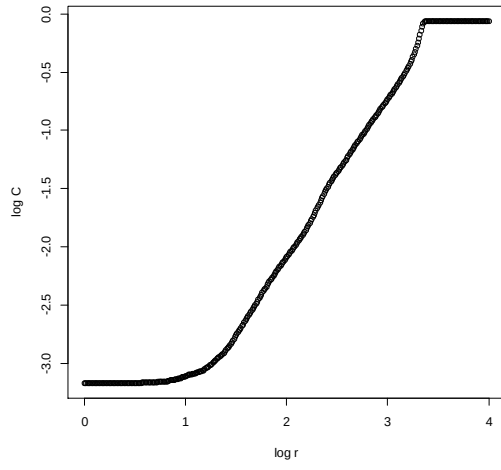


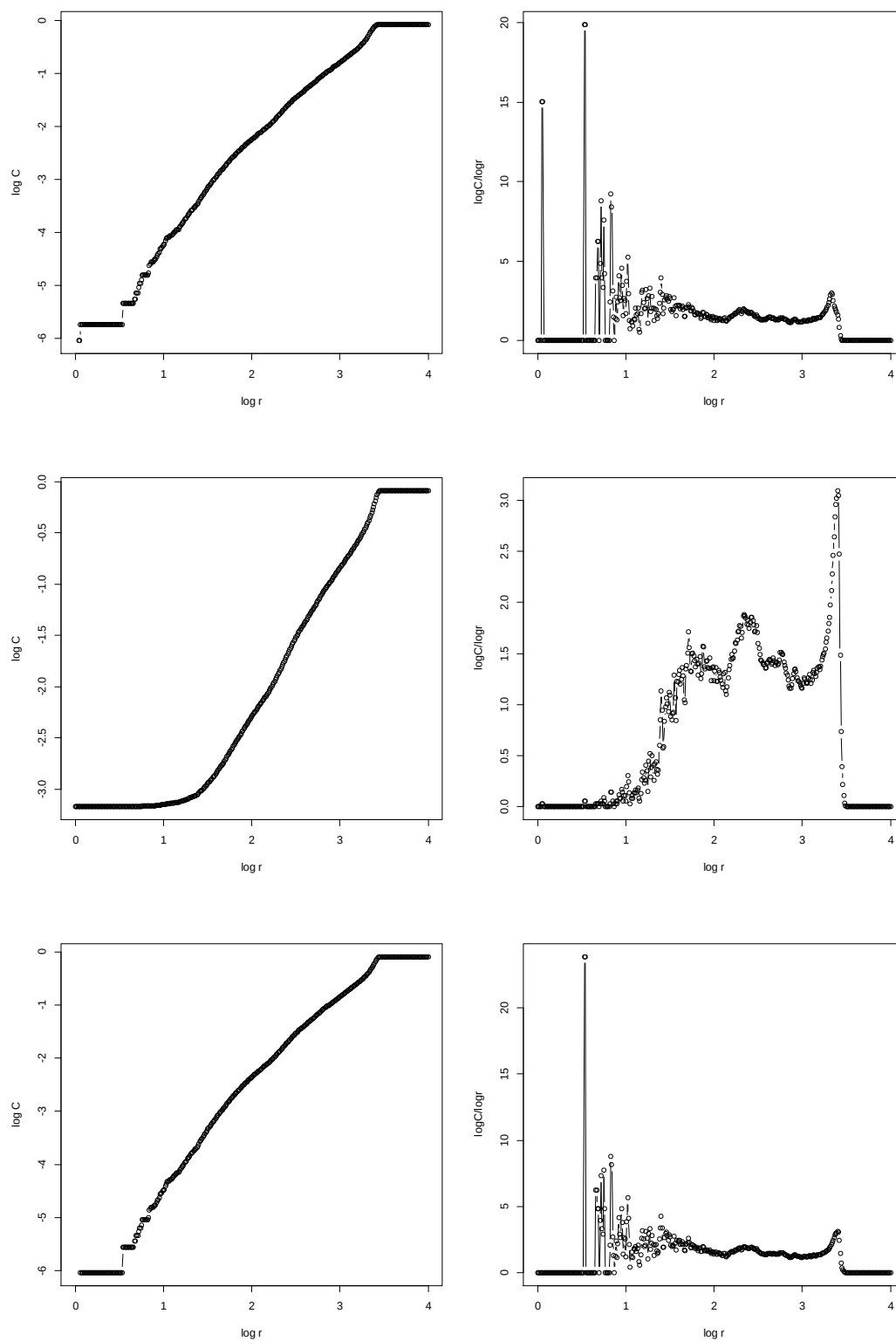


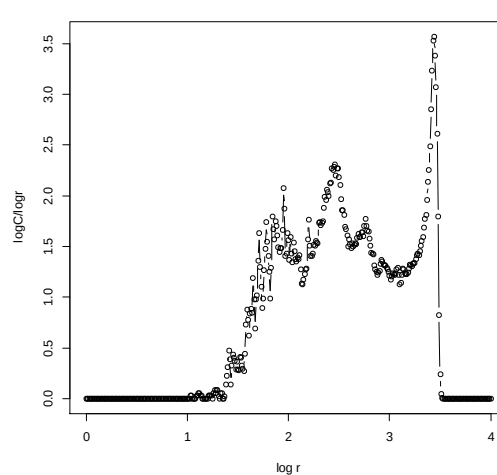
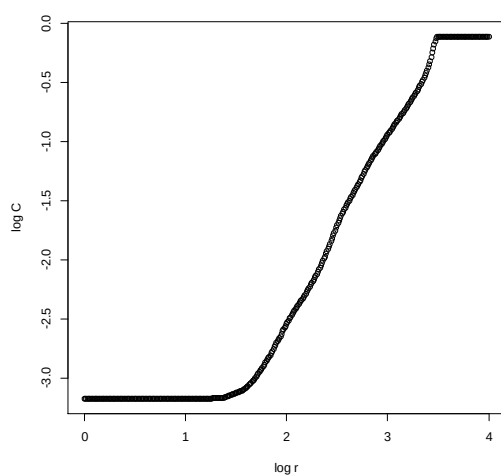
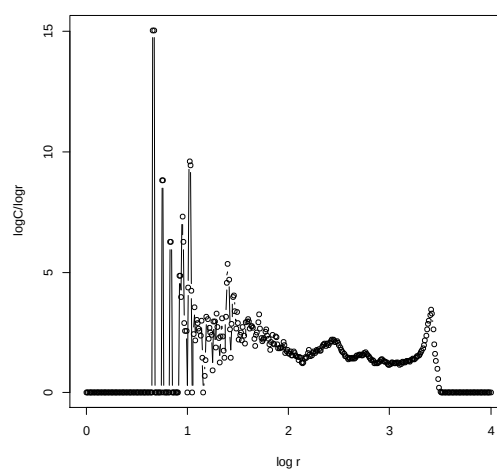
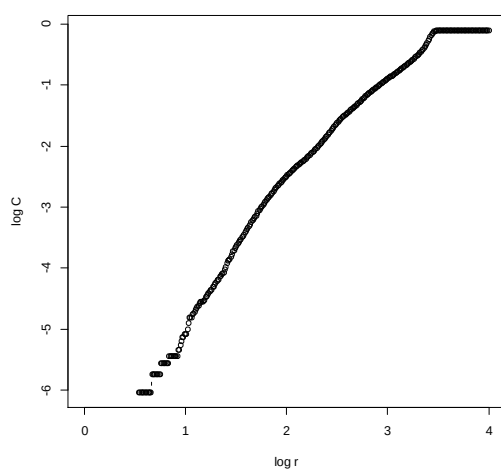
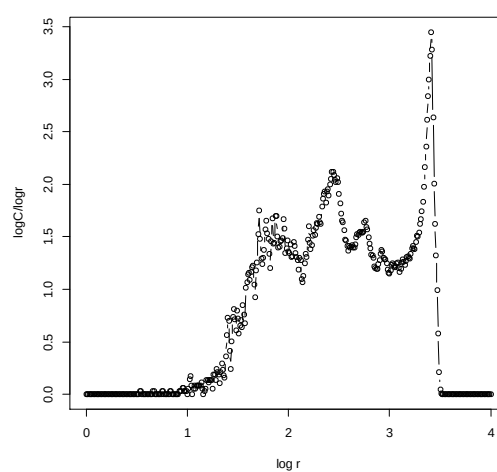
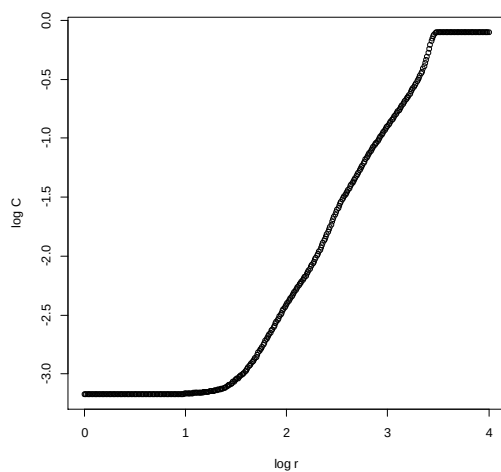
PARi ago/03

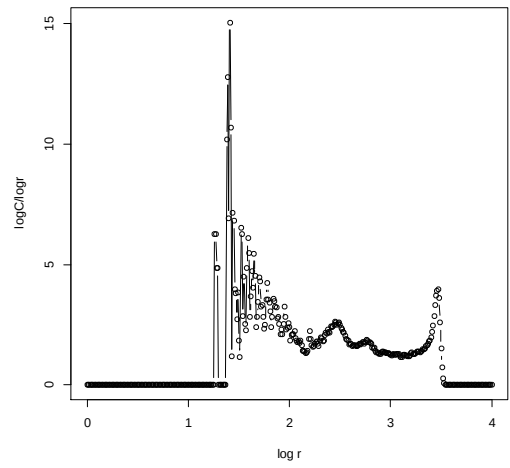
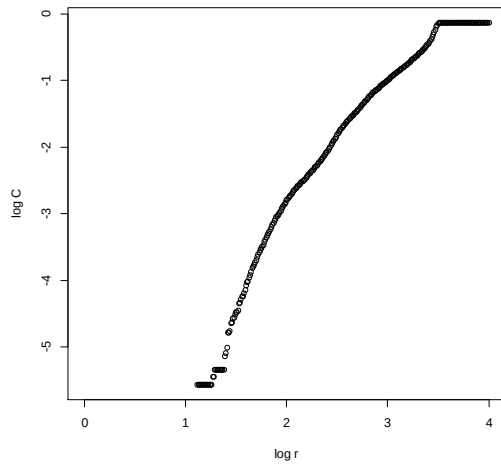
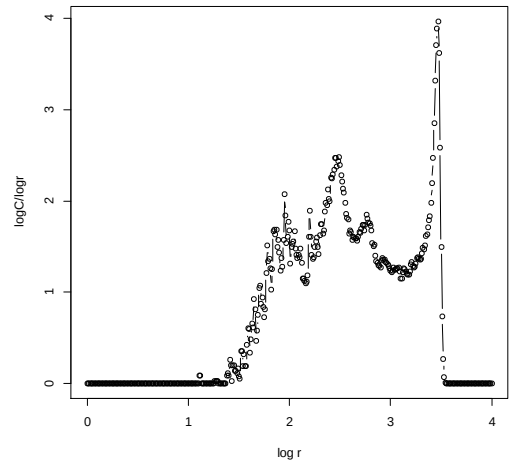
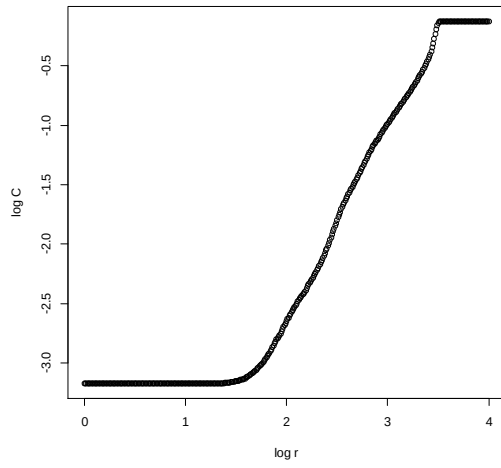
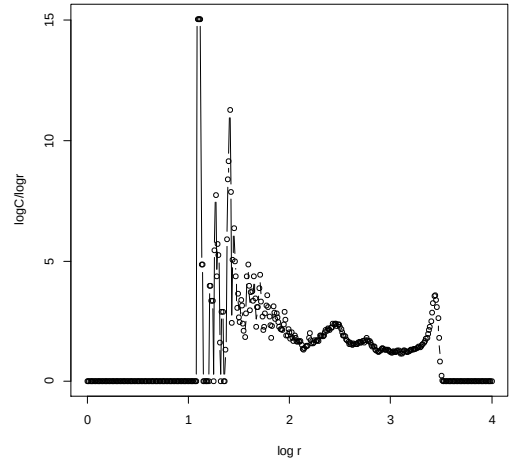
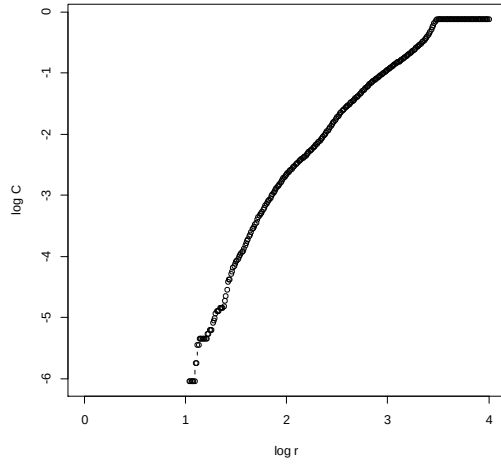


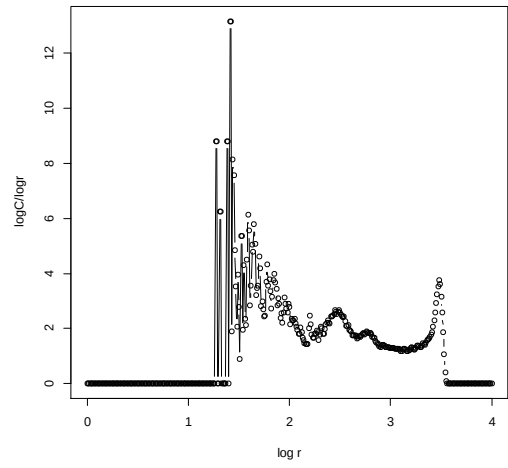
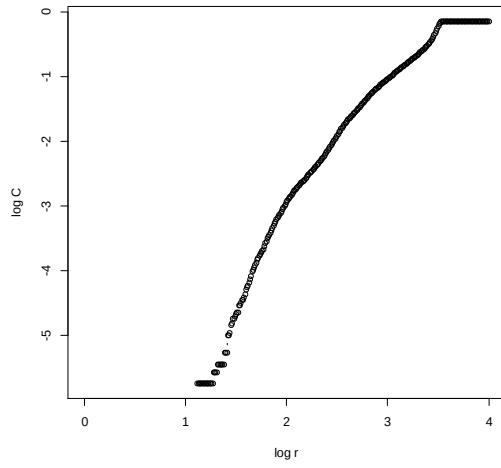
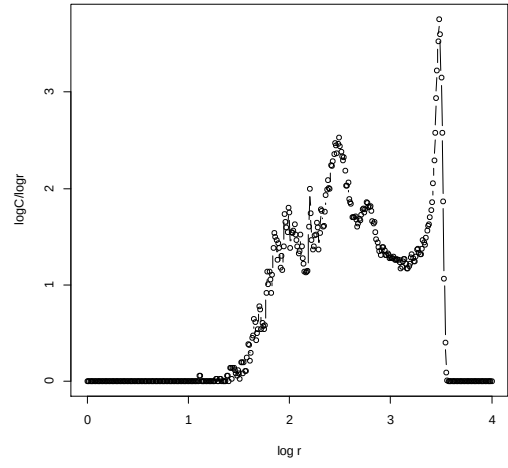
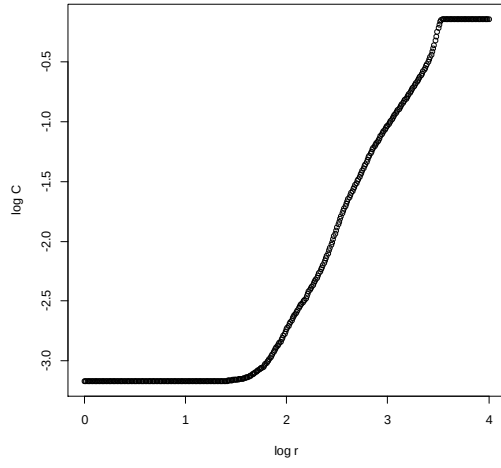


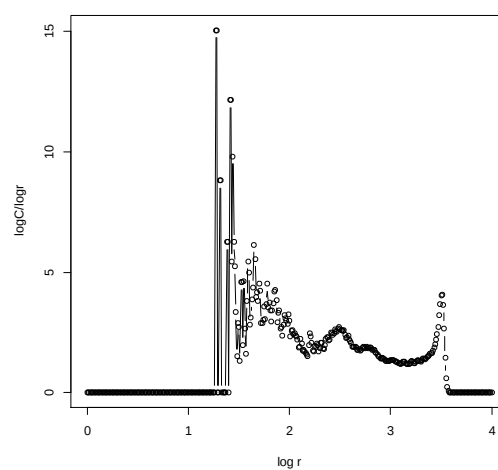
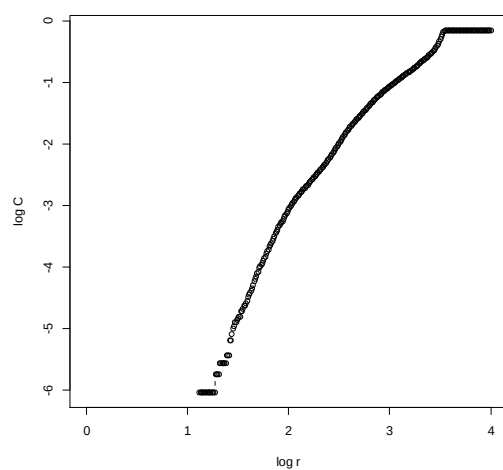
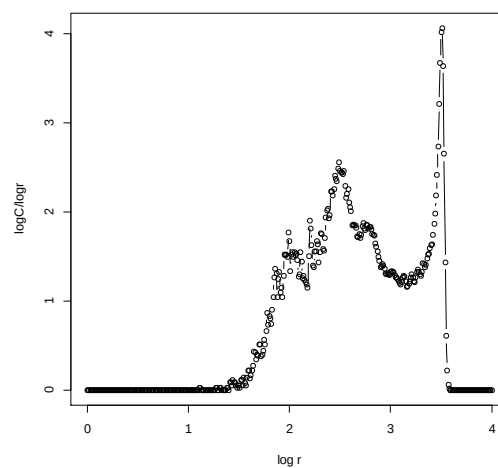
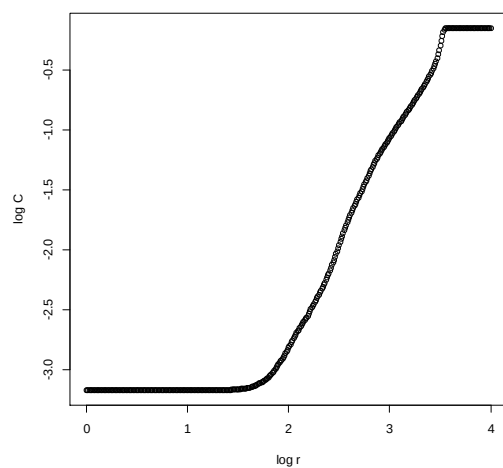


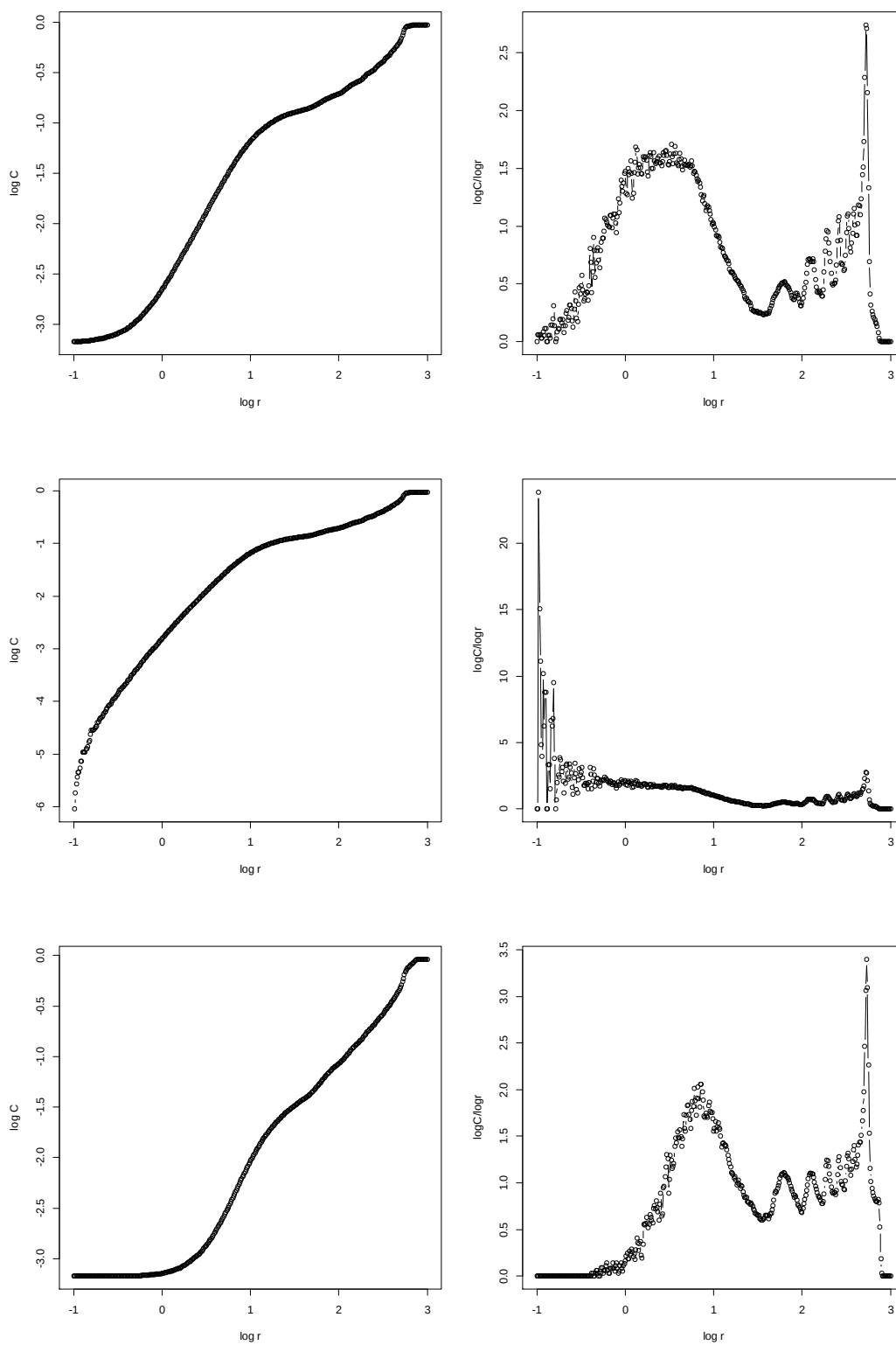


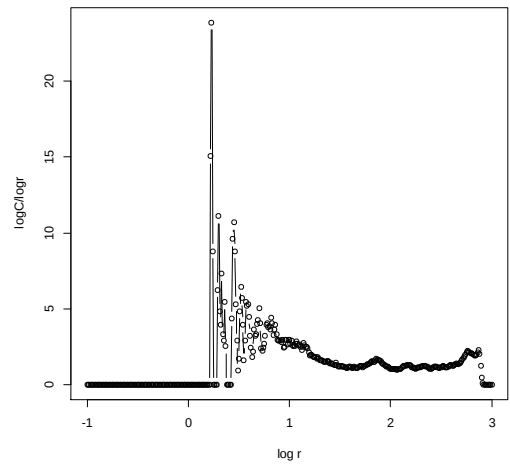
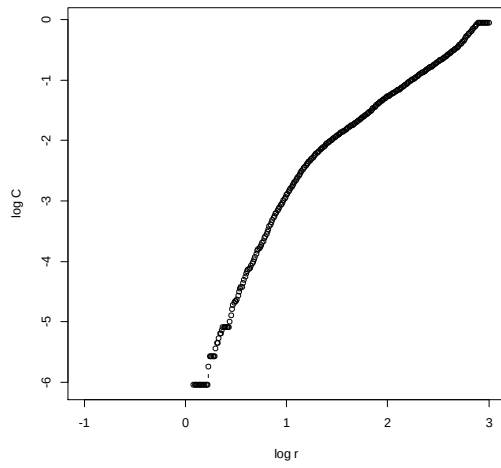
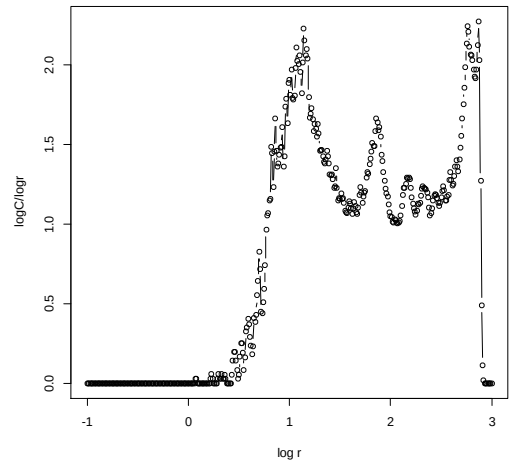
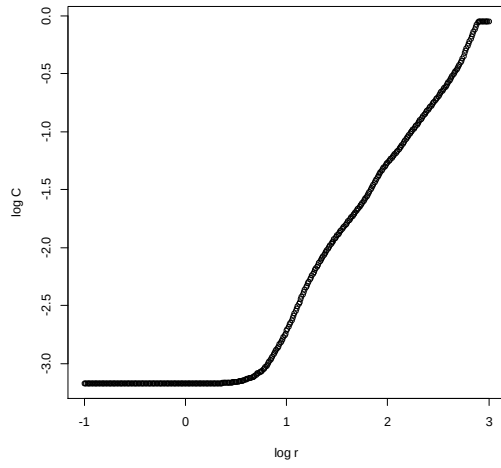
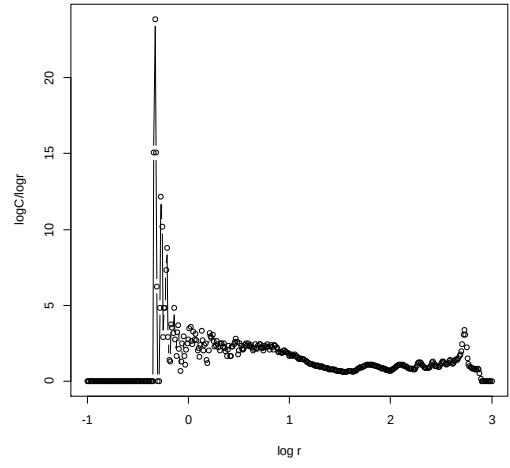
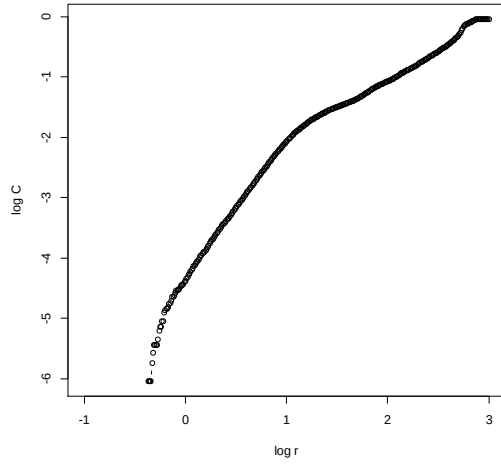


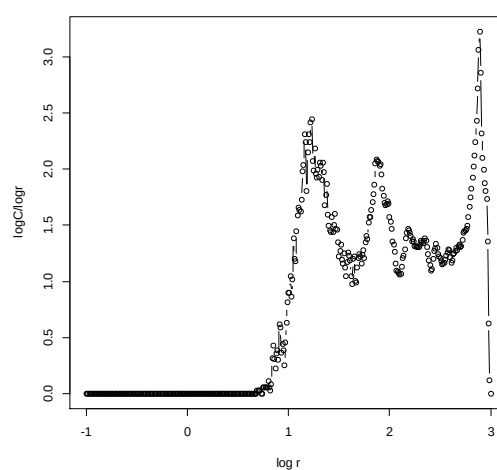
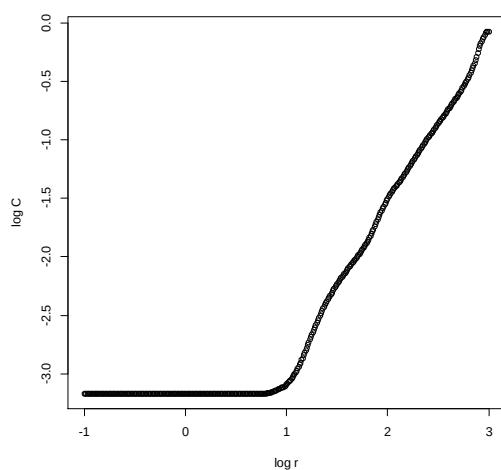
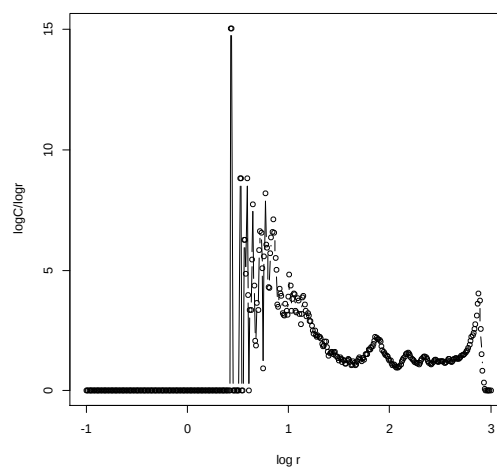
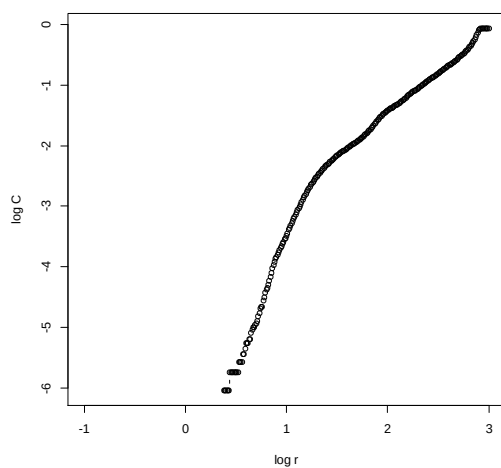
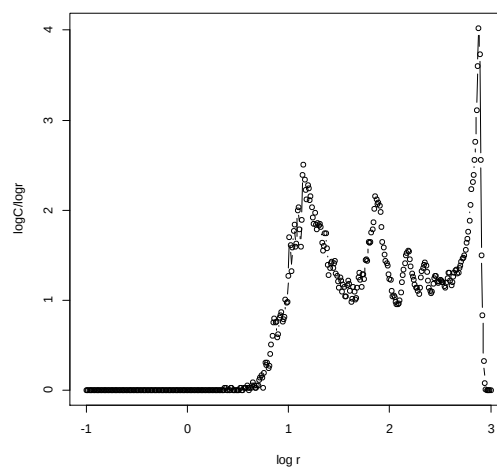
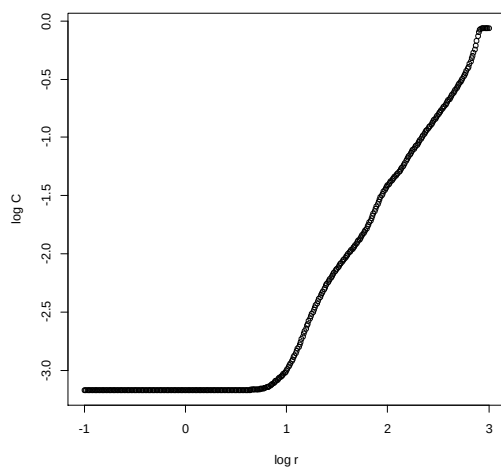


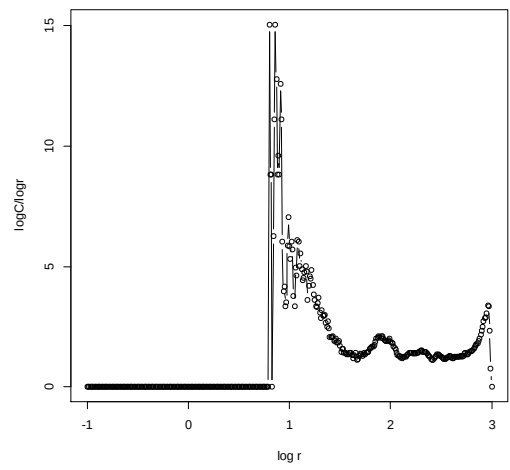
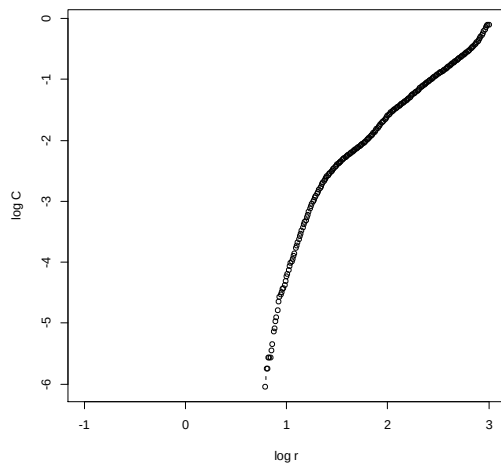
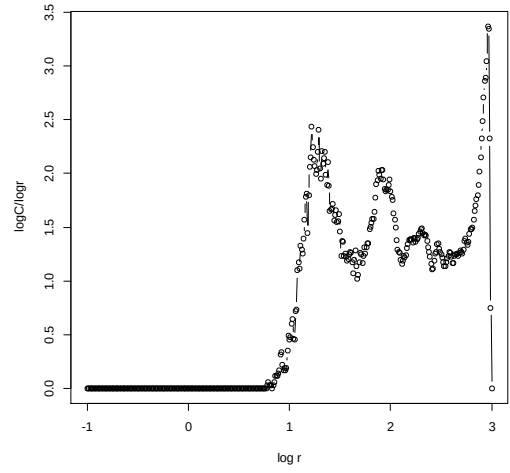
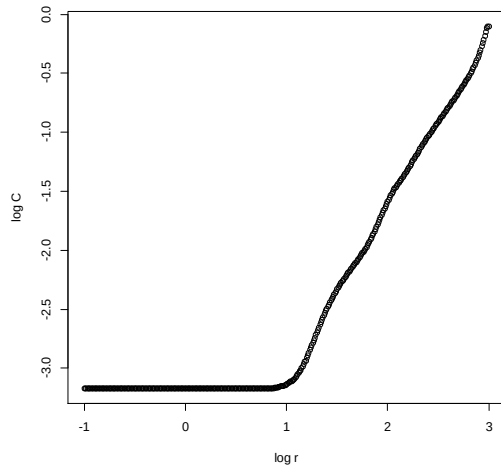
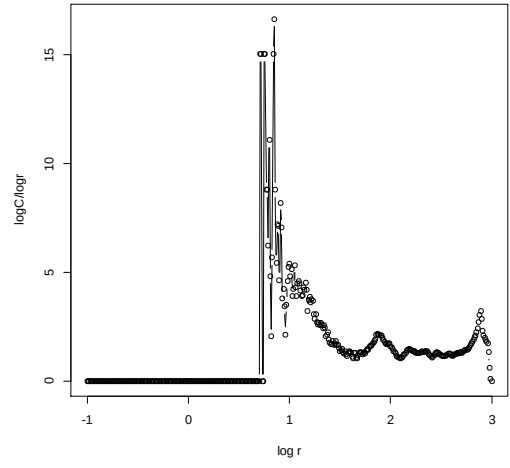
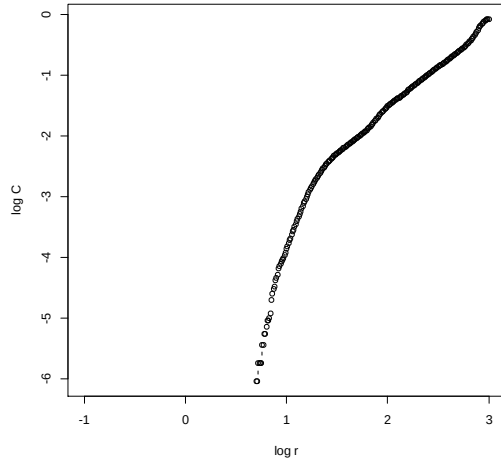


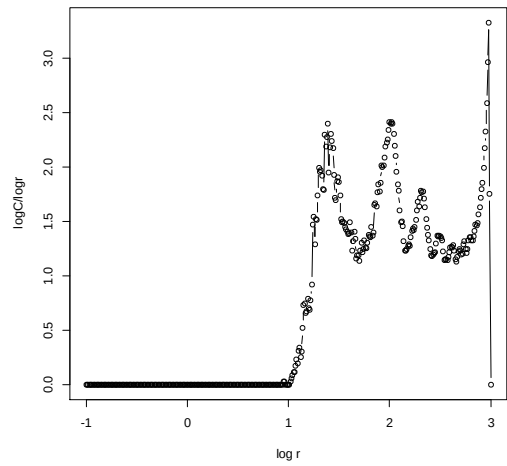
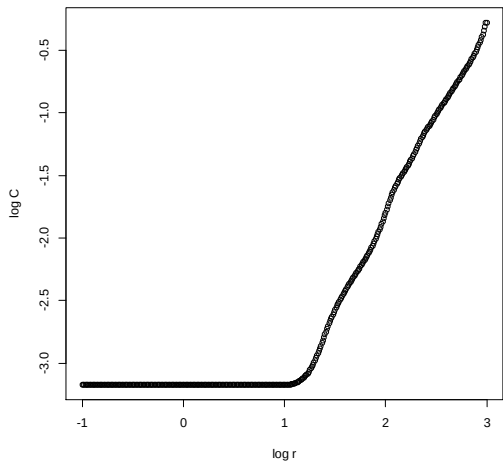
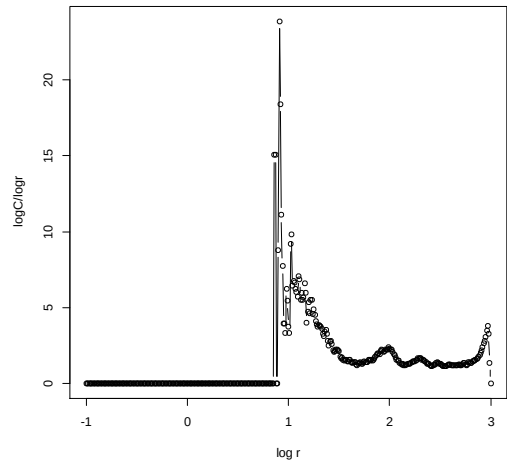
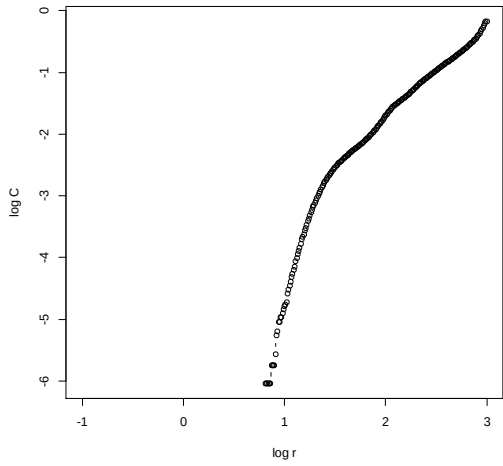
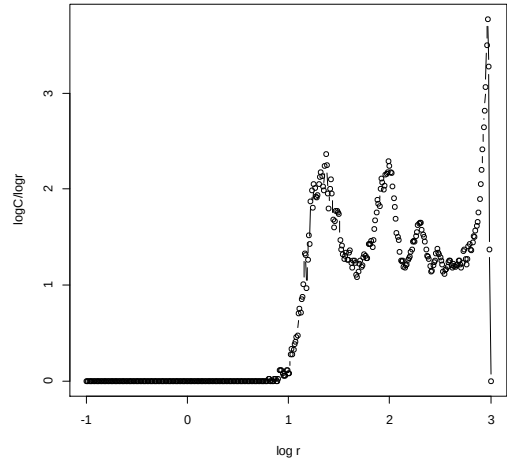
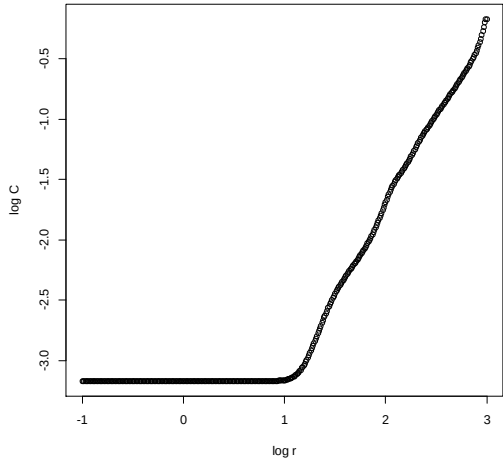


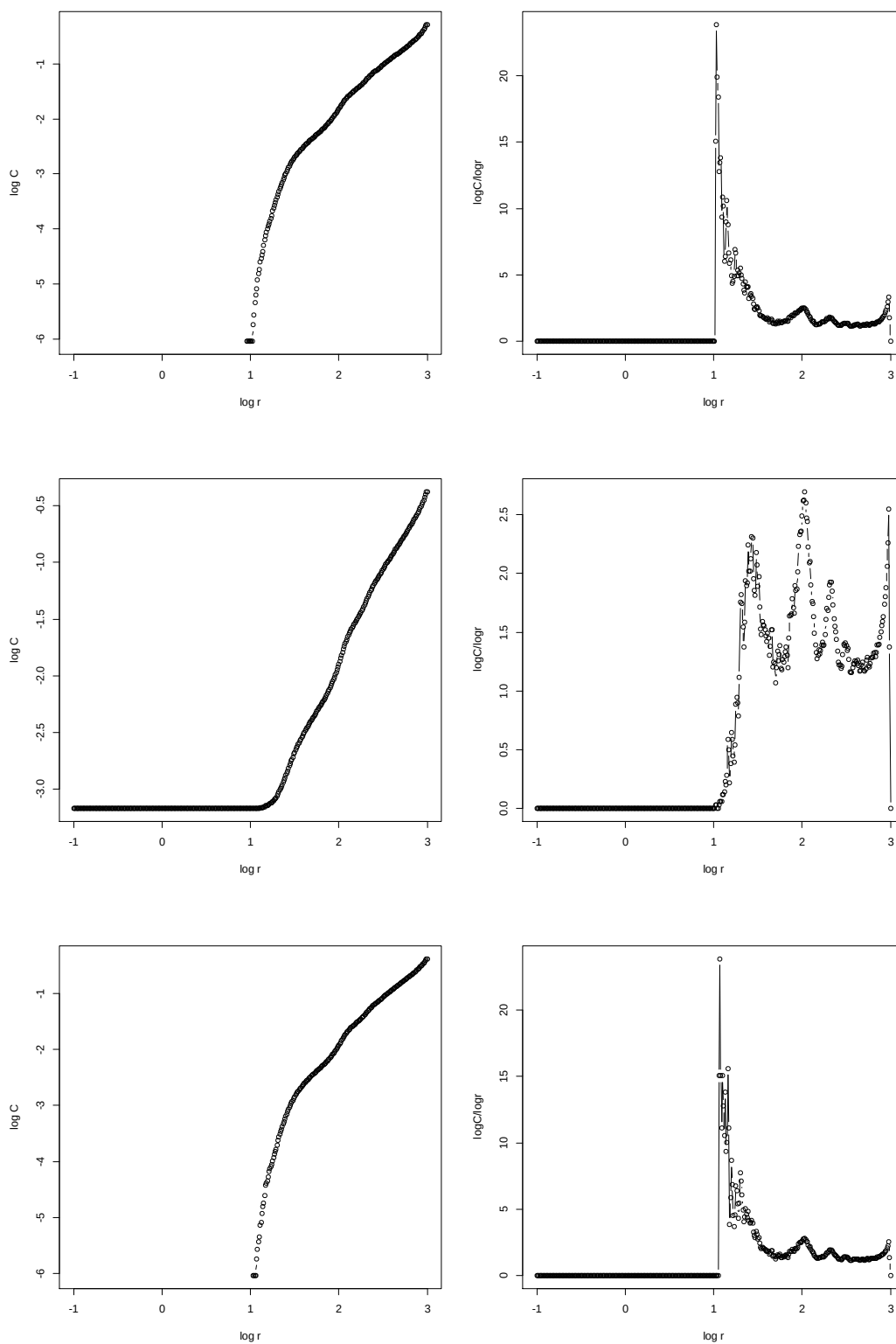
Rn ago/03

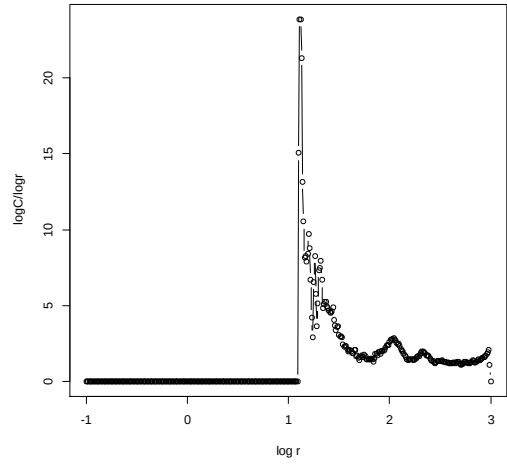
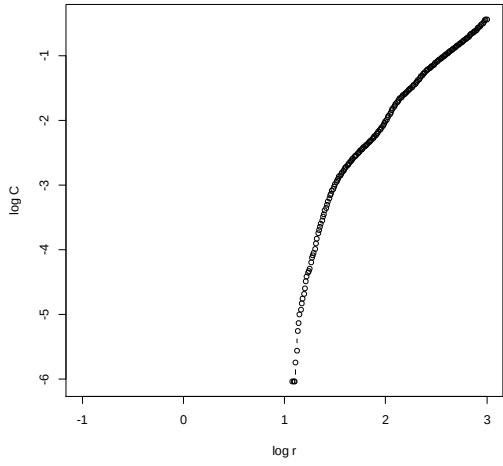
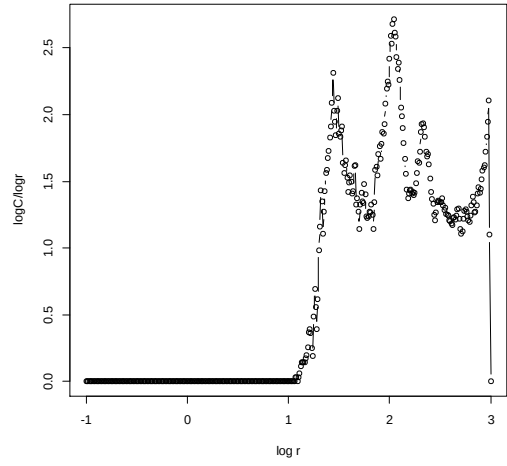
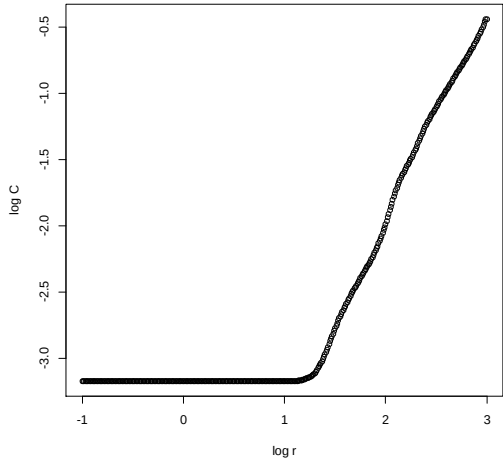


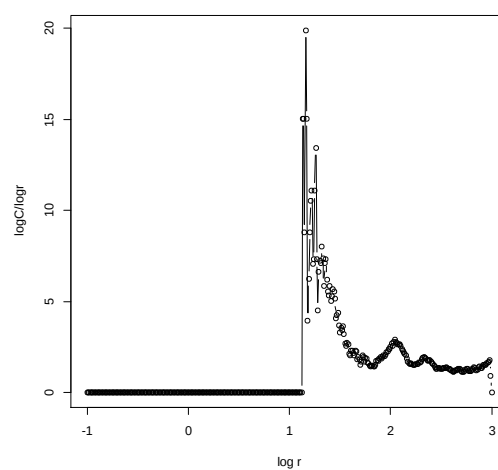
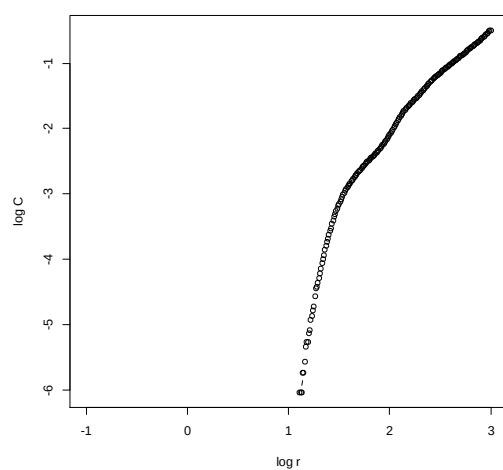
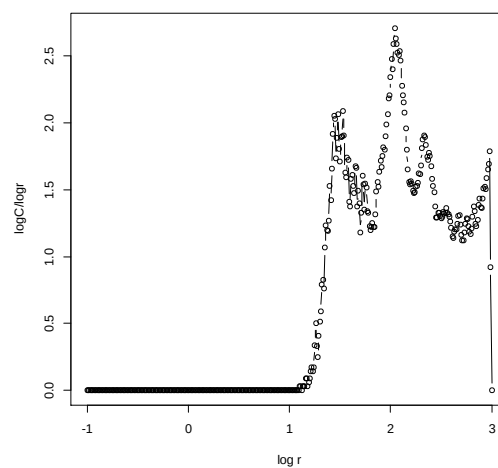
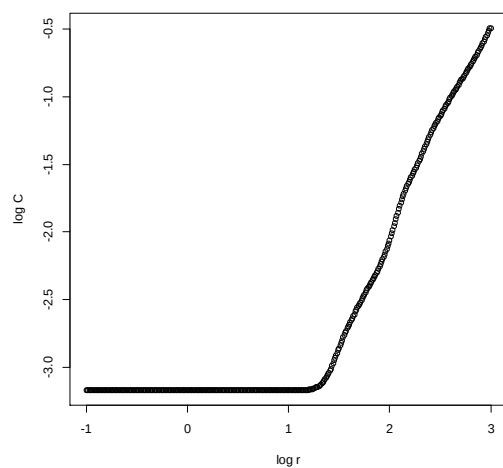




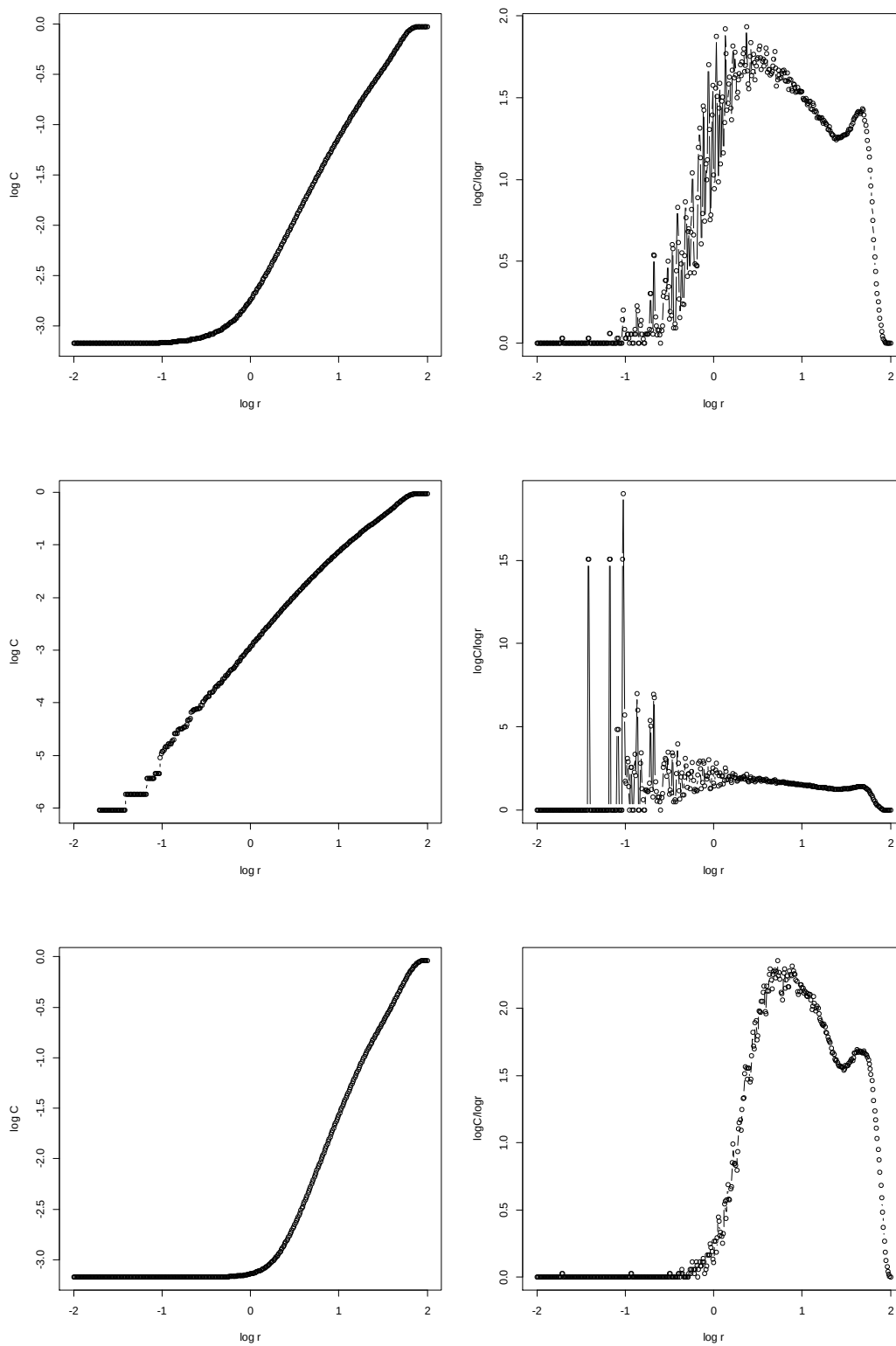


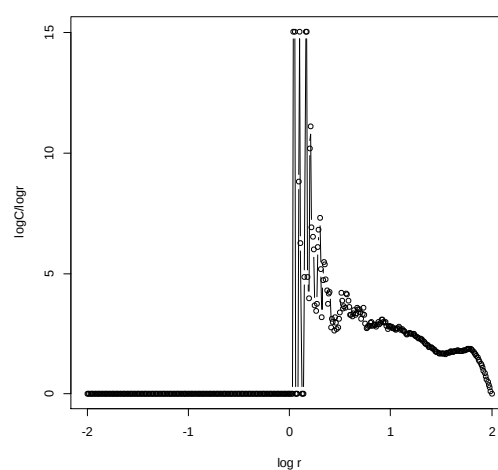
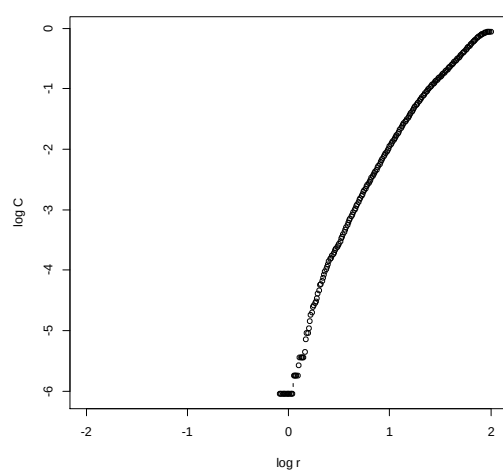
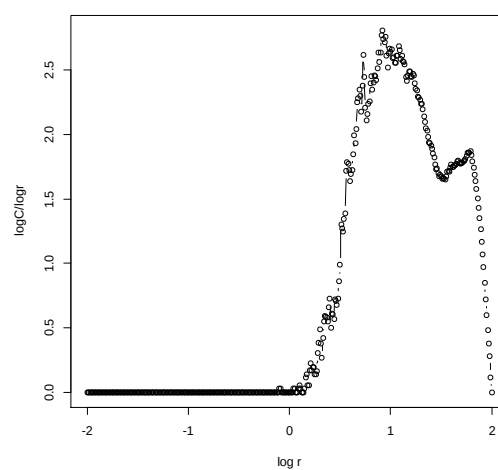
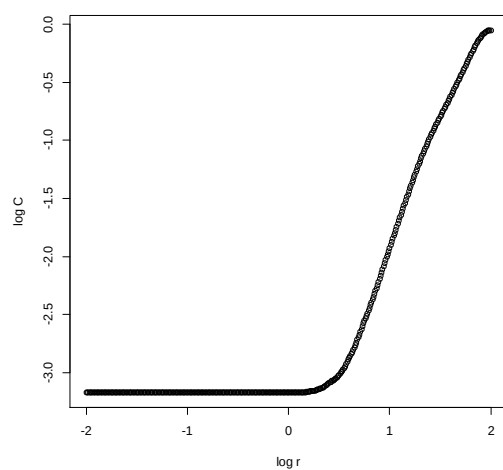
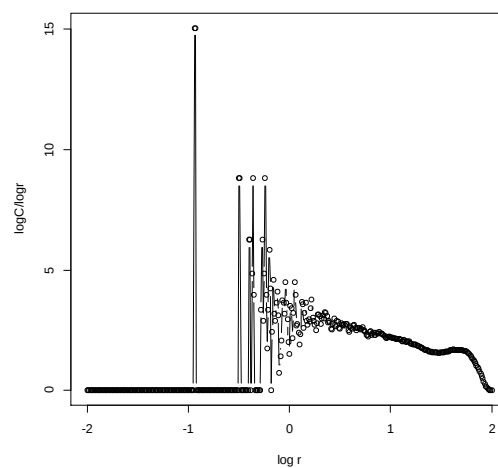
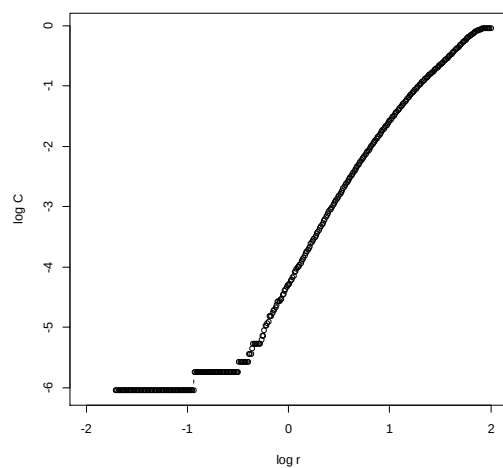


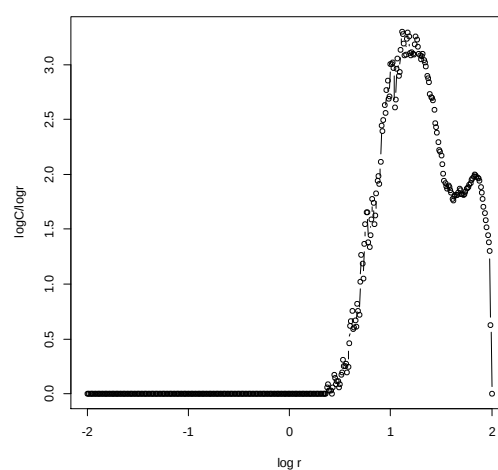
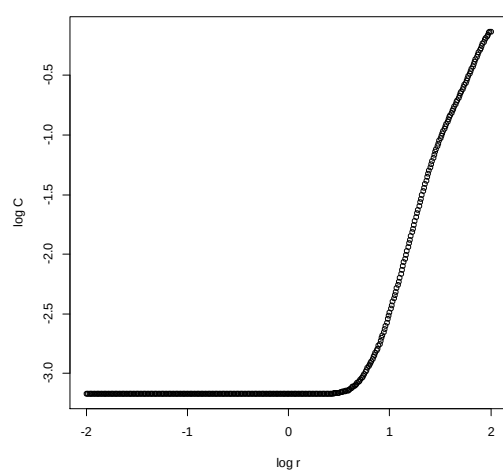
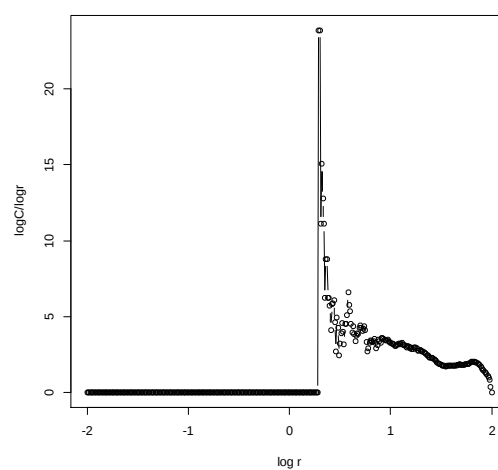
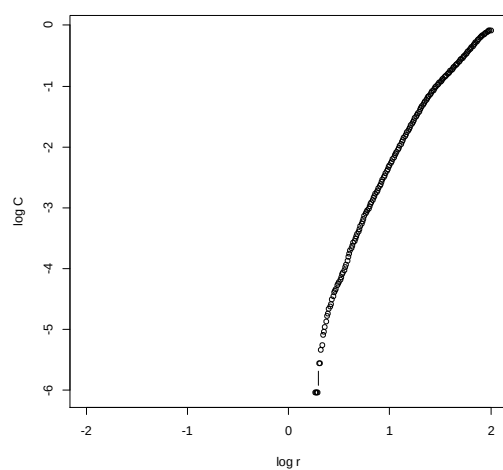
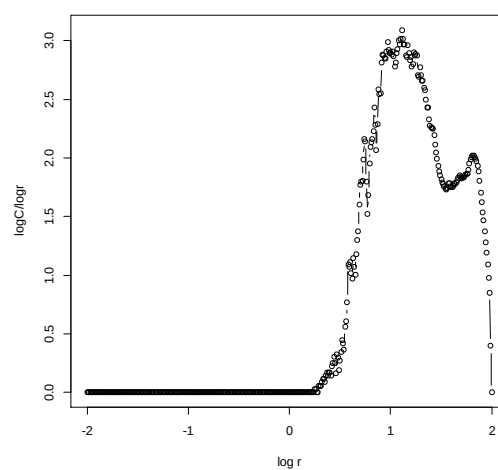
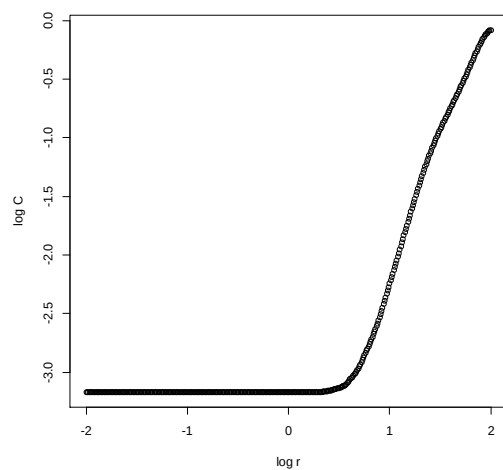


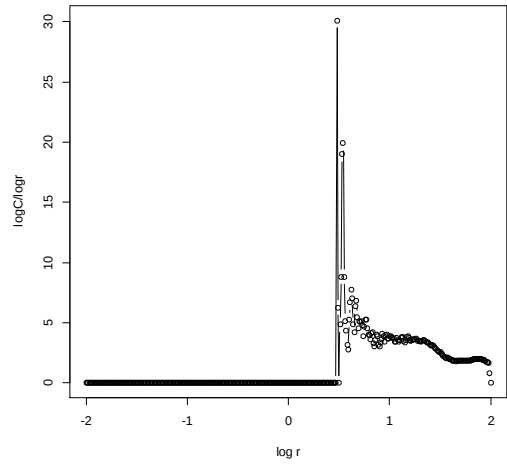
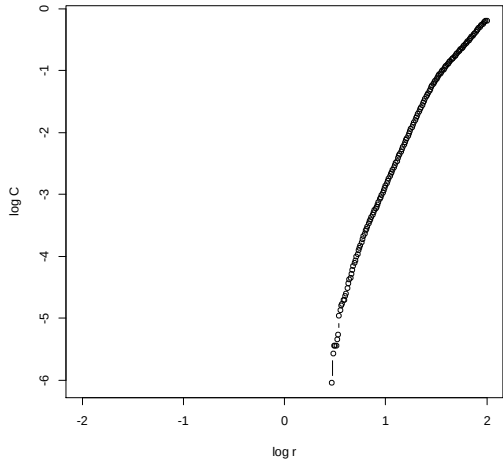
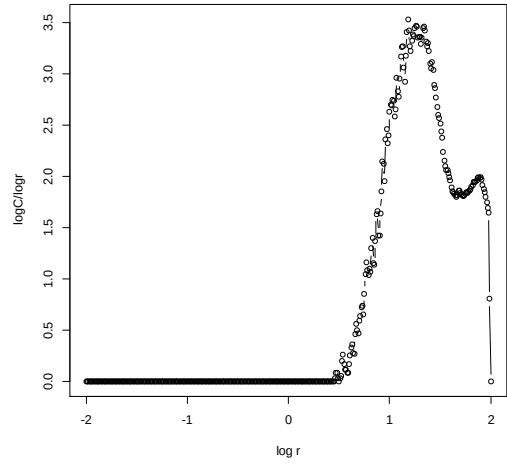
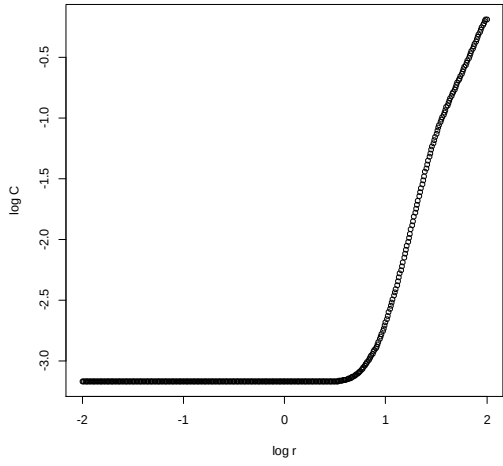
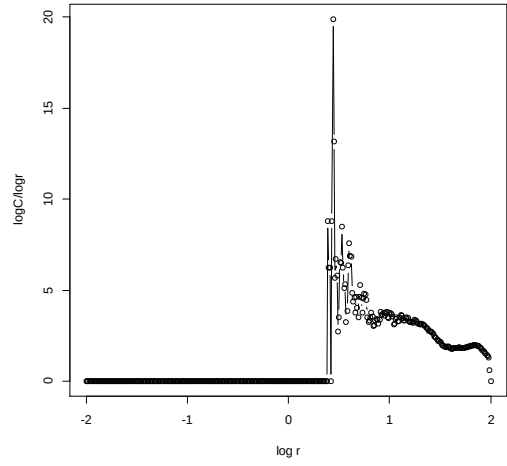
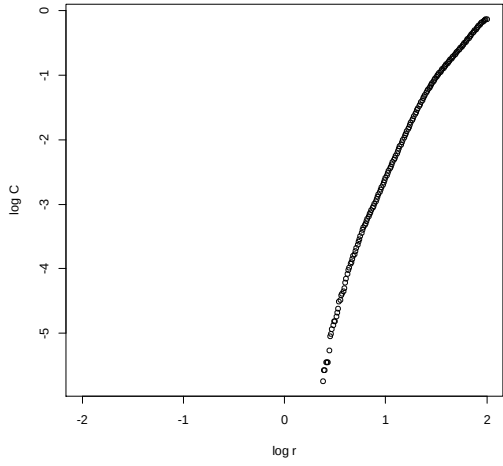


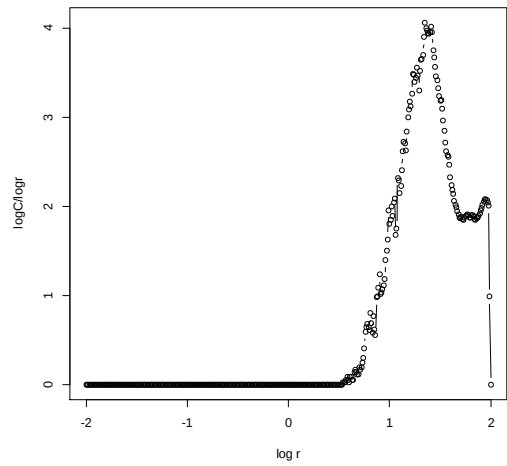
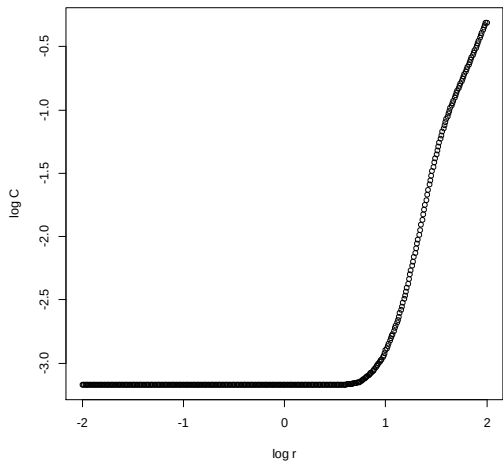
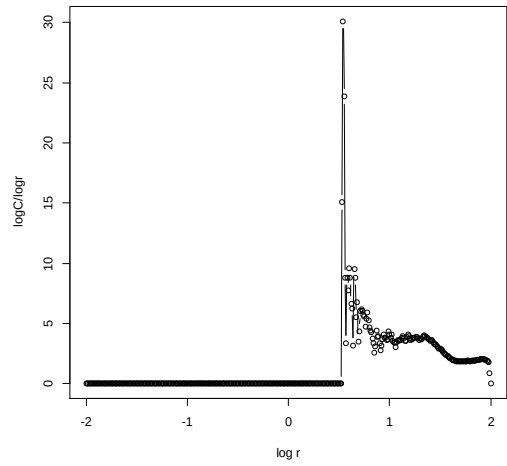
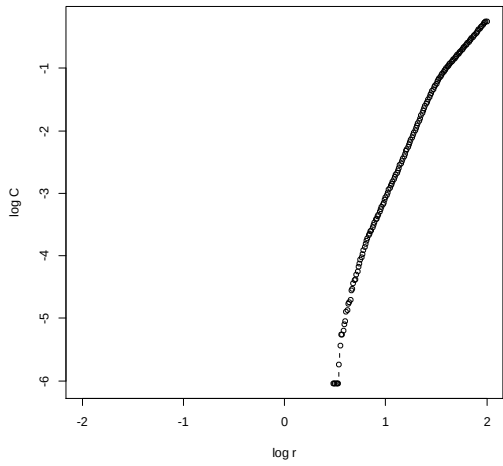
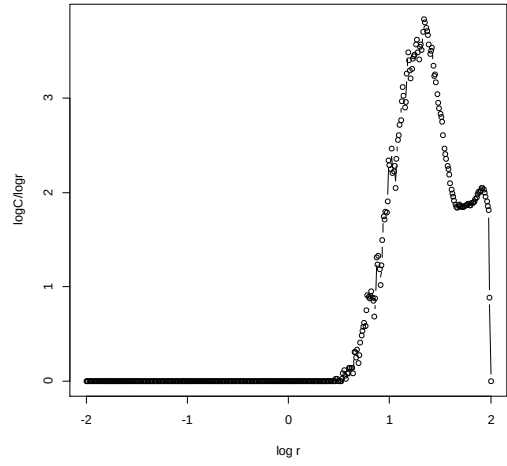
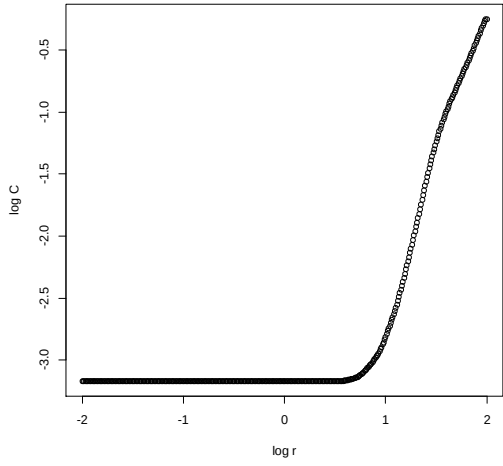
RH ago/03

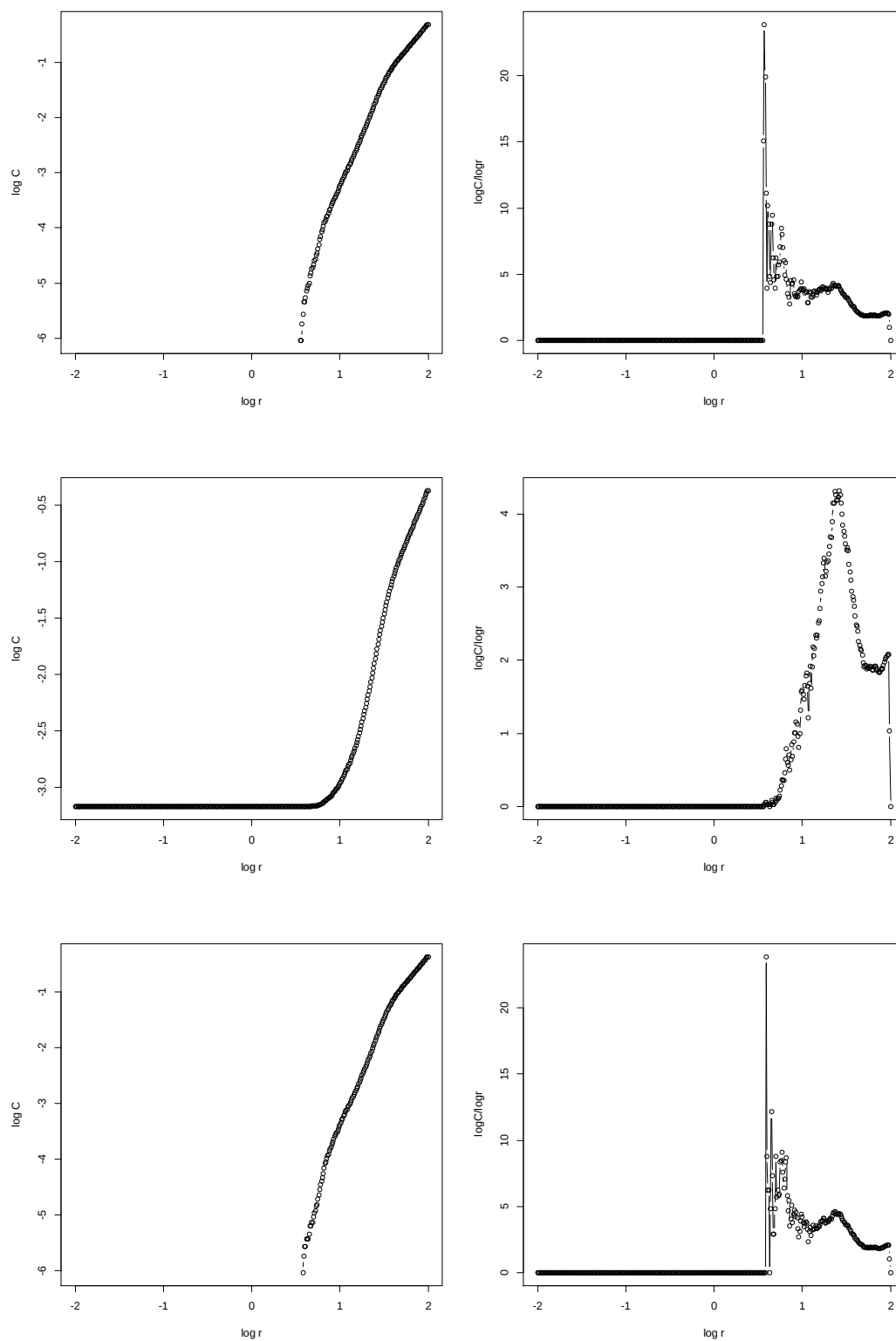


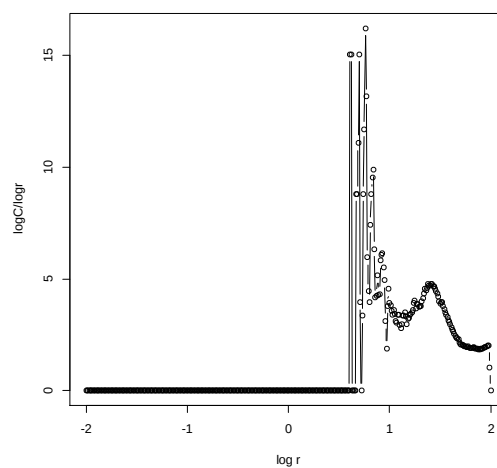
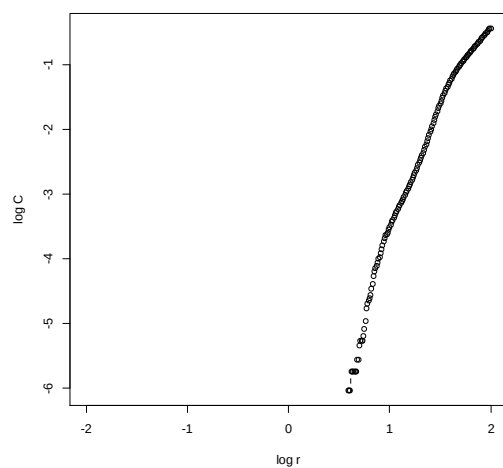
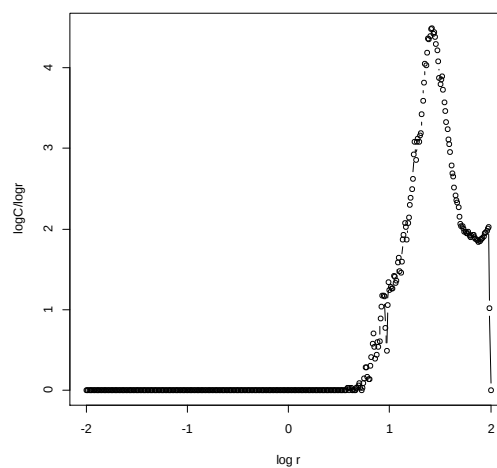
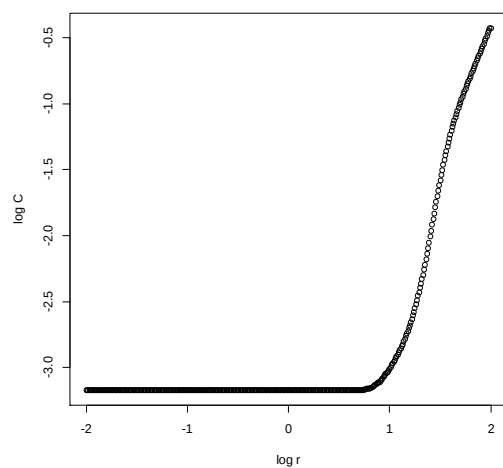


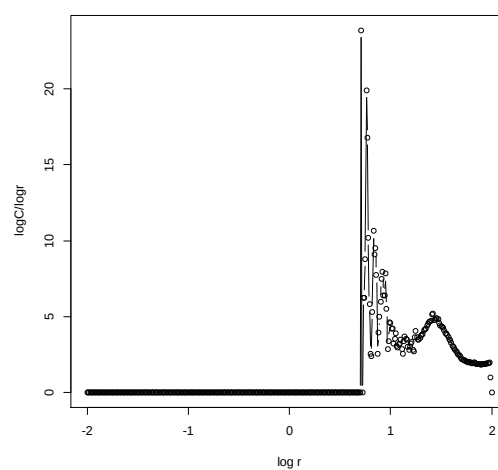
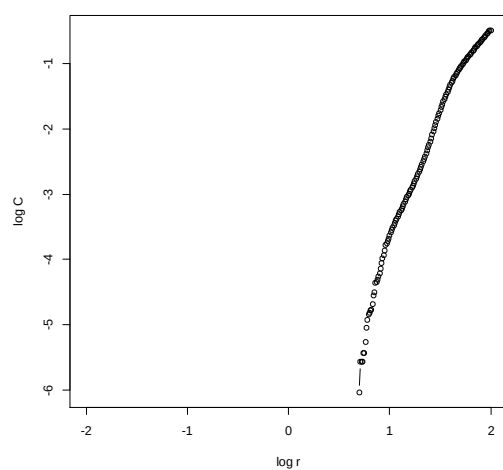
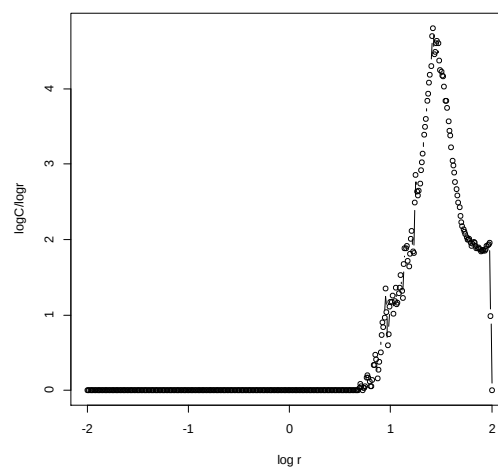
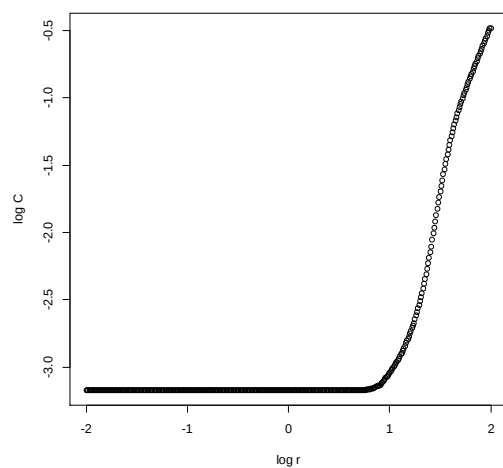




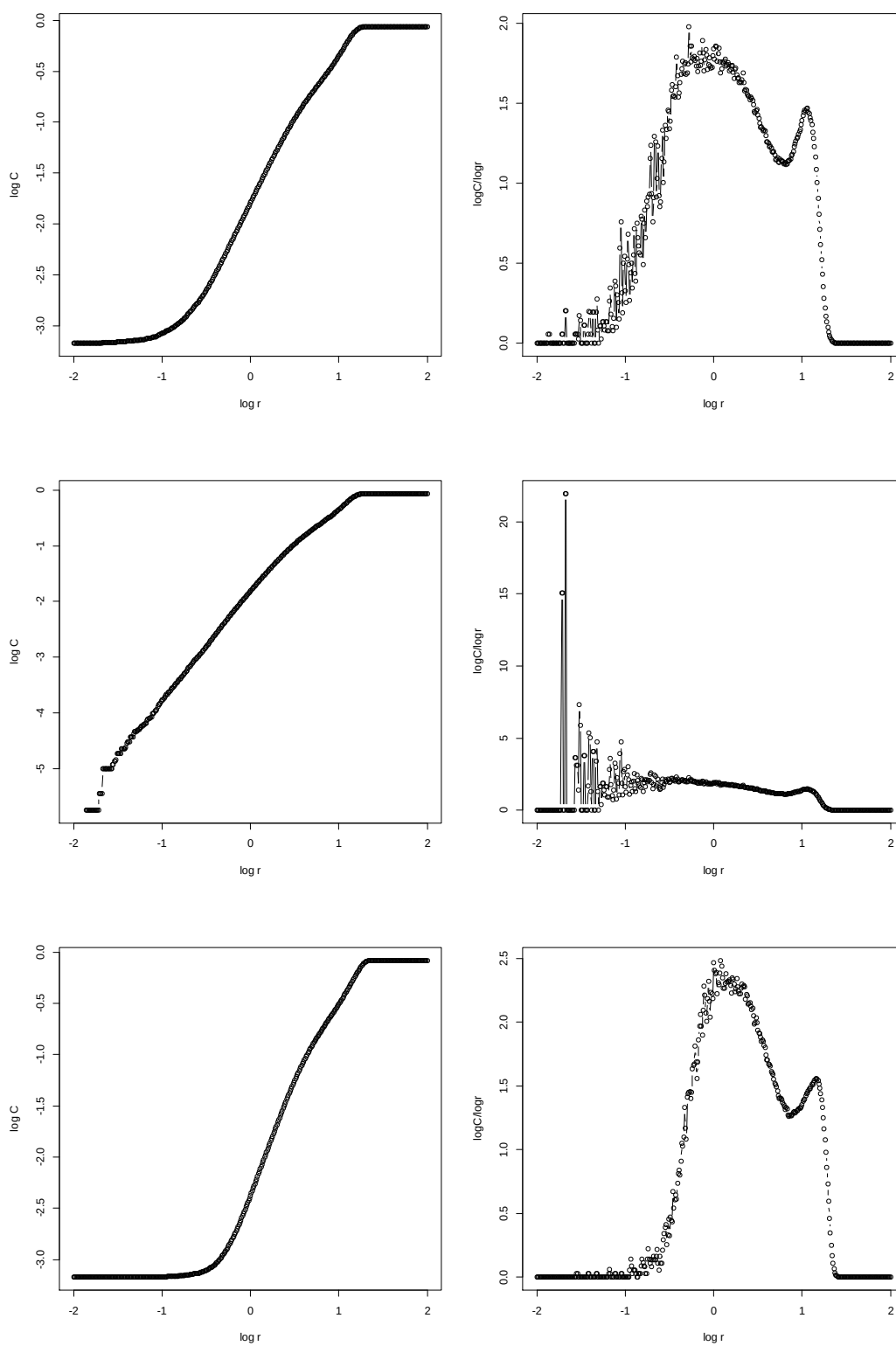


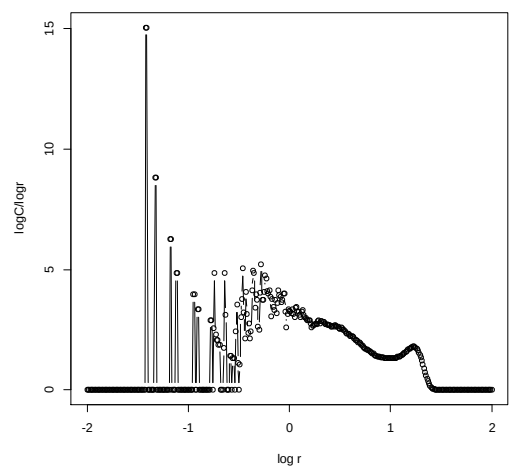
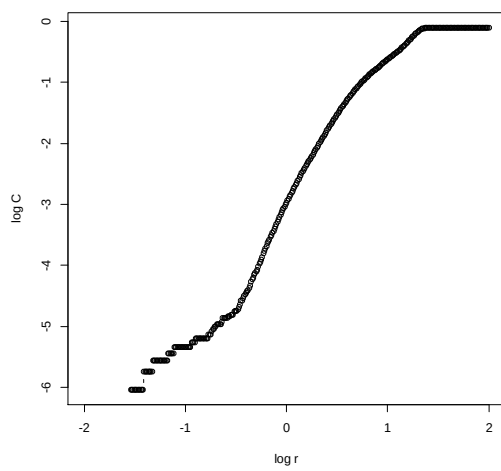
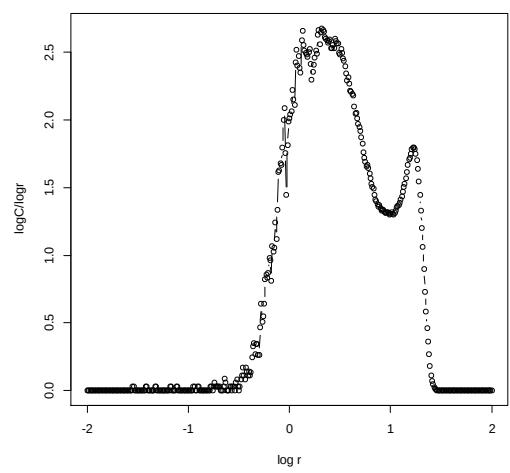
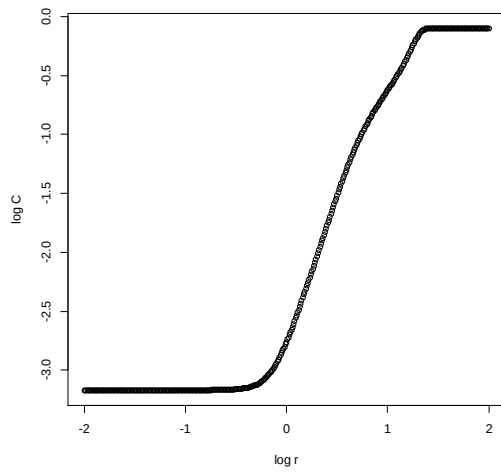
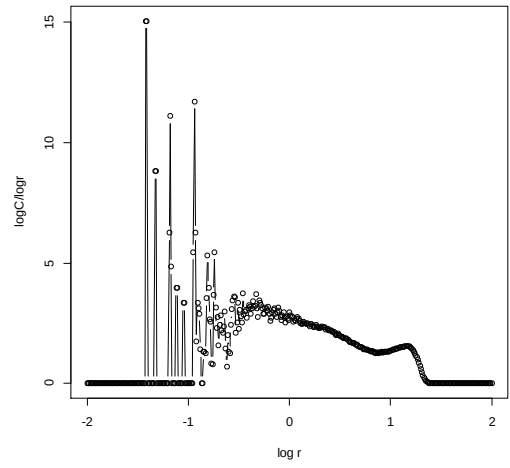
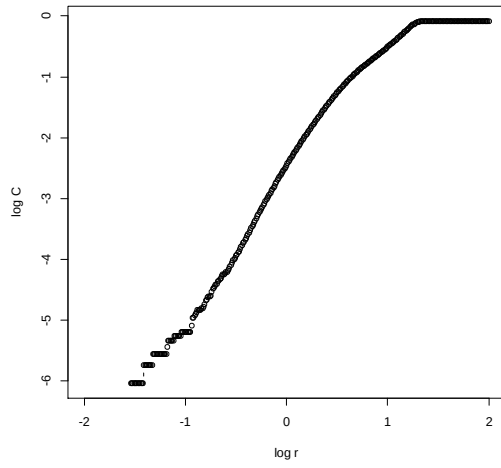


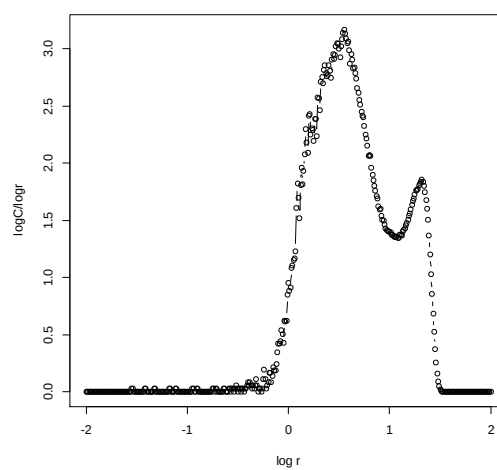
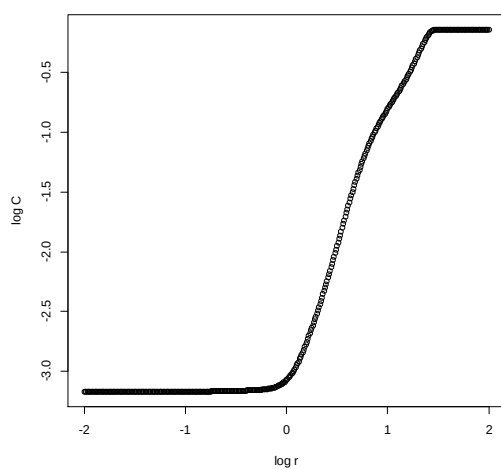
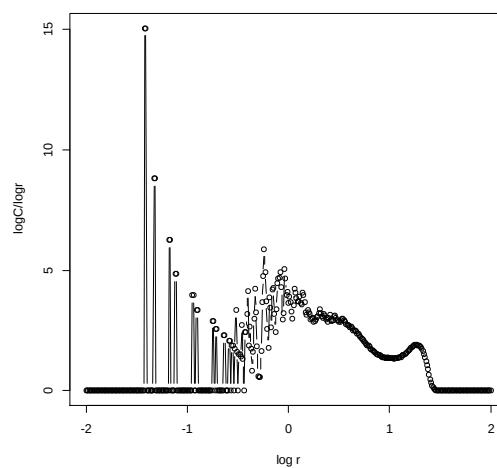
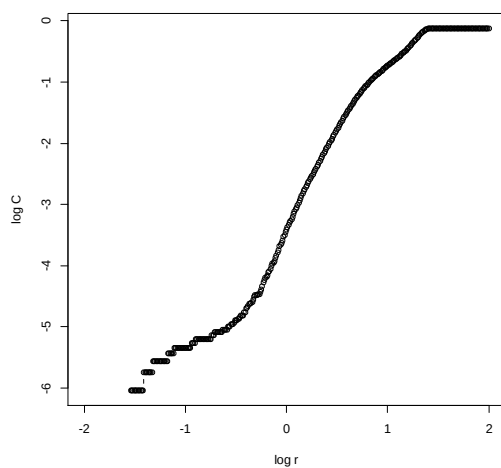
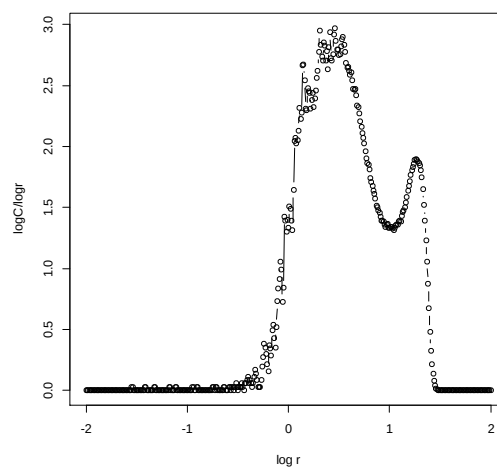
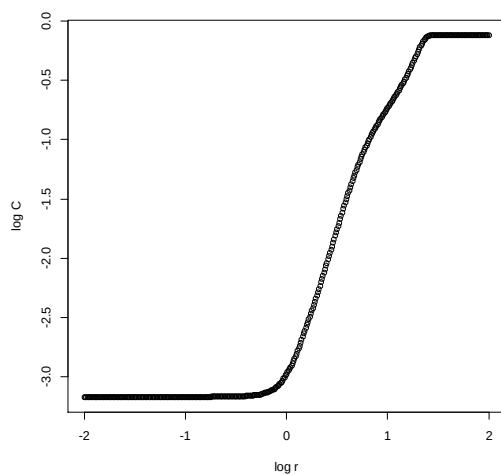


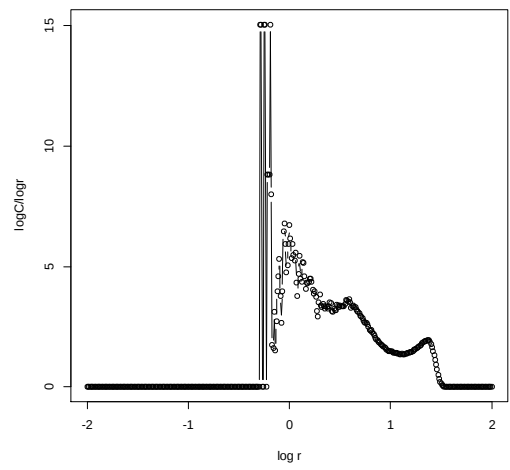
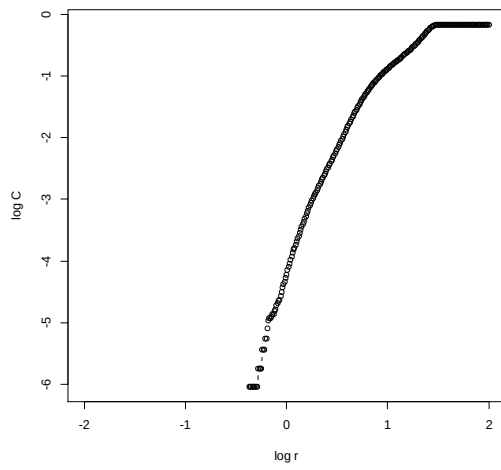
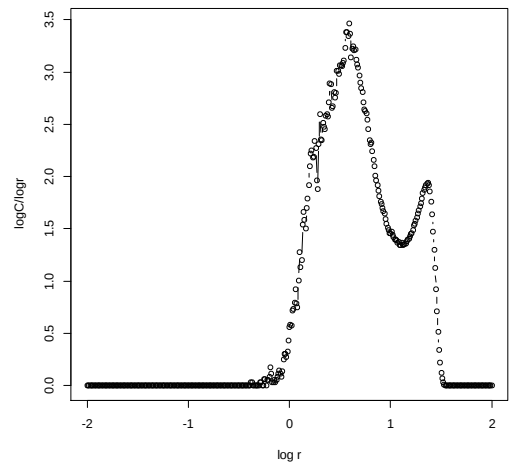
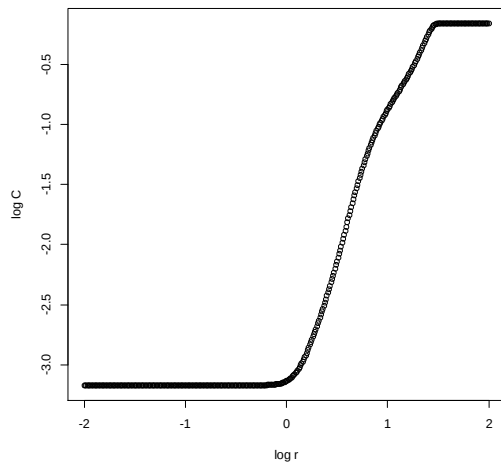
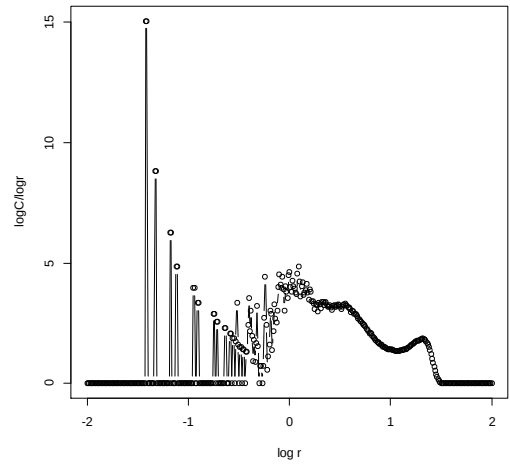
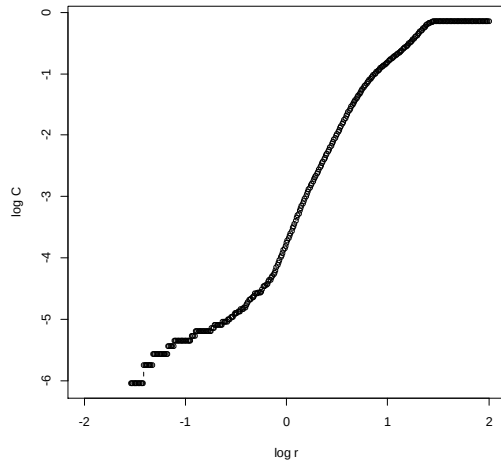


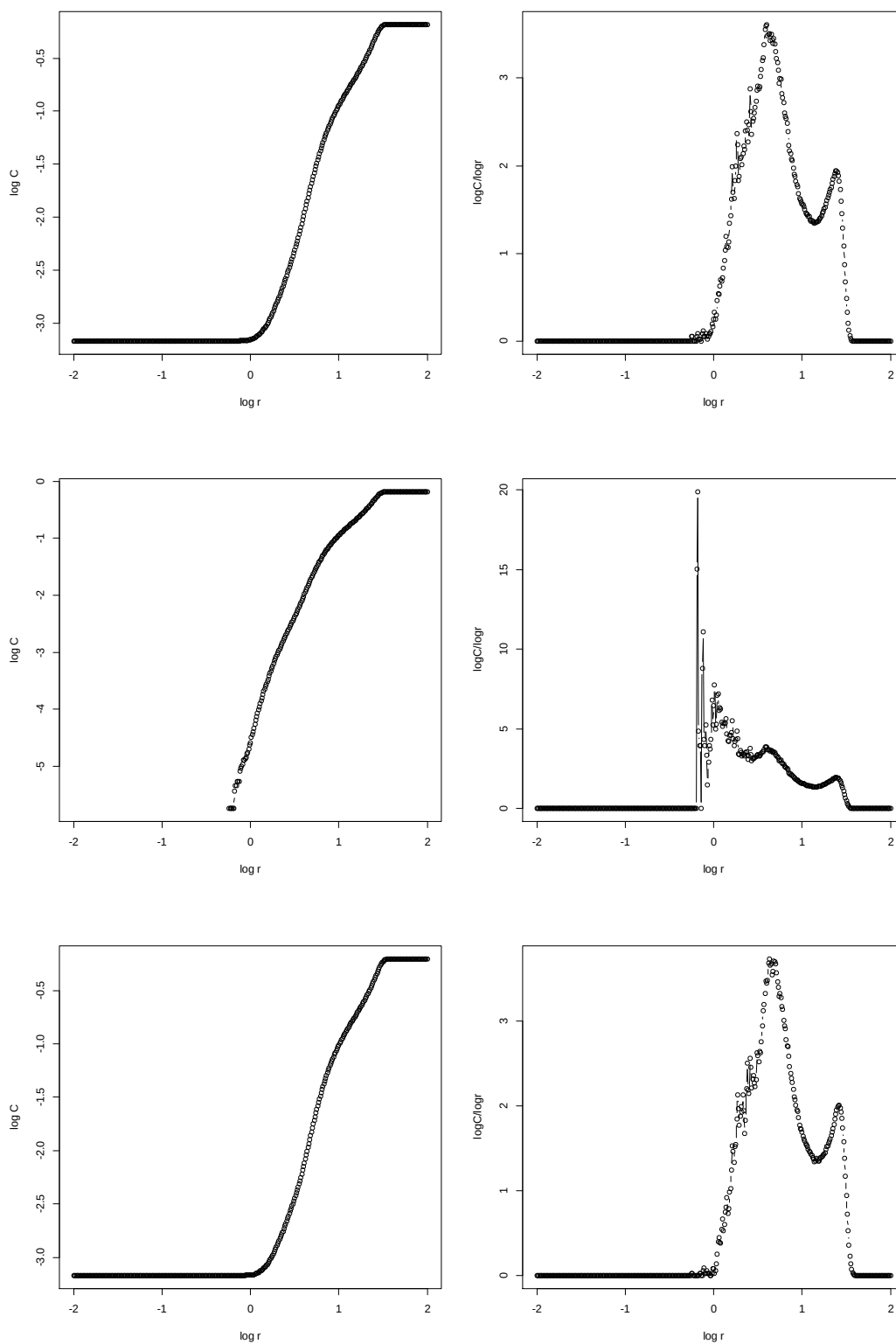
T40 ago/03

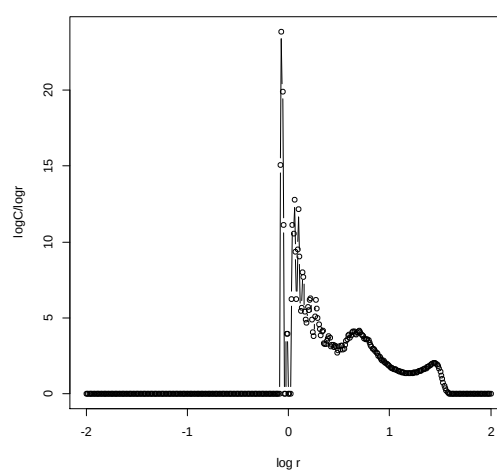
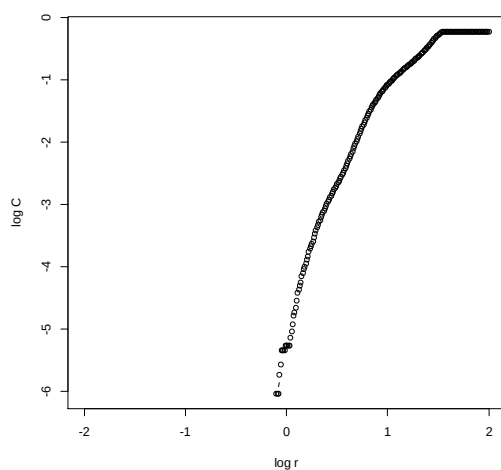
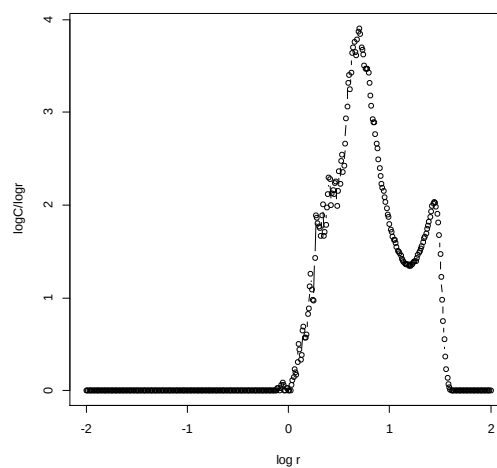
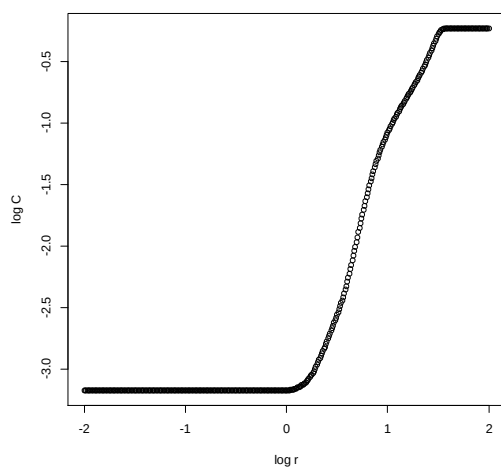
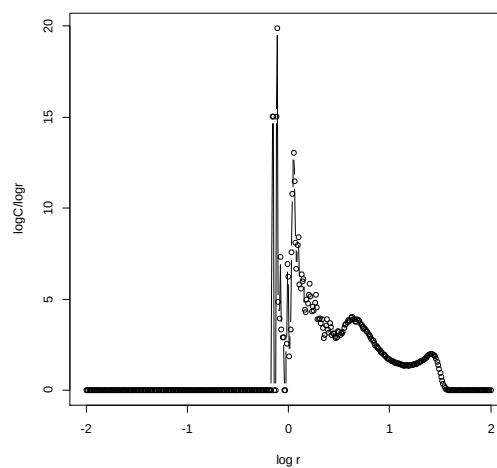
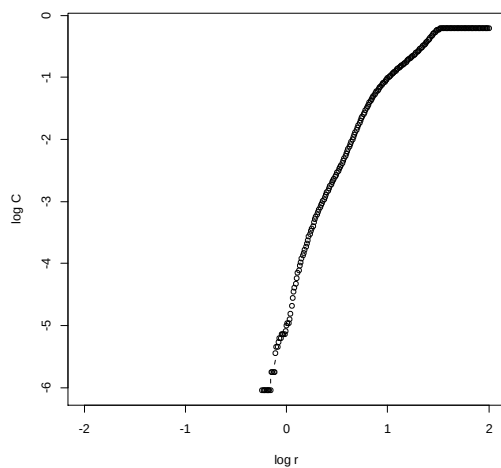


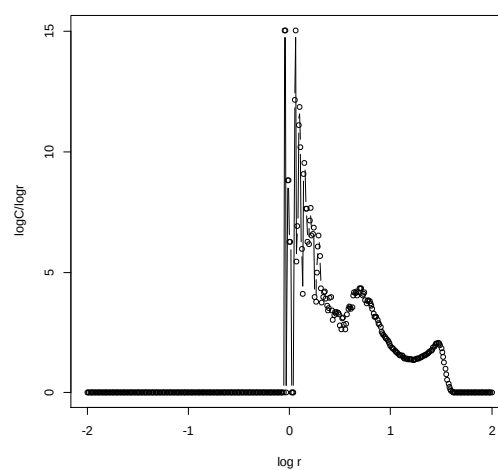
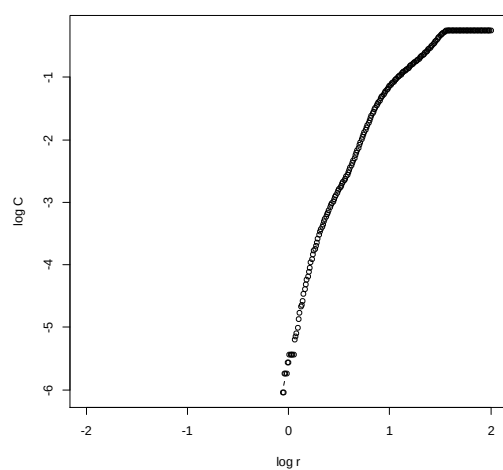
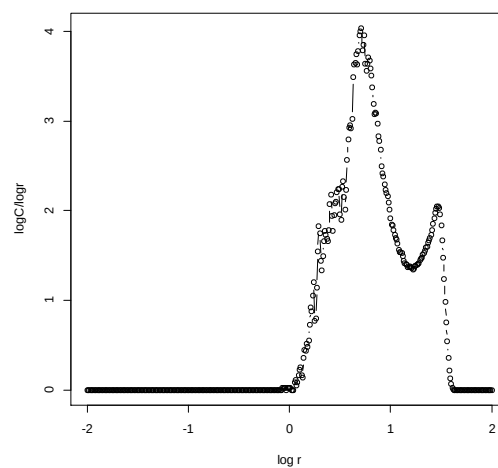
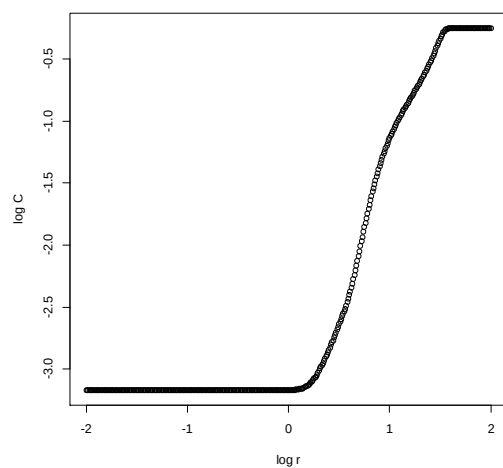


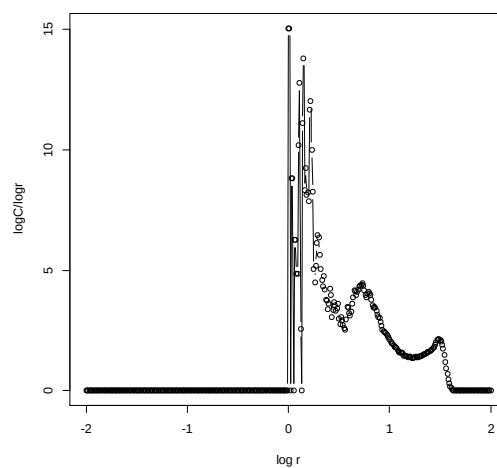
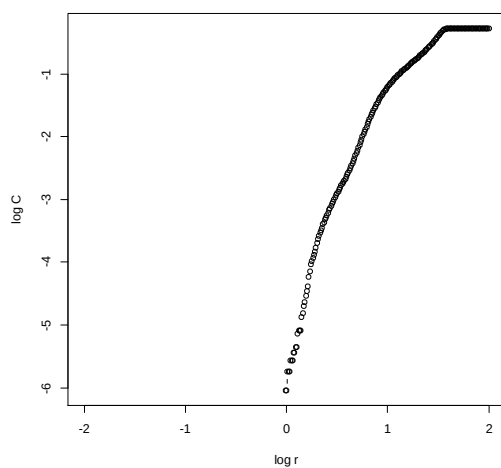
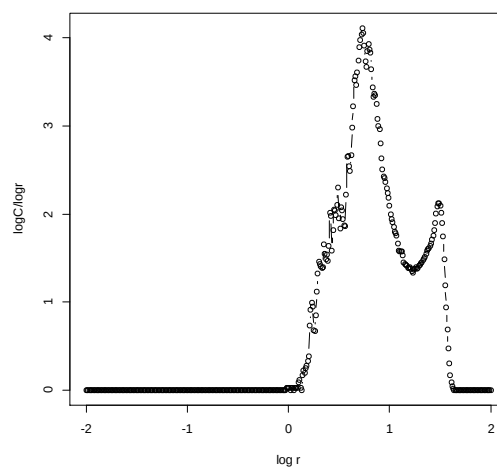
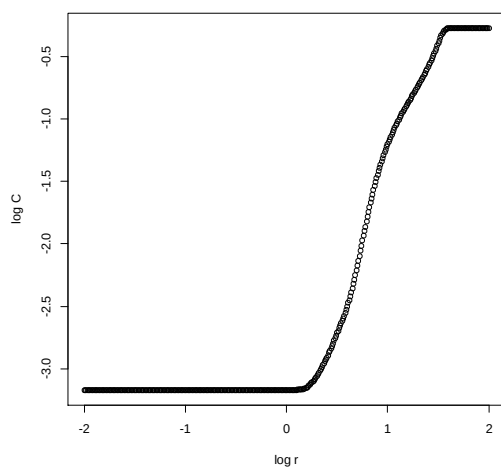




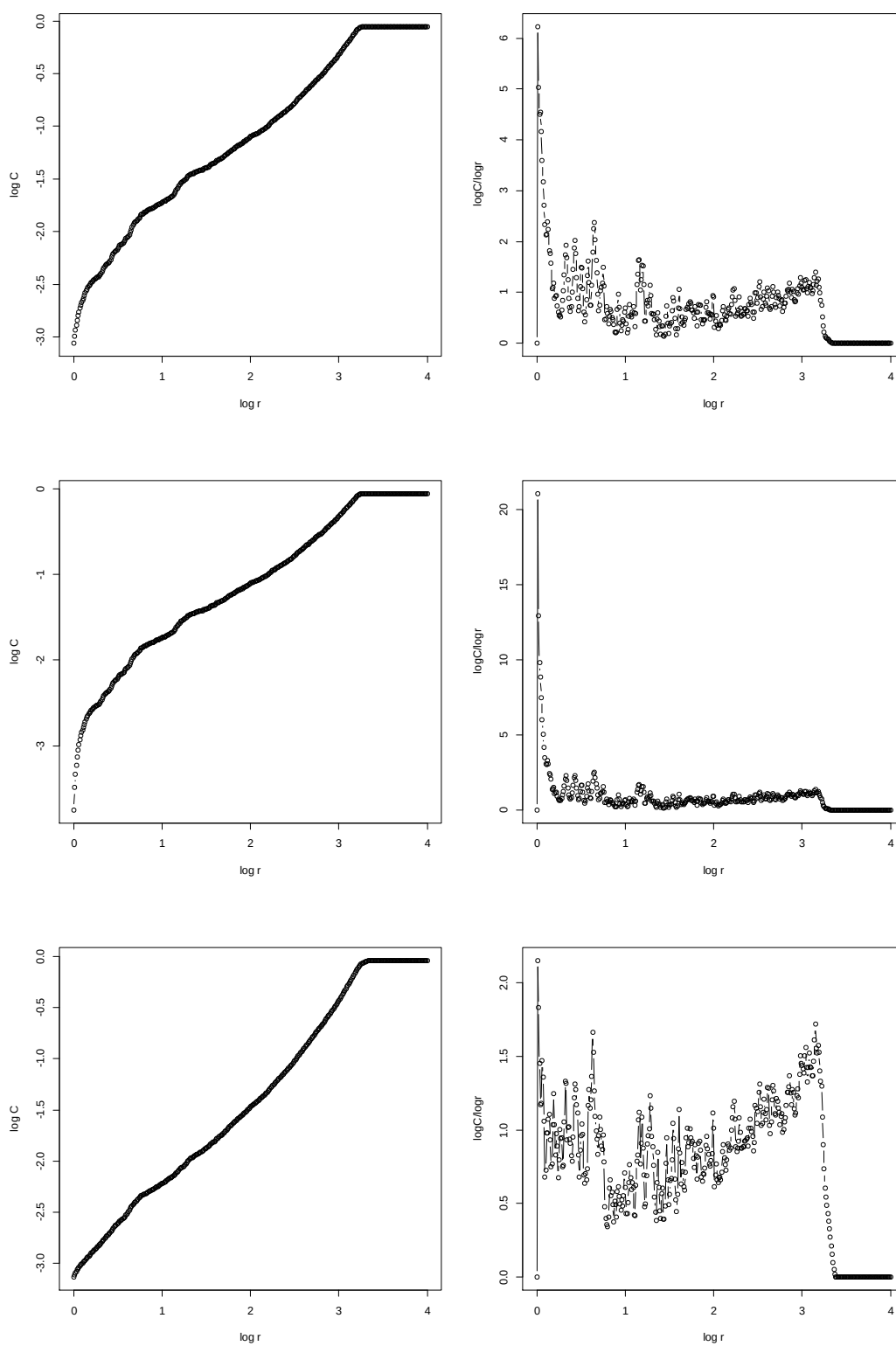


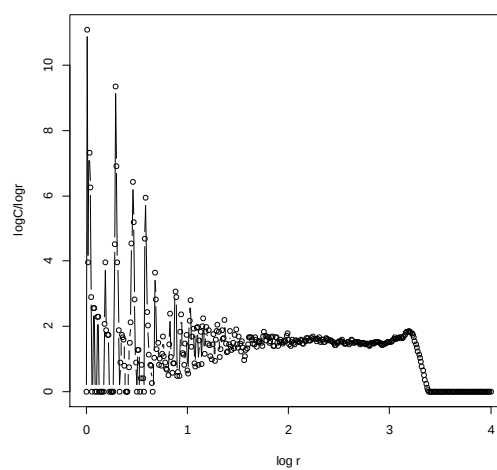
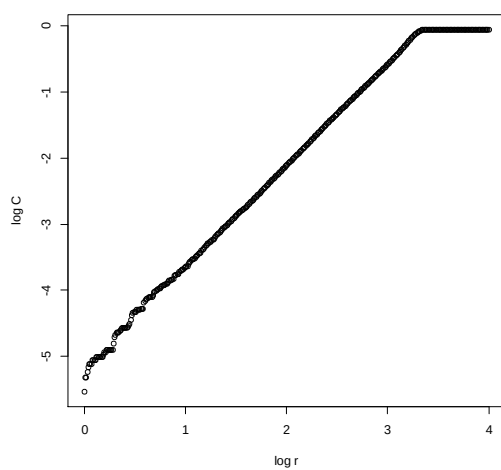
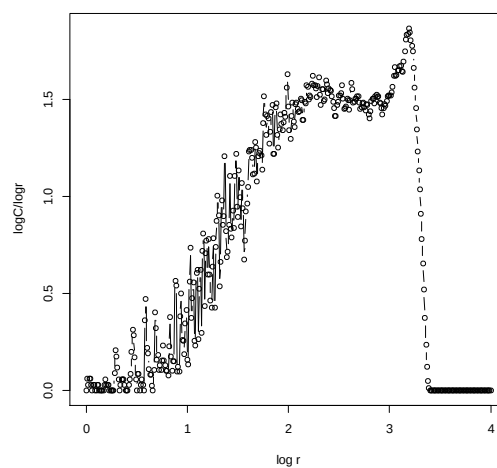
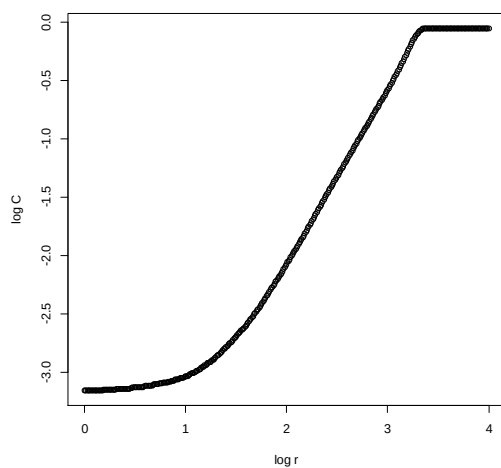
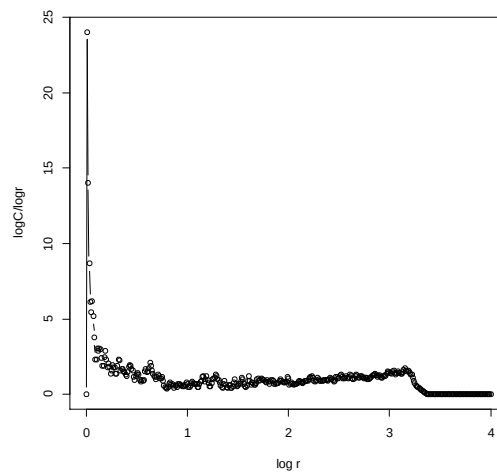
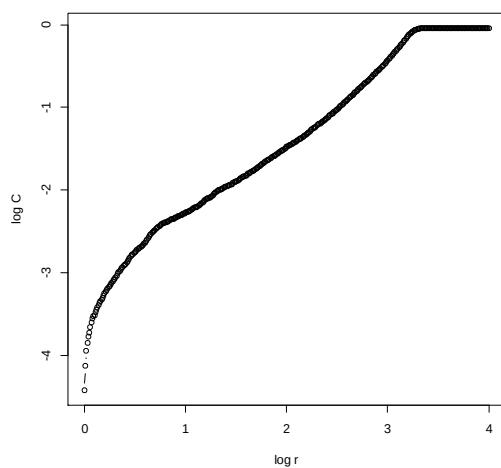


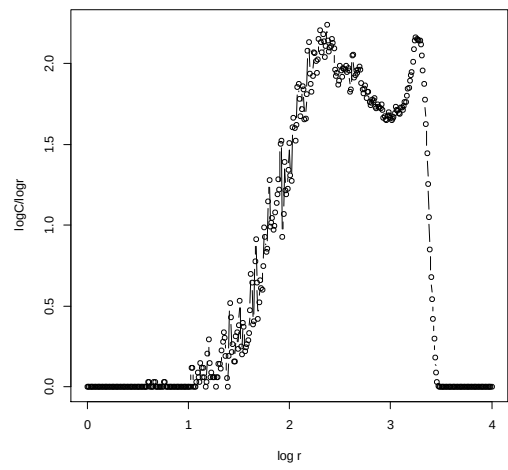
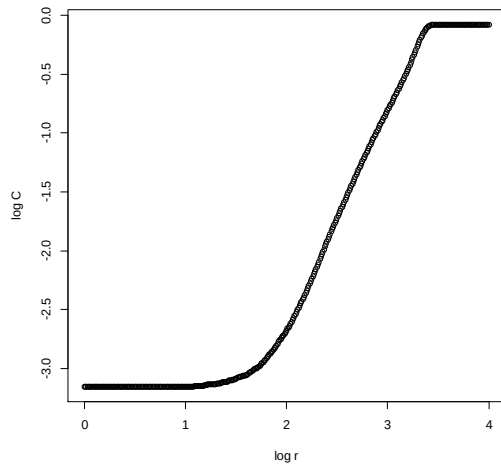
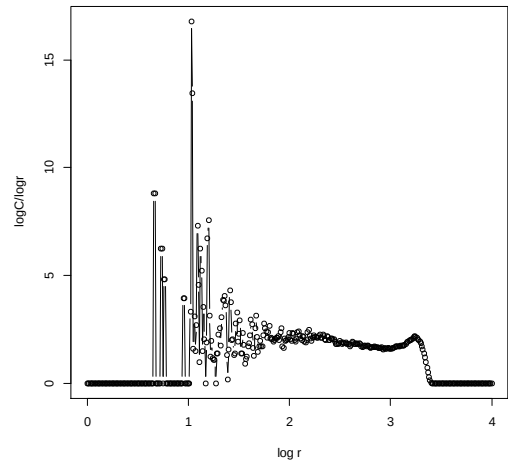
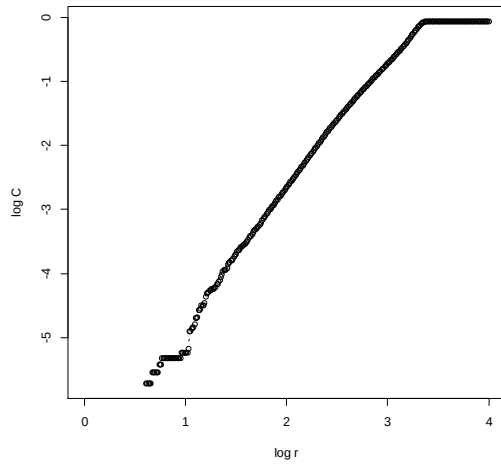
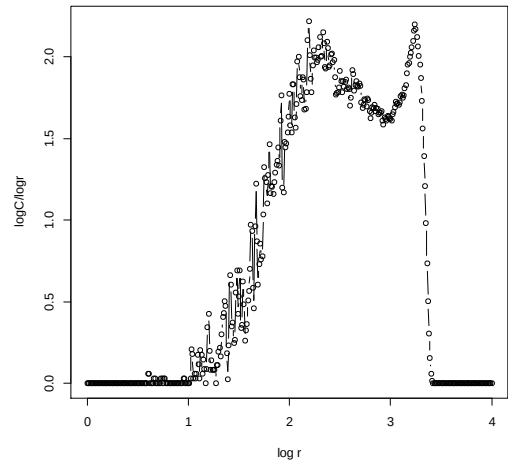
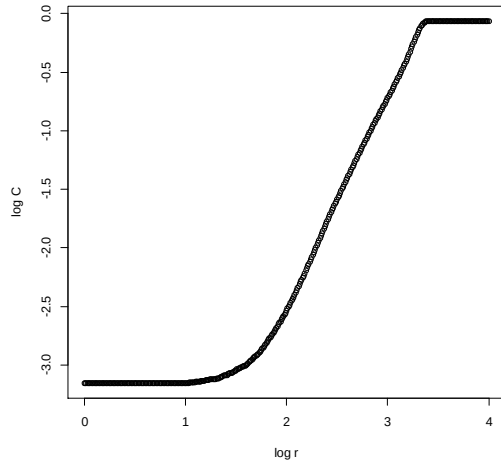


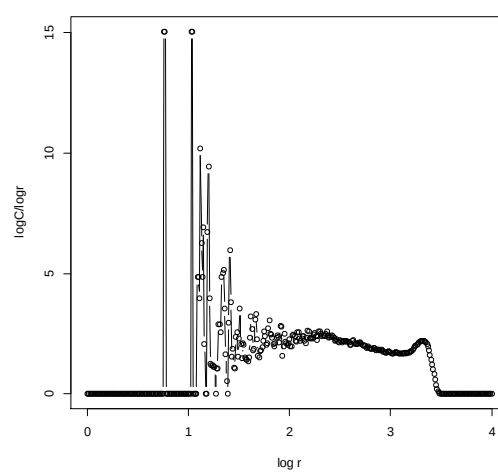
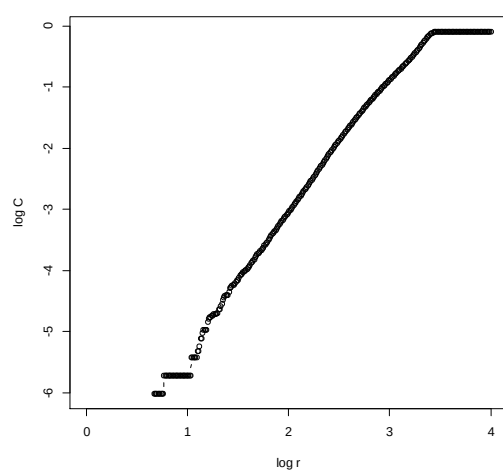
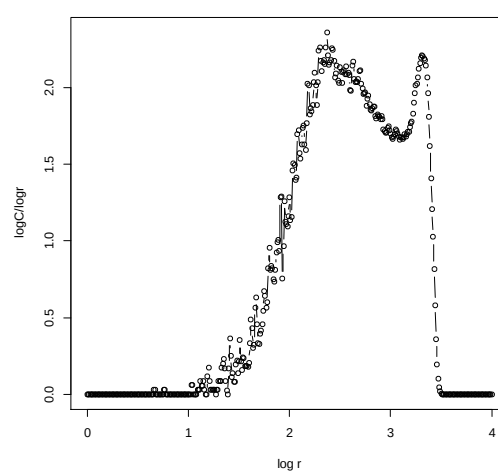
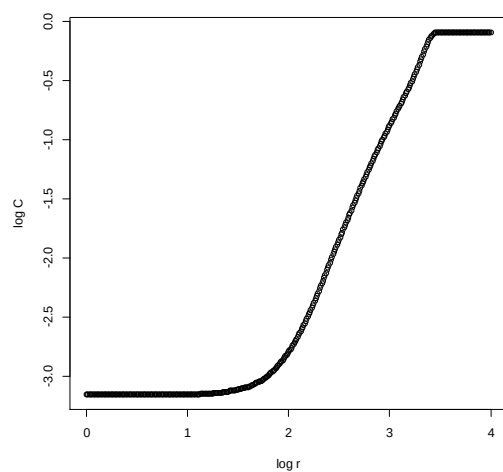
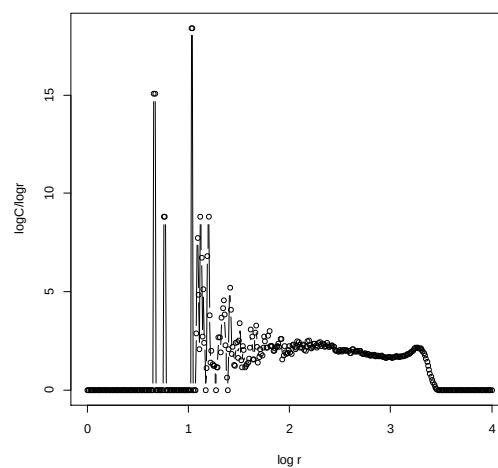
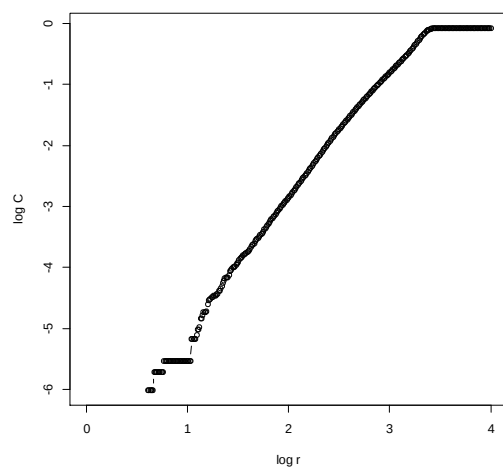


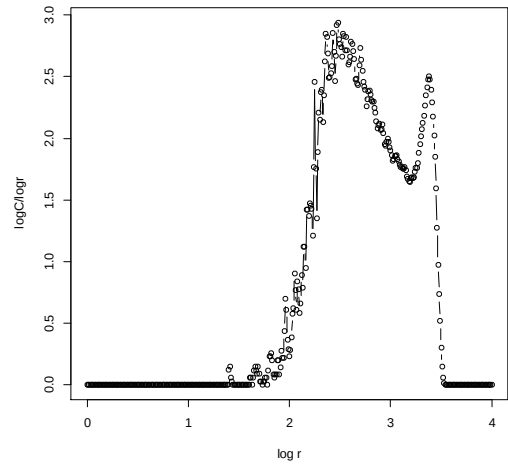
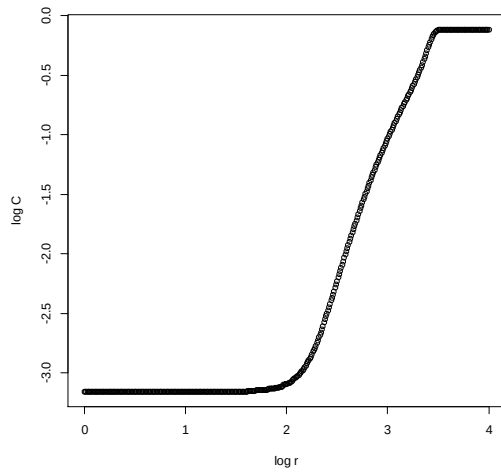
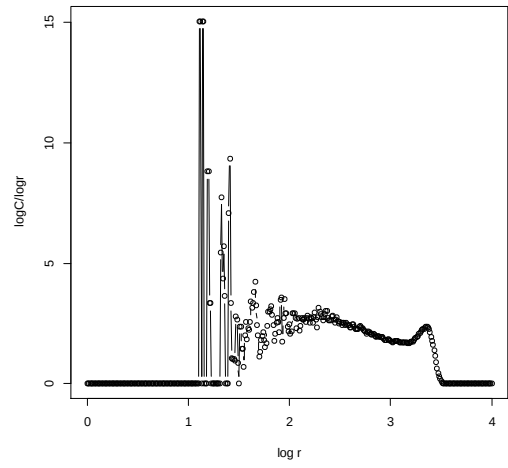
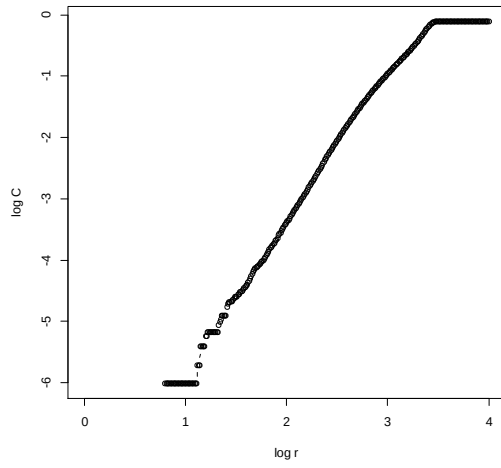
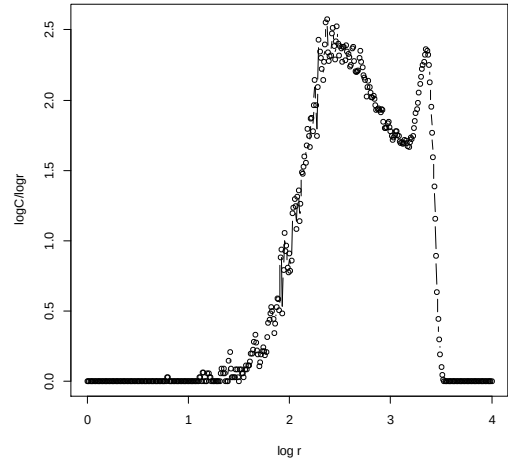
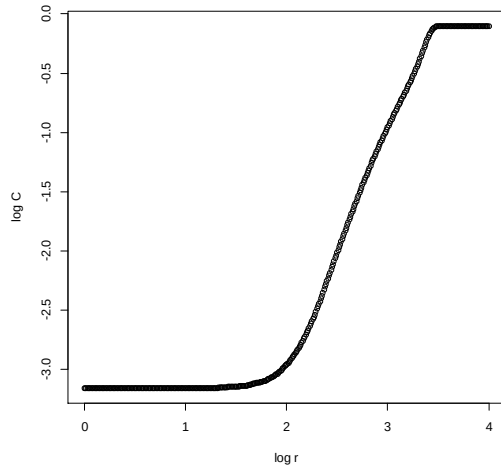
PARI set/03

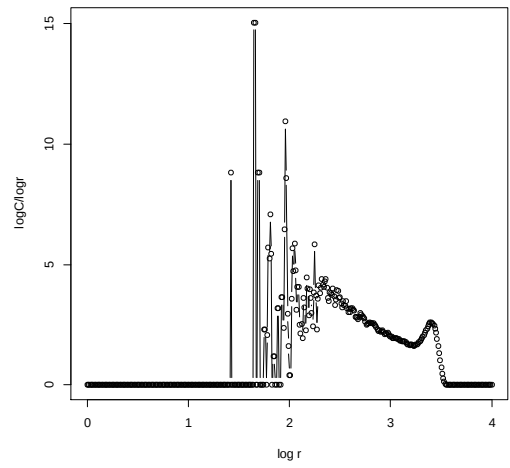
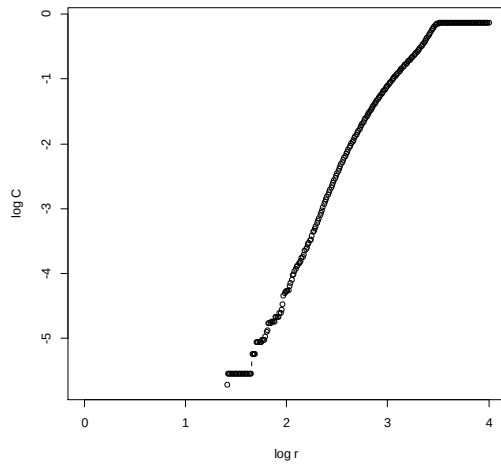
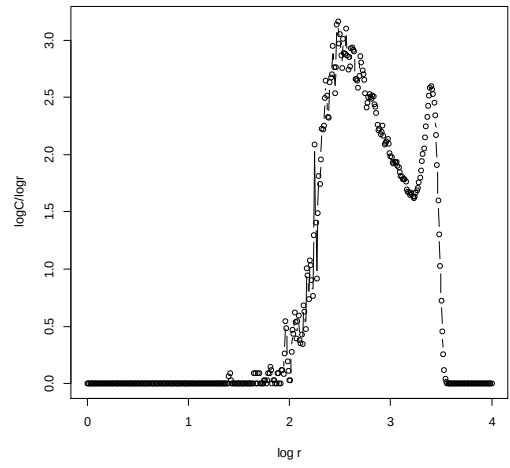
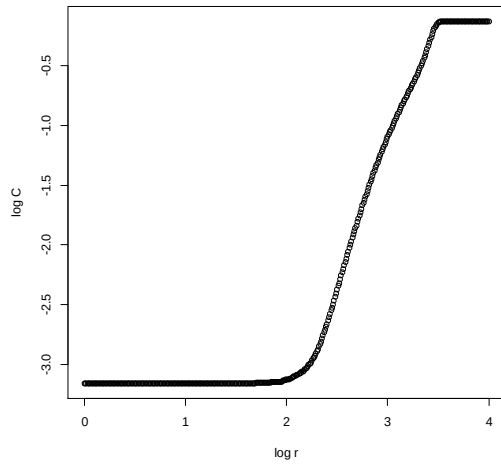
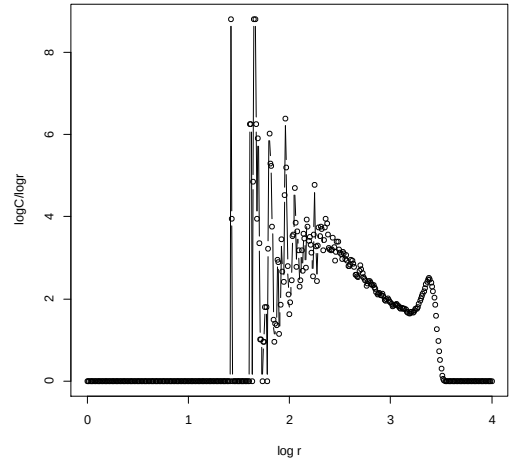
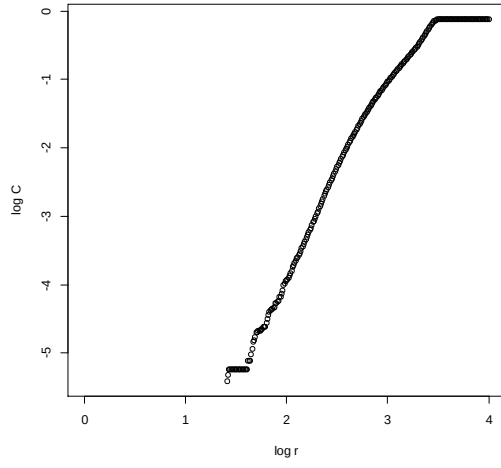


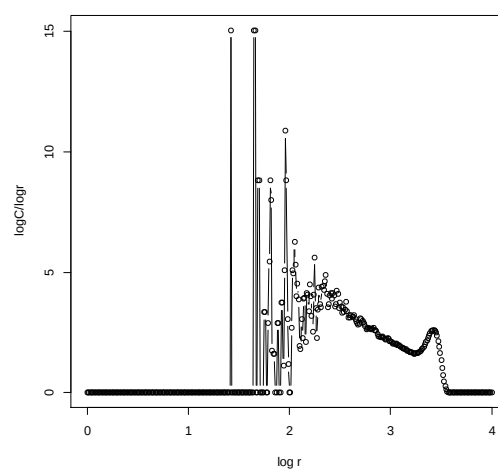
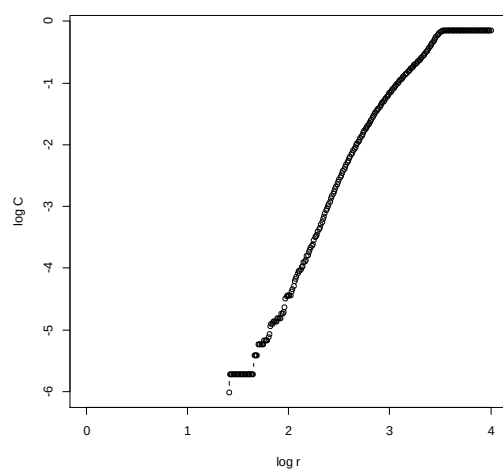
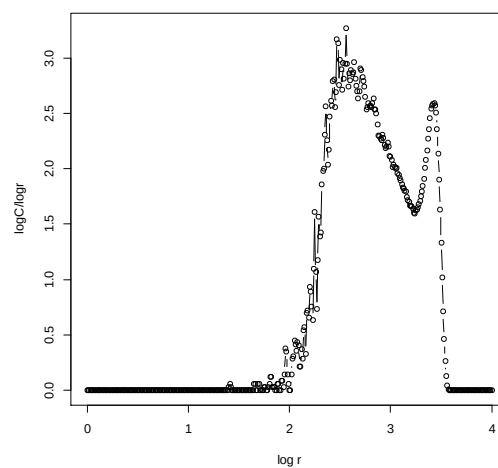
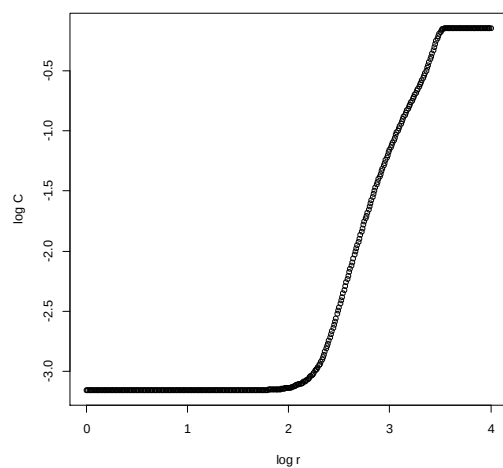


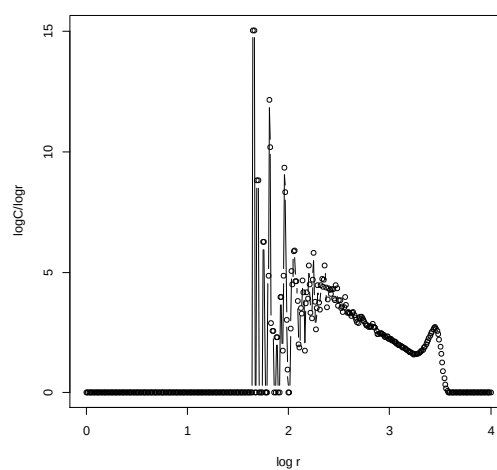
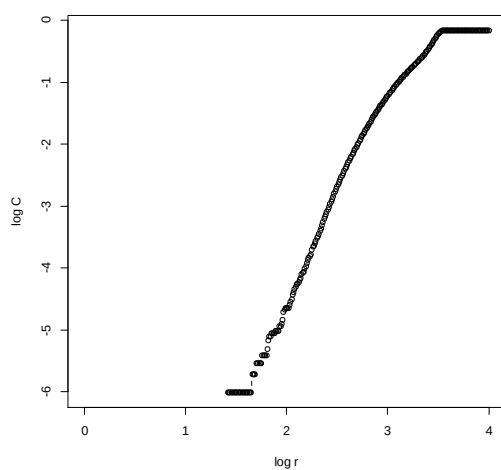
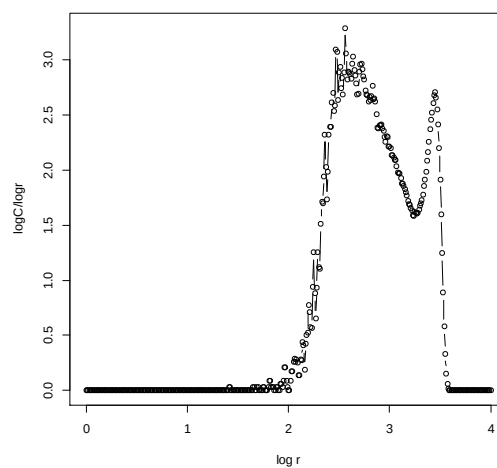
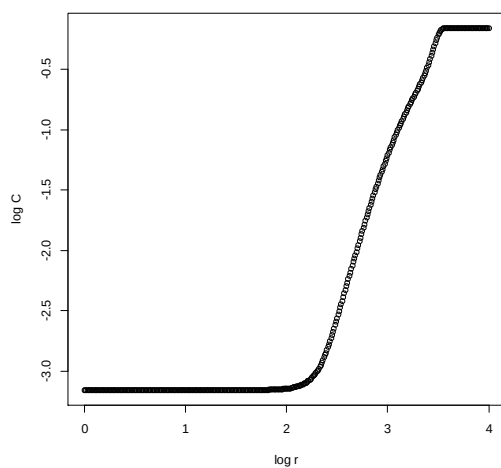




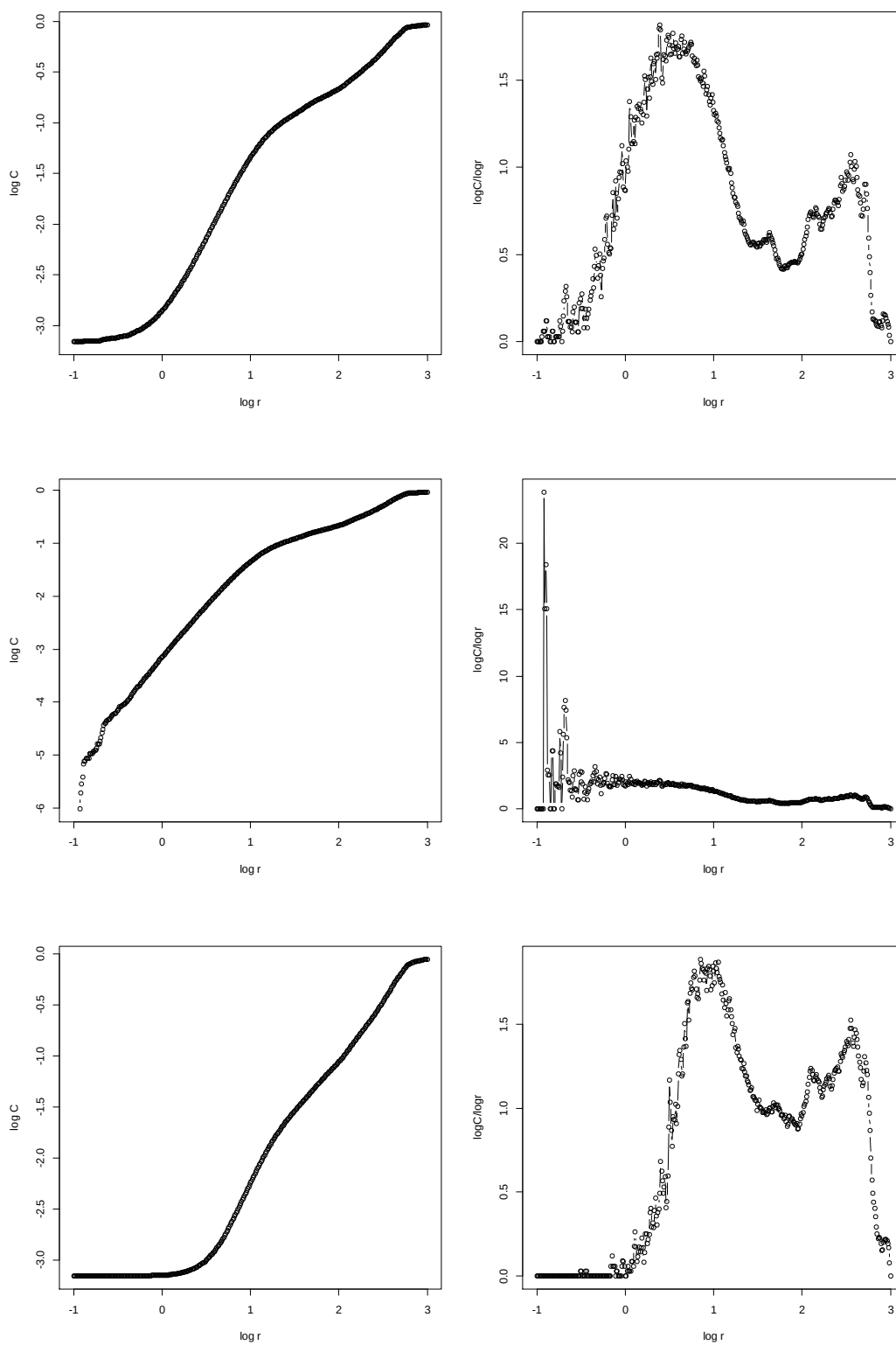


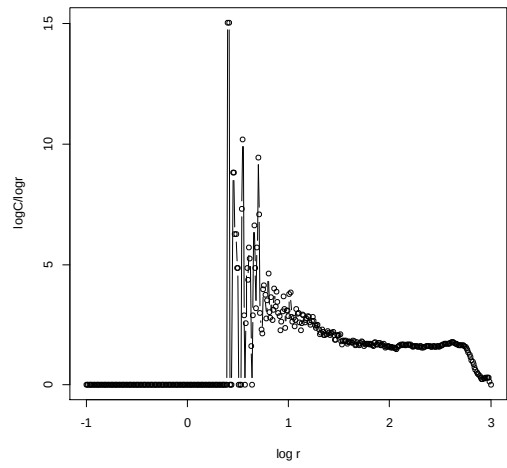
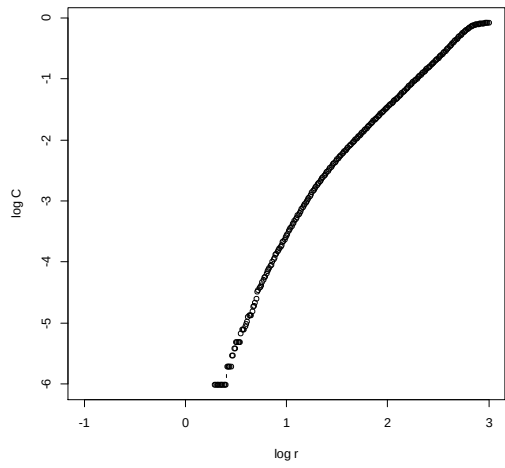
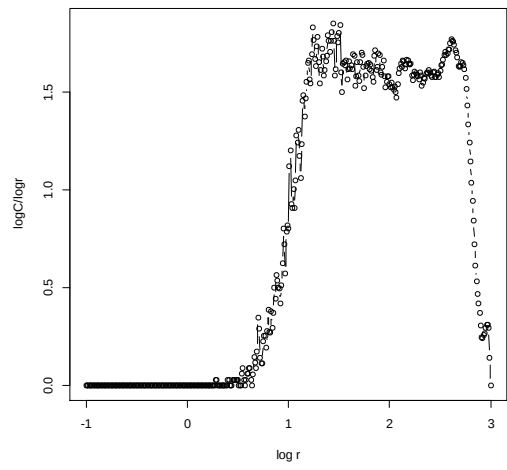
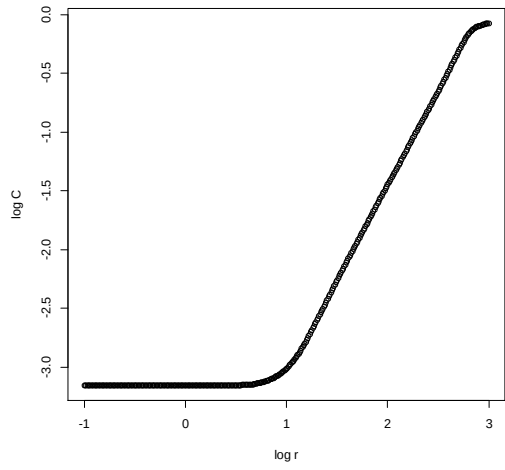
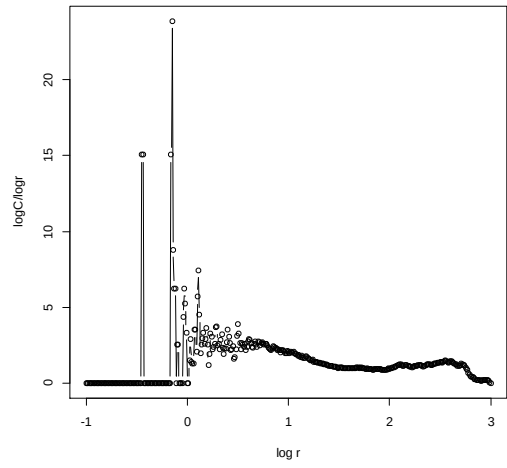
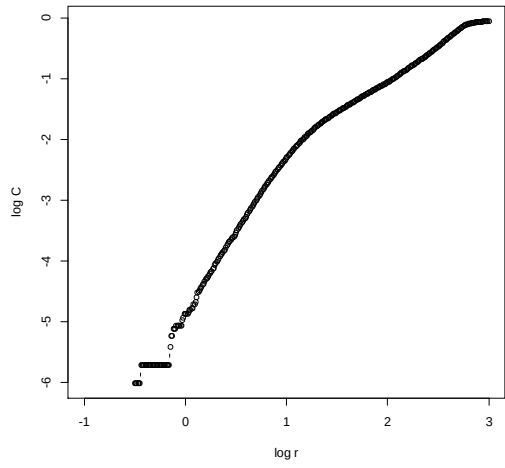


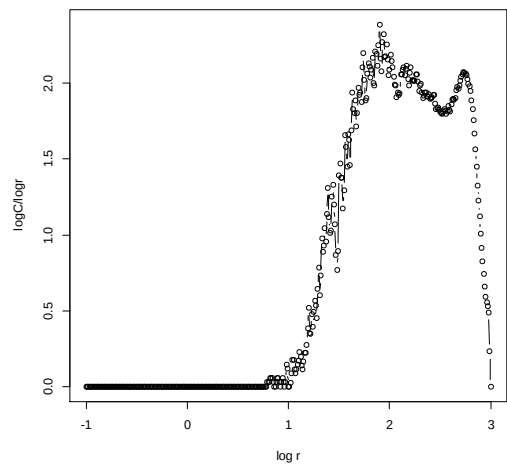
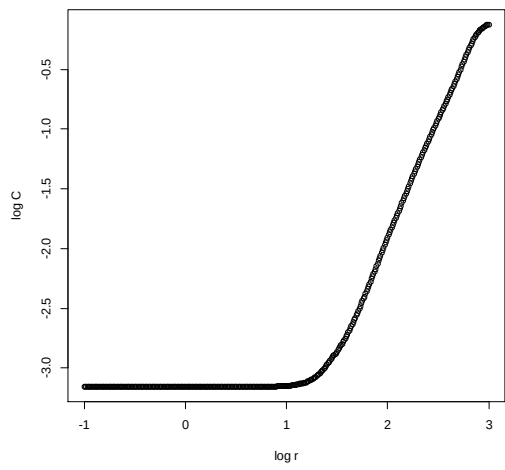
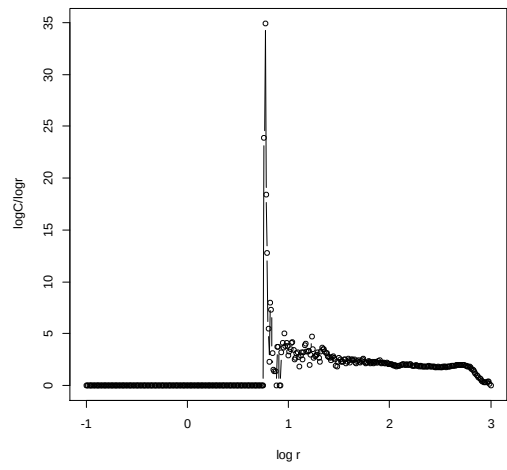
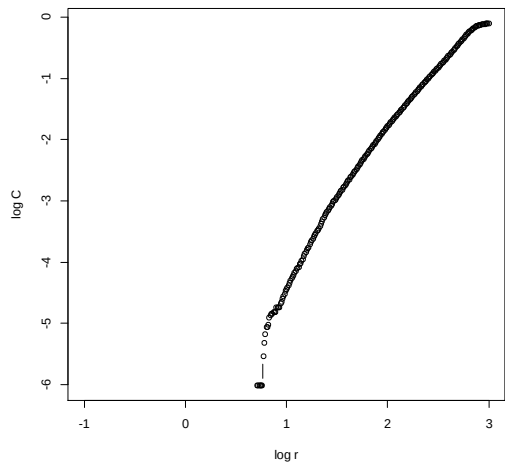
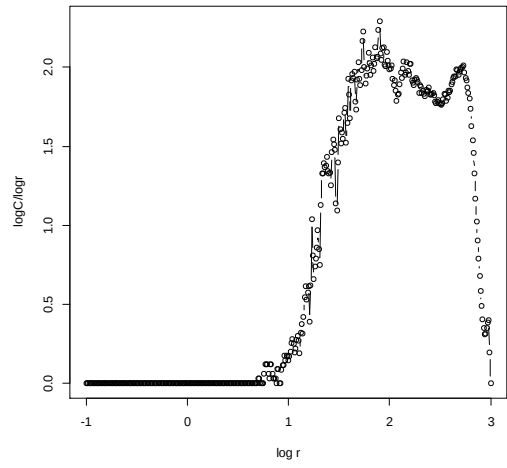
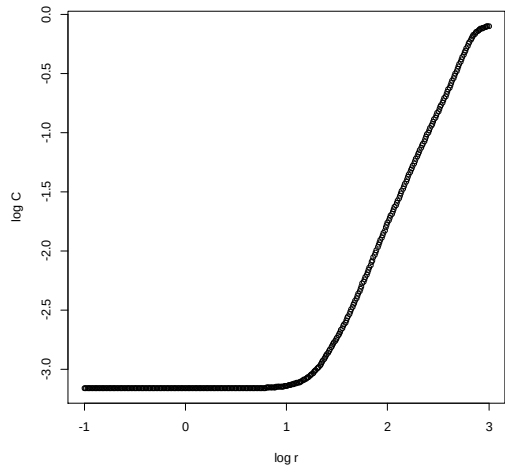


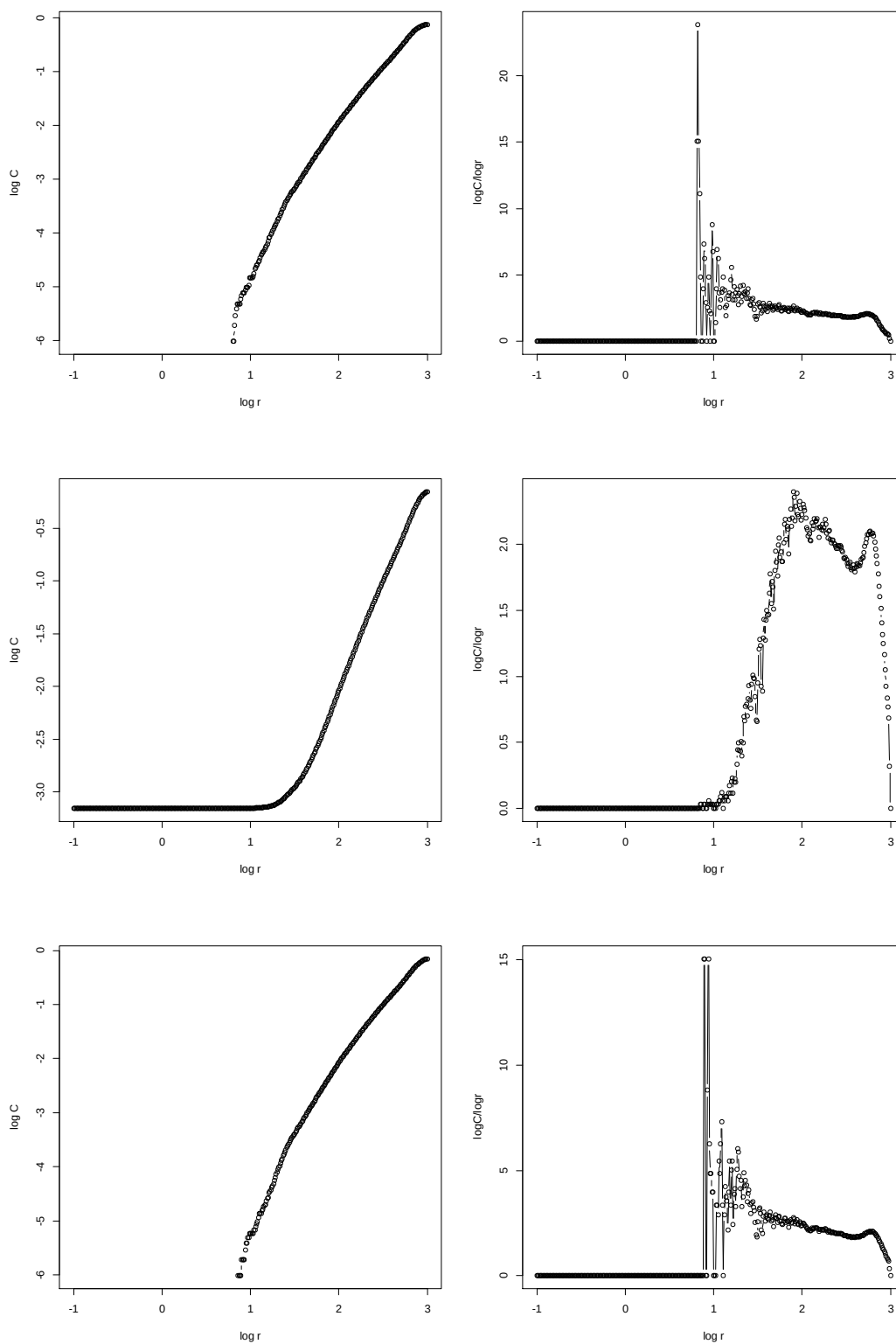


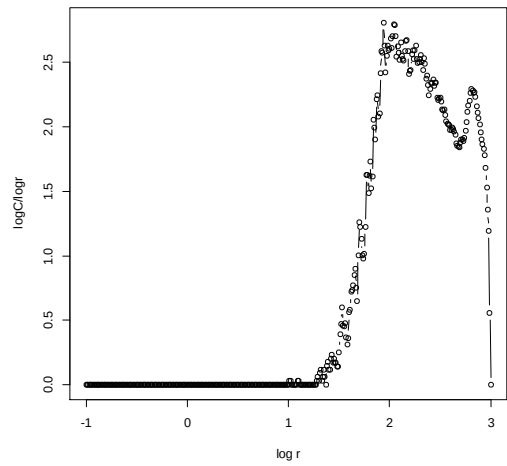
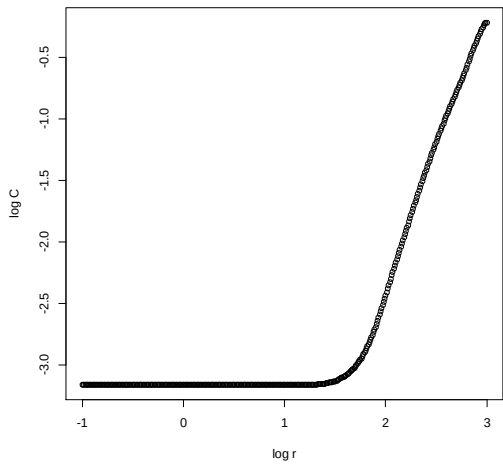
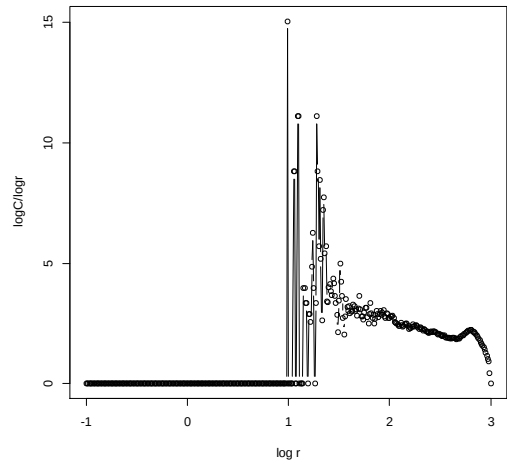
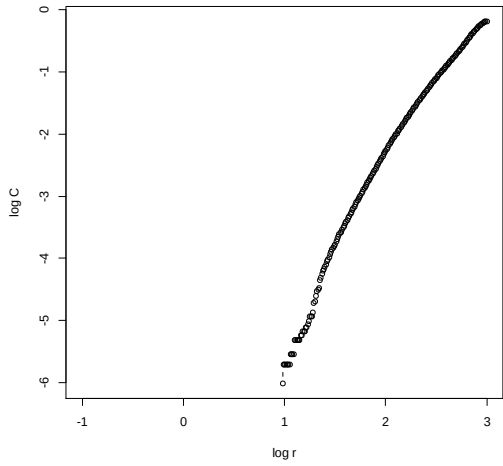
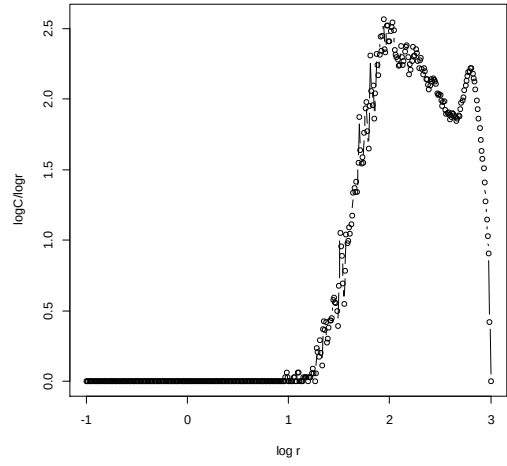
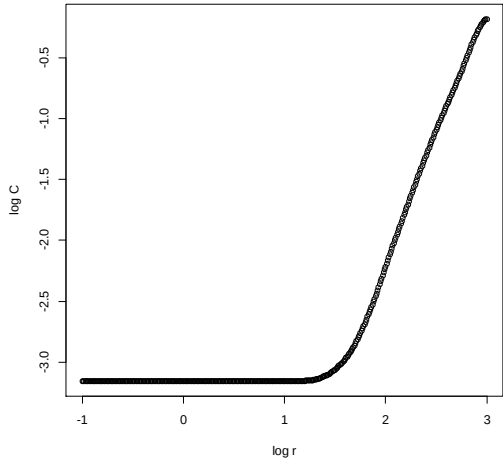
Rn set/03

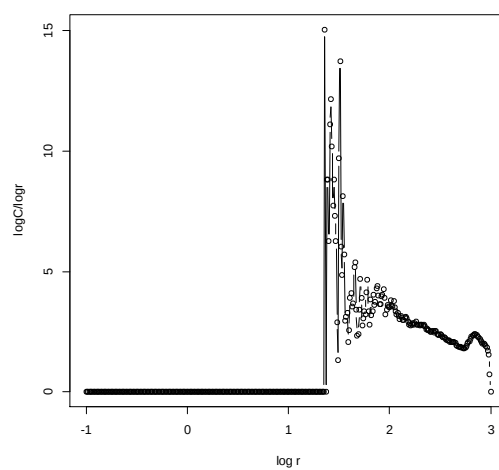
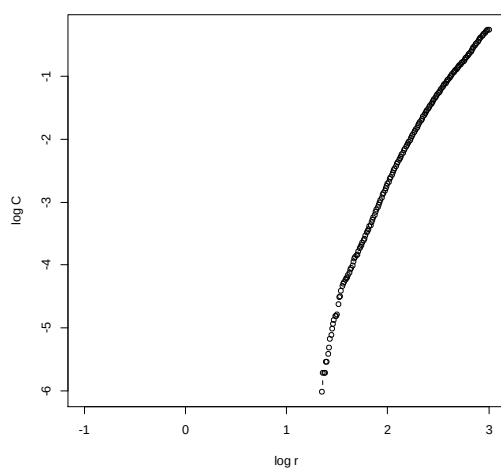
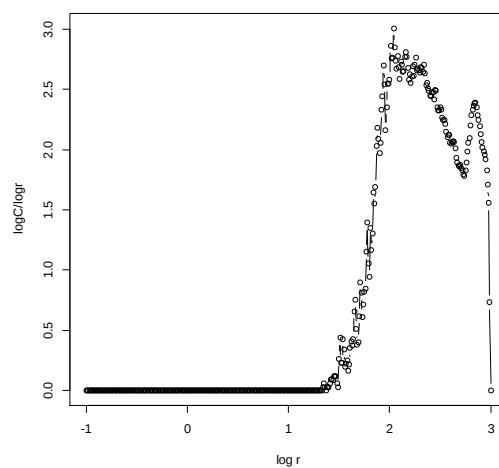
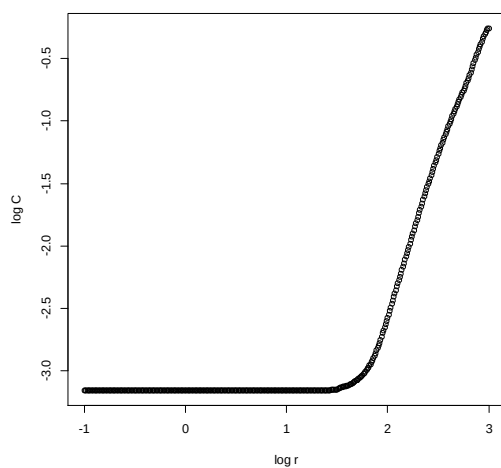
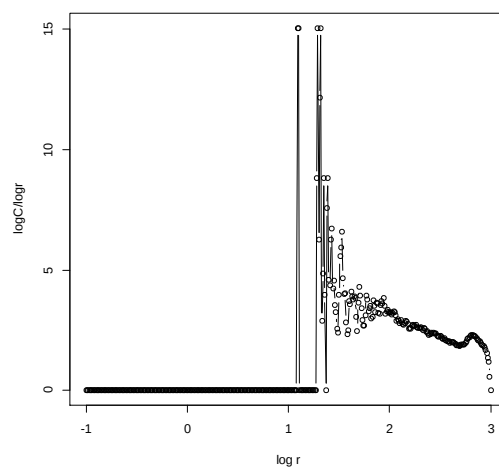
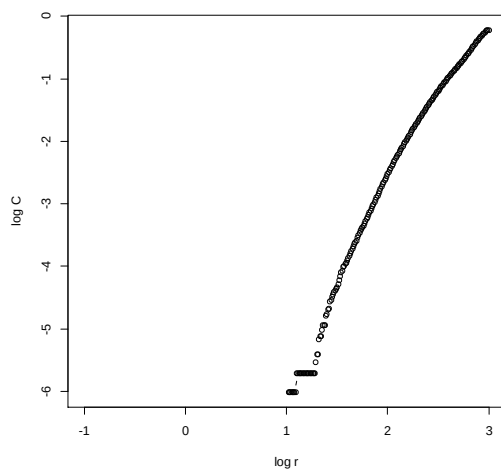


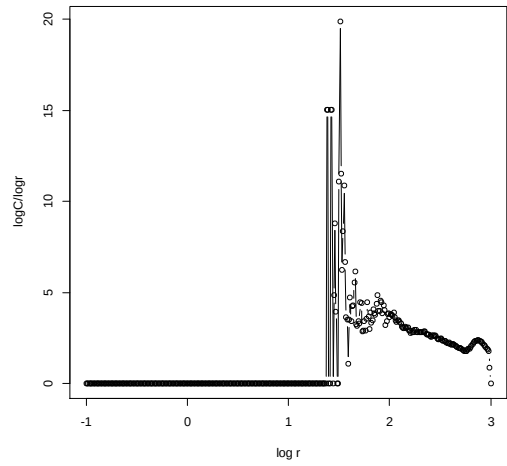
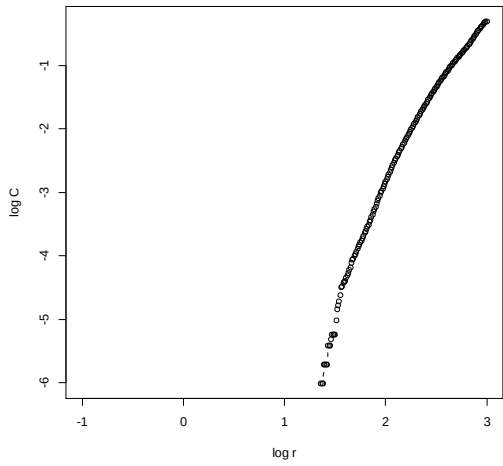
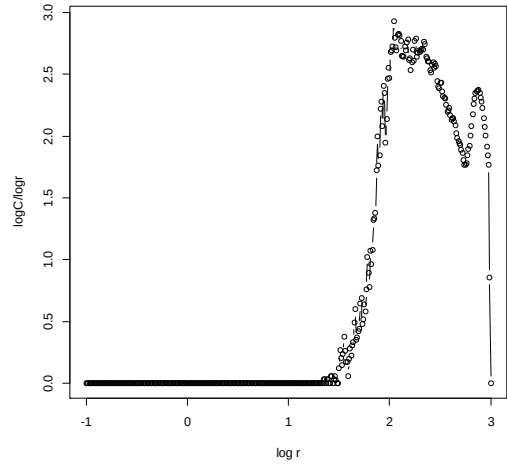
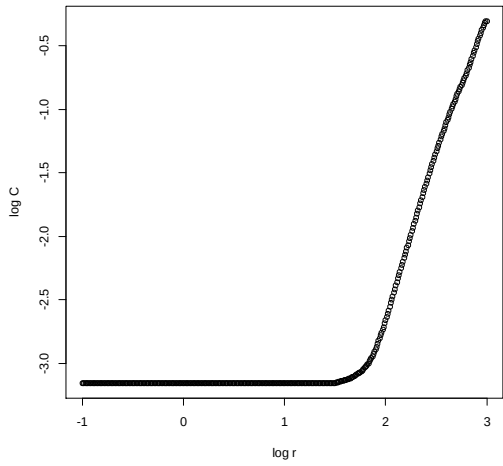


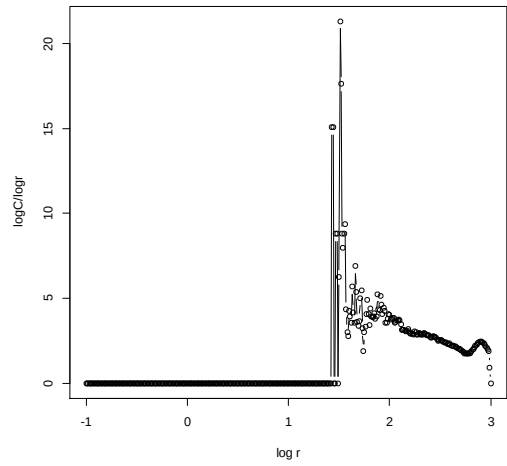
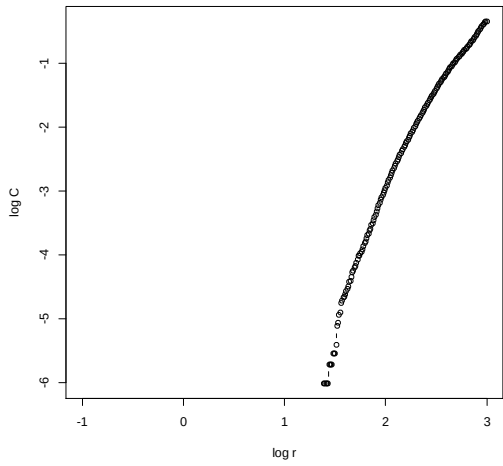
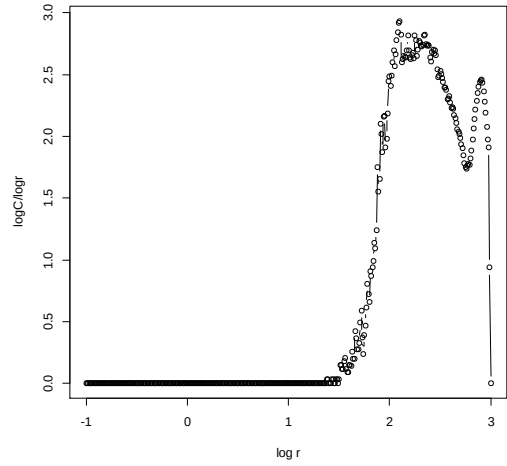
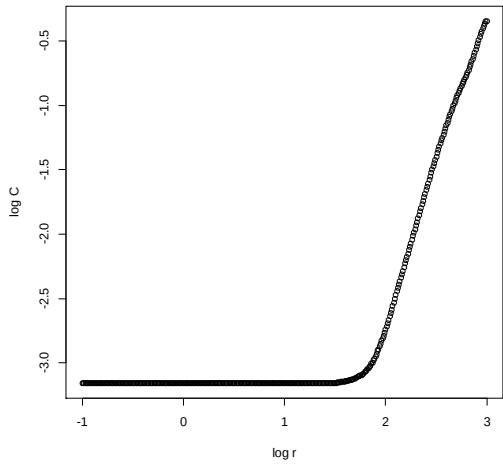




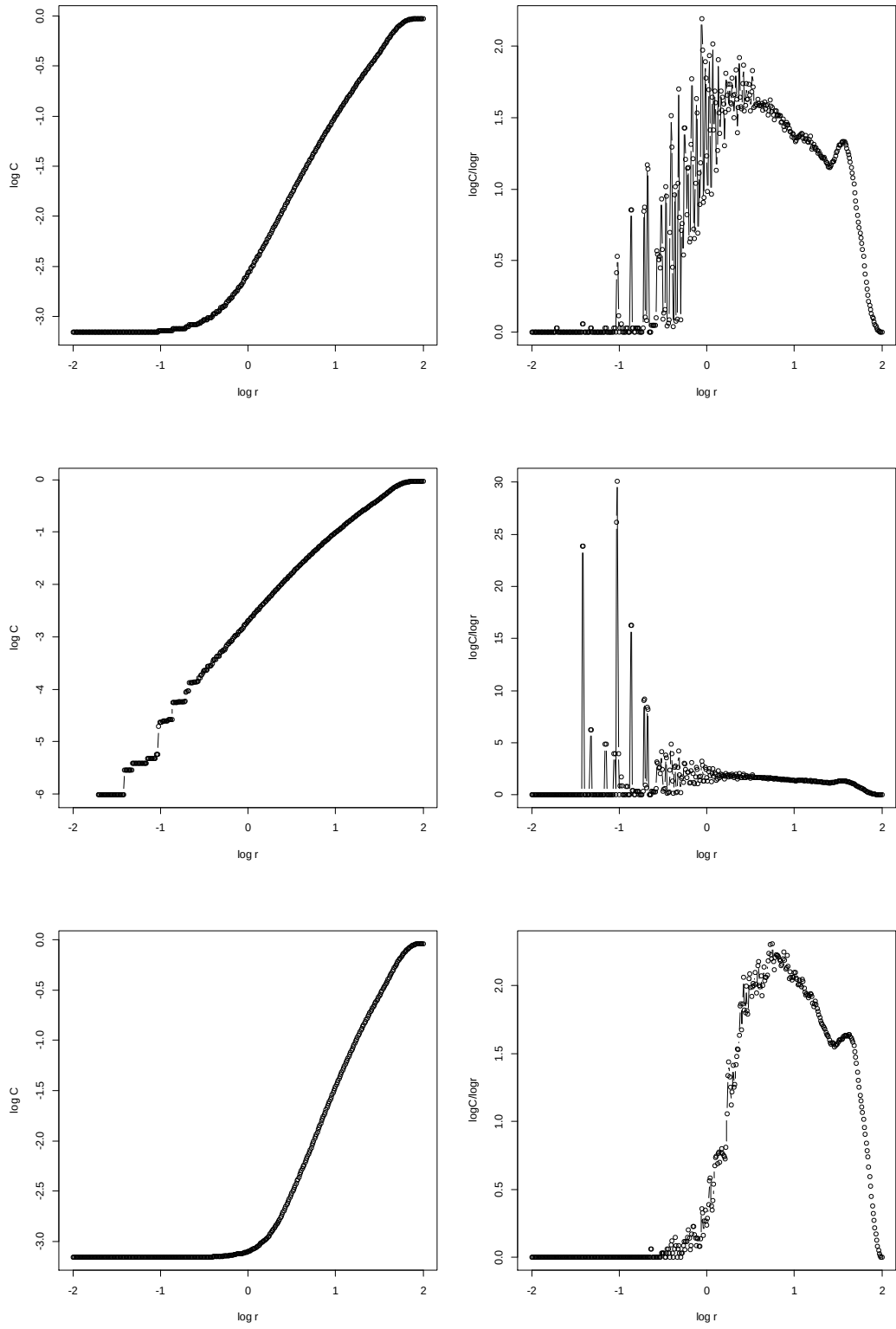


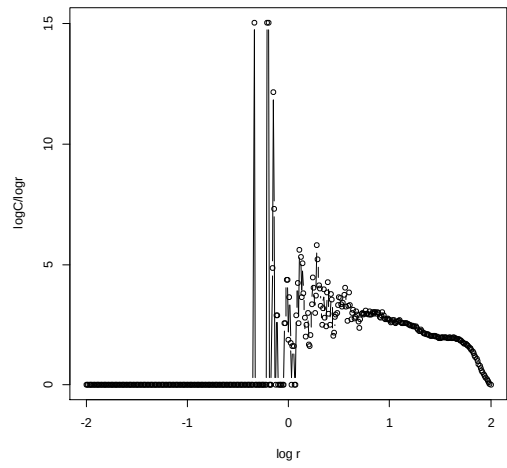
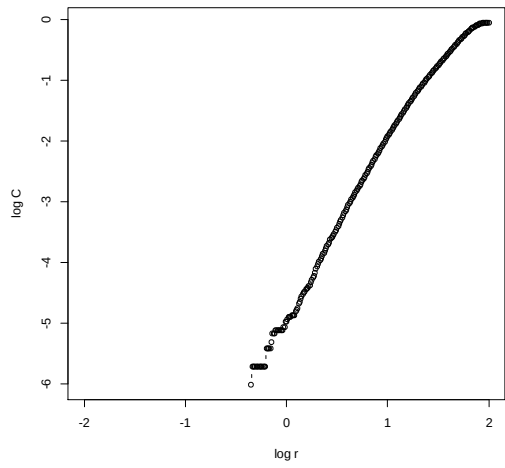
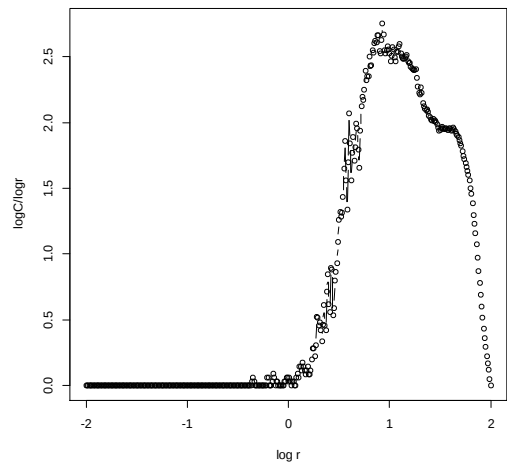
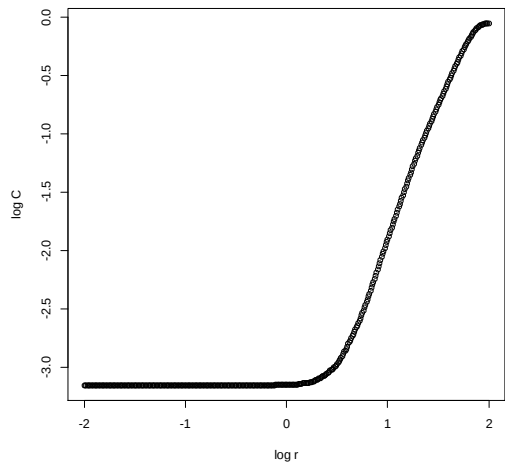
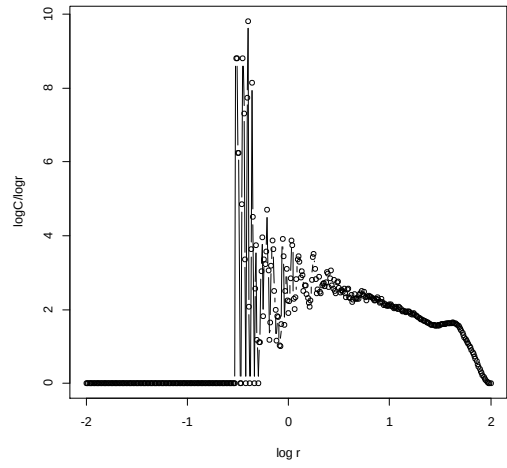
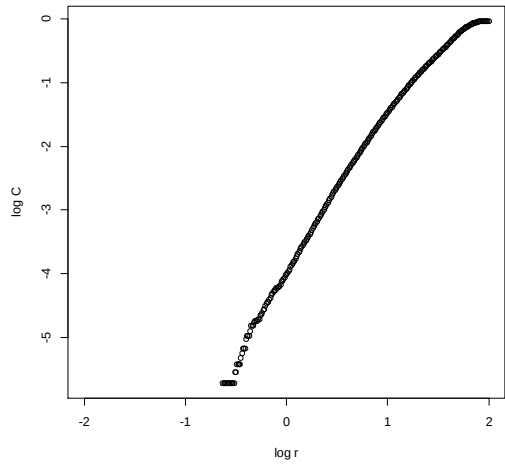


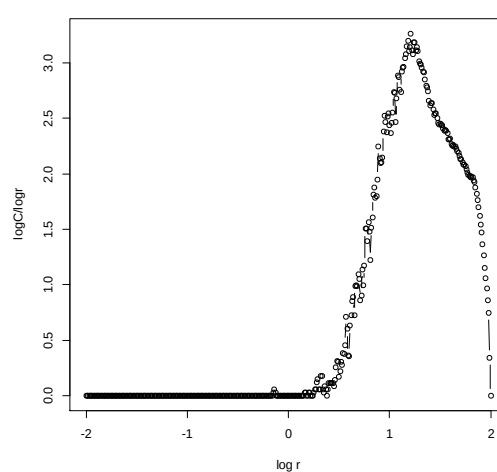
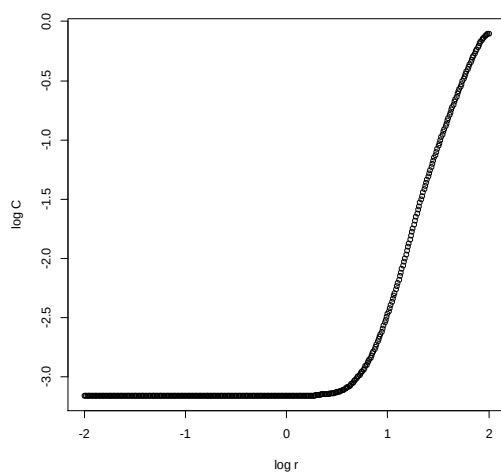
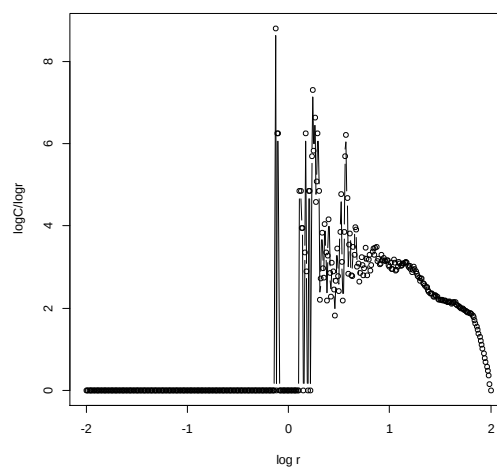
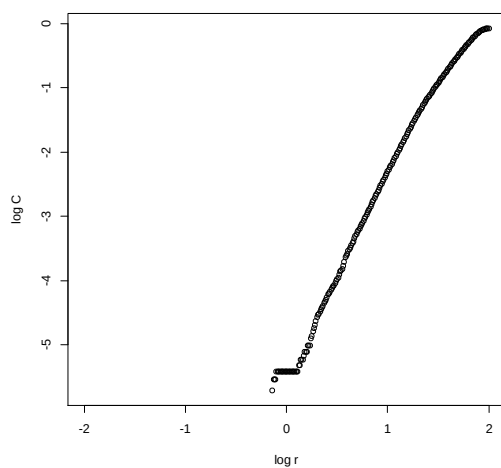
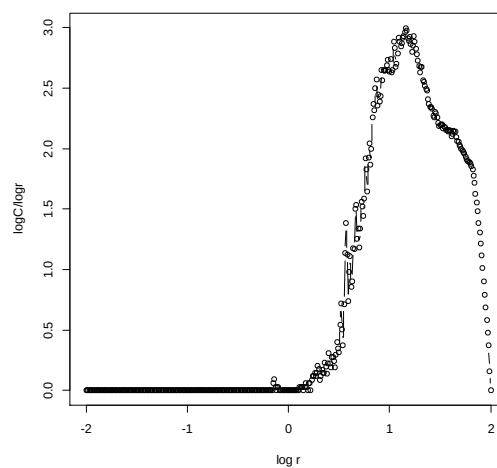
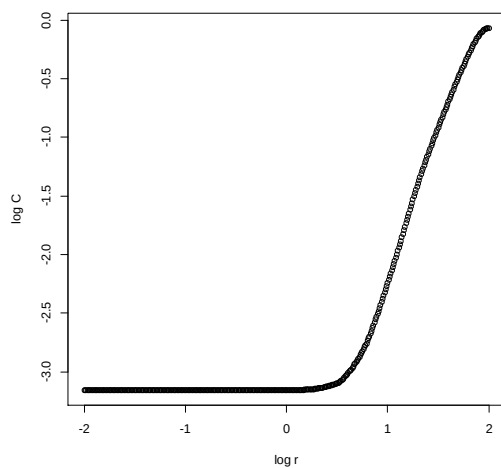


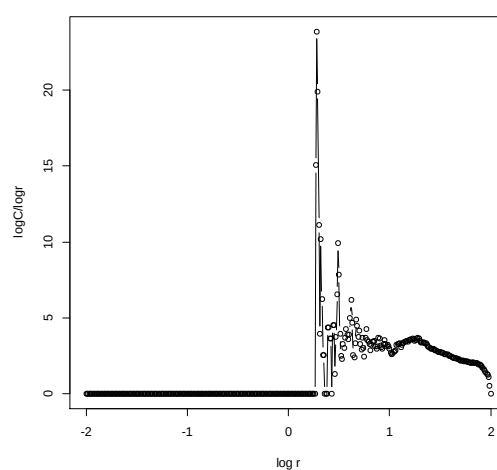
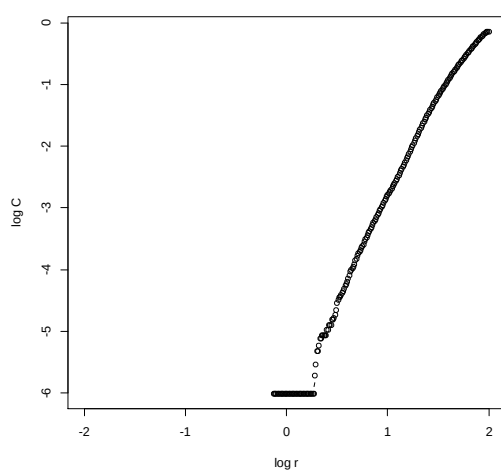
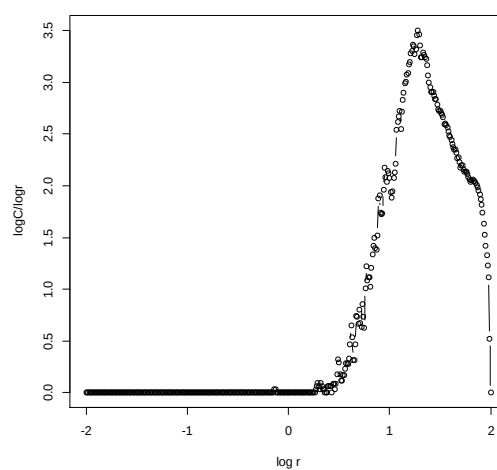
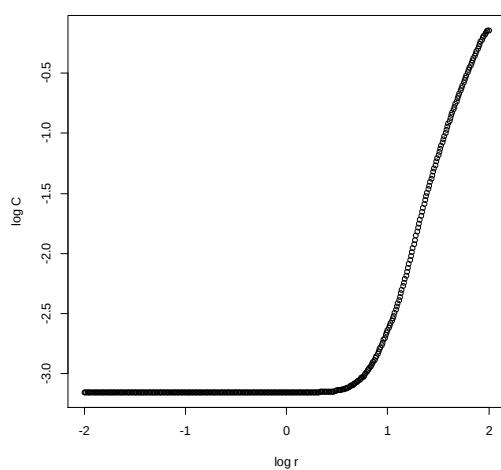
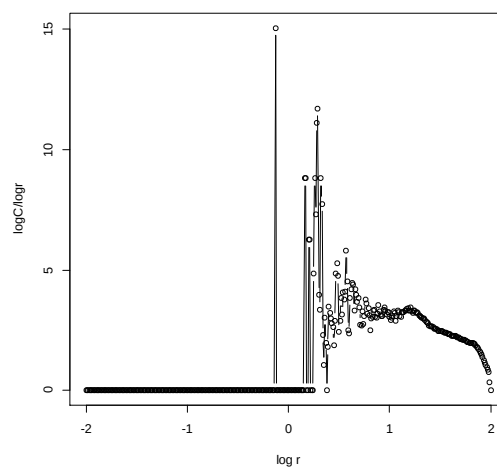
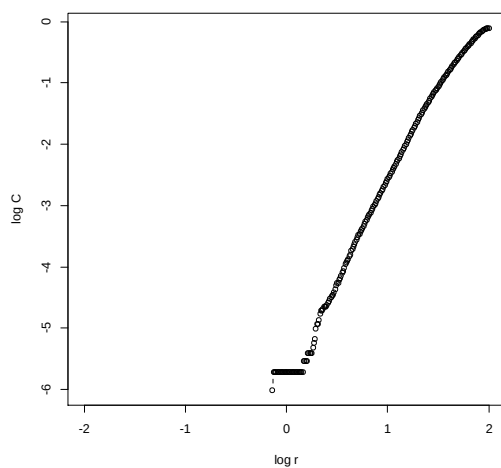


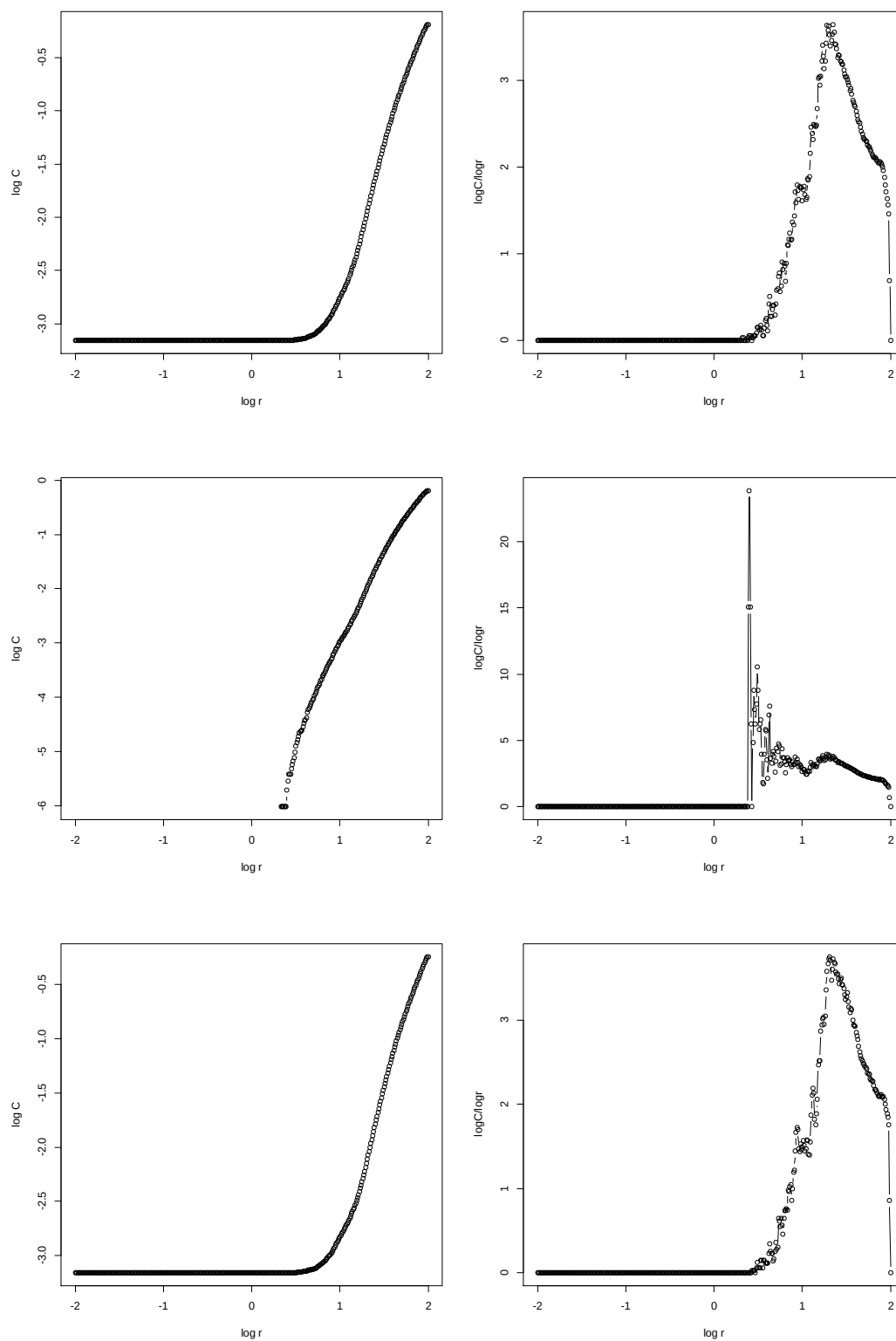
RH set/03

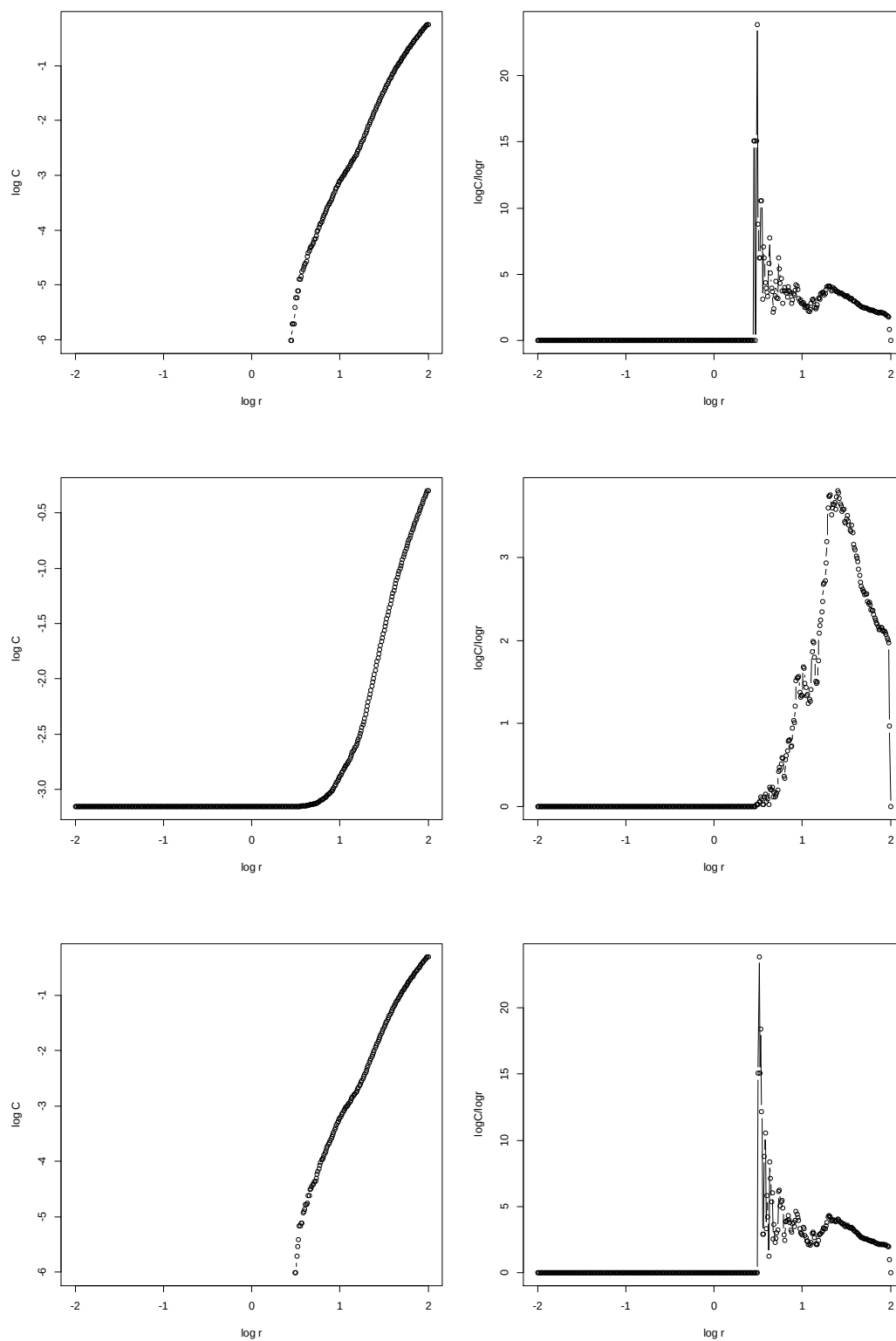


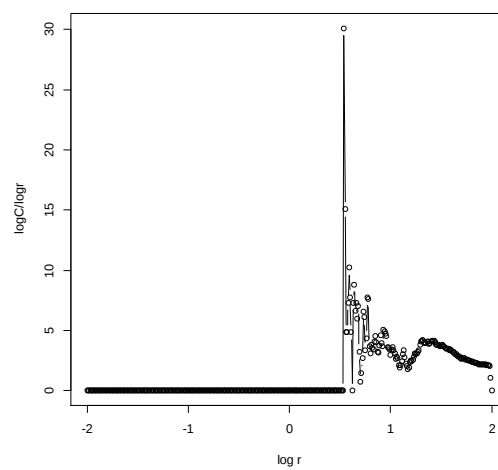
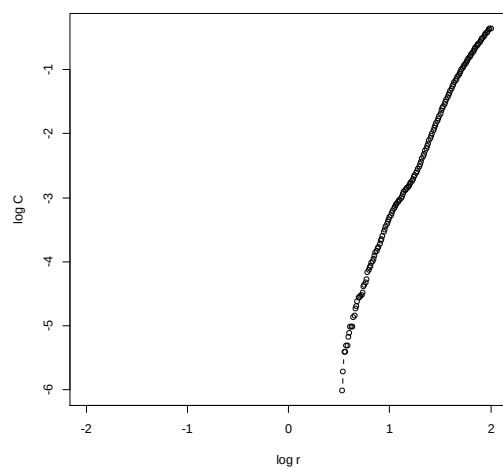
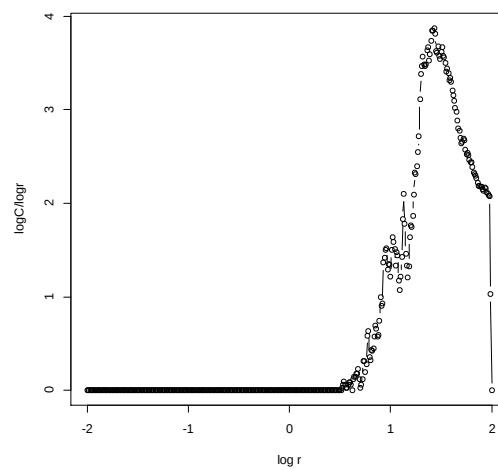
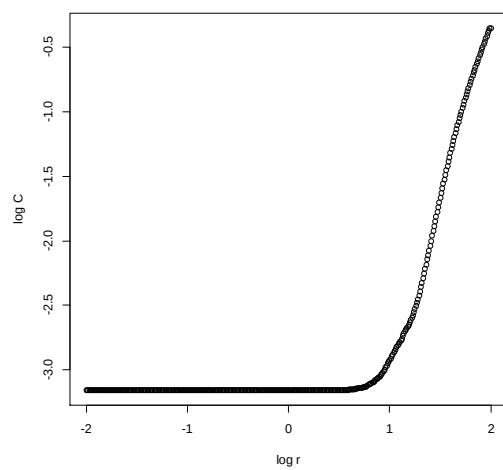


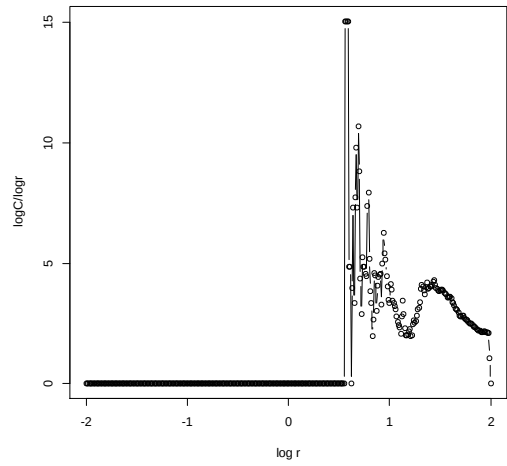
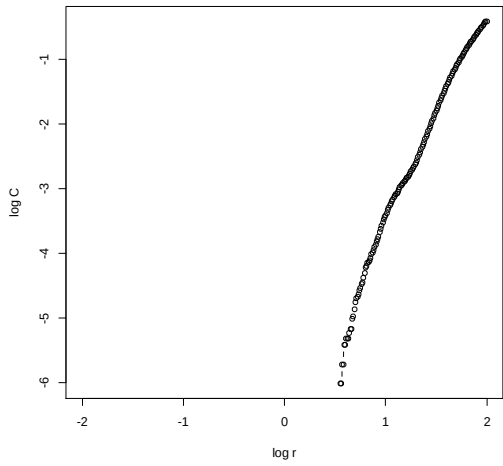
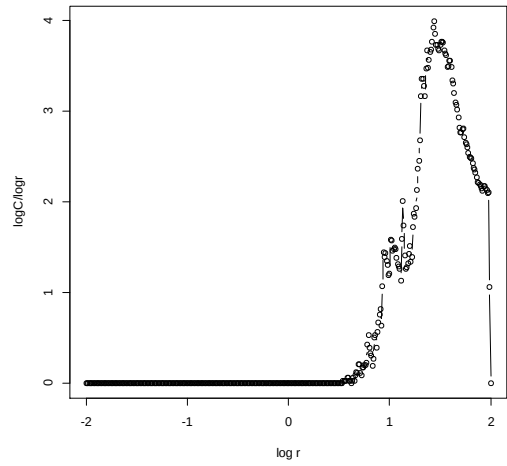
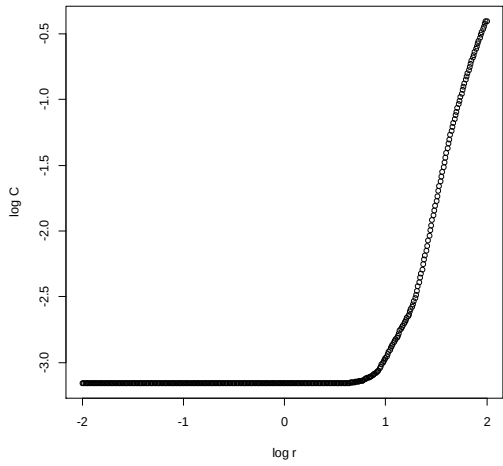




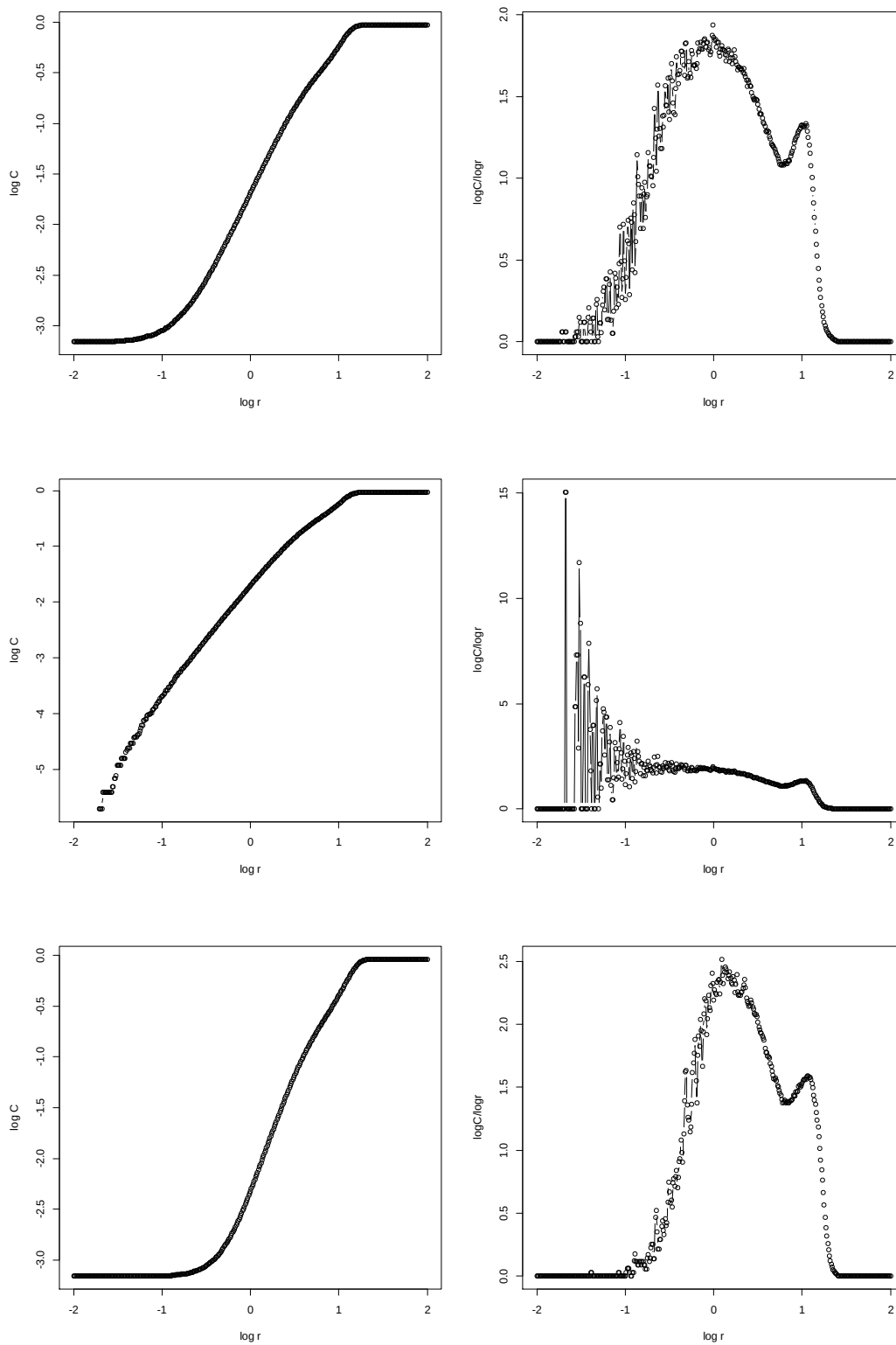


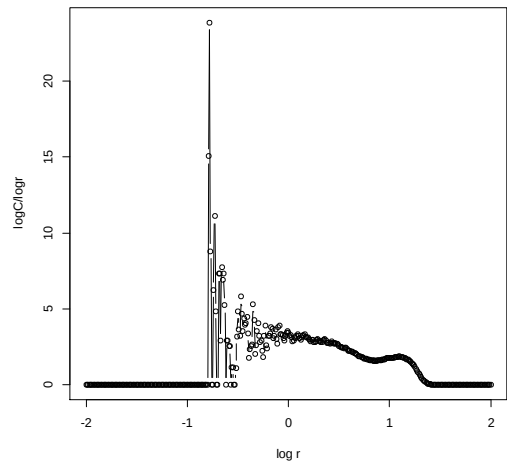
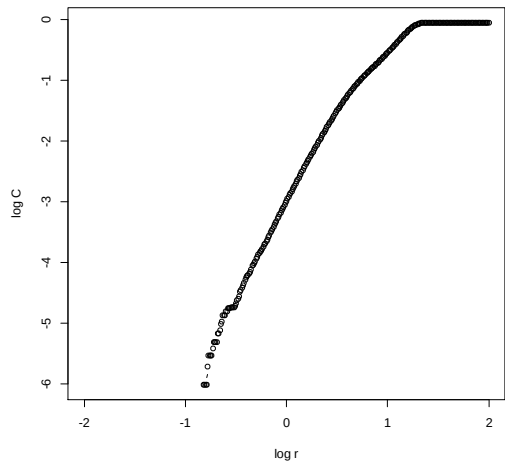
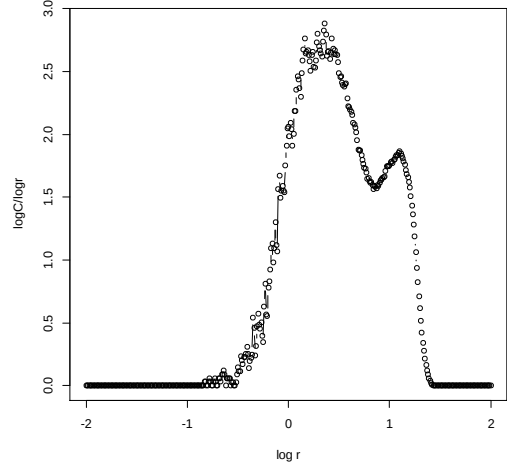
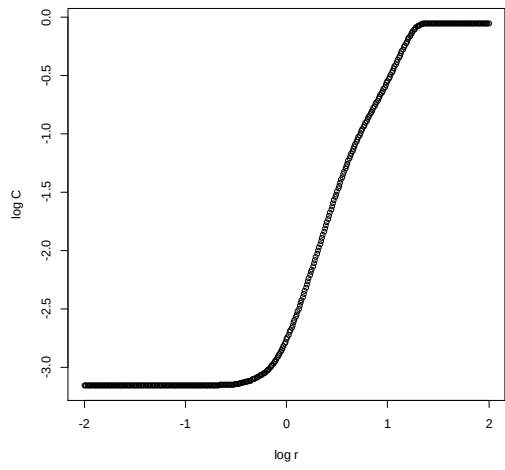
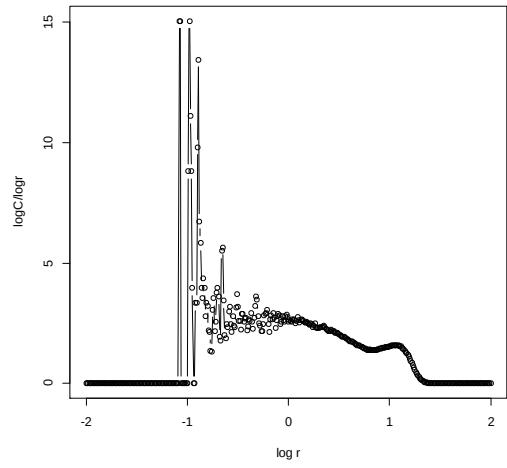
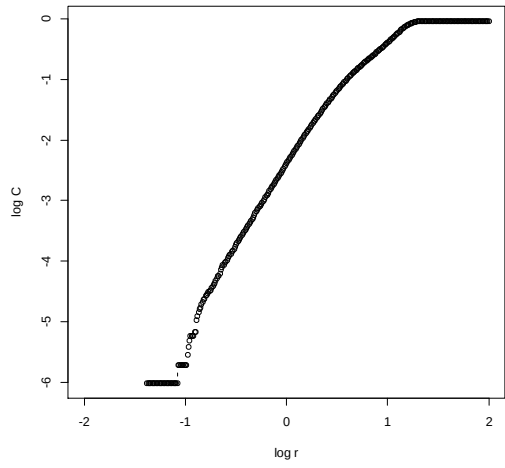


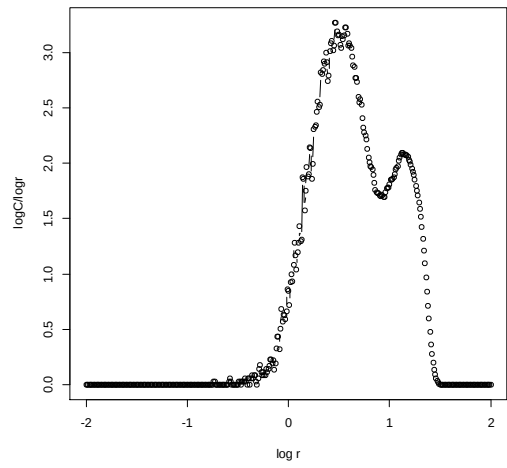
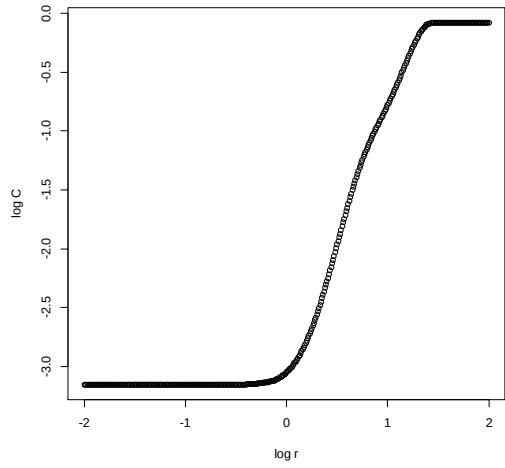
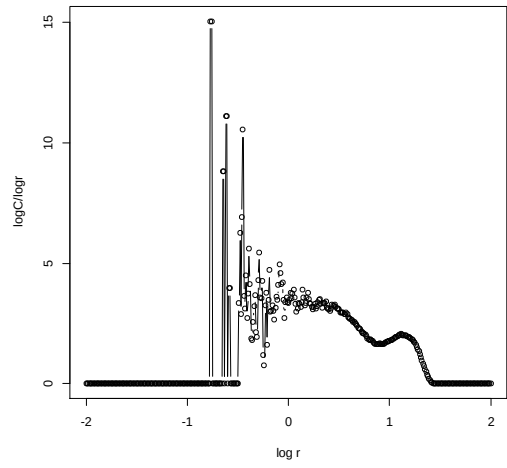
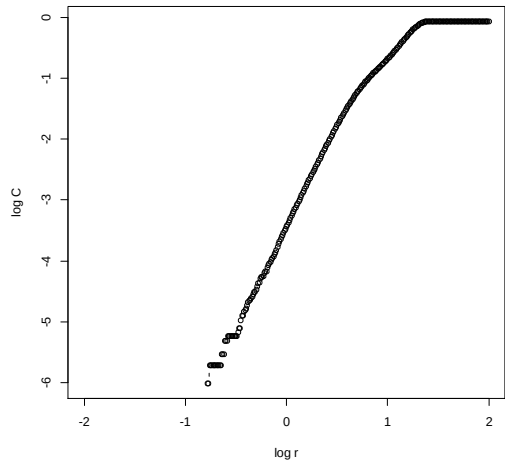
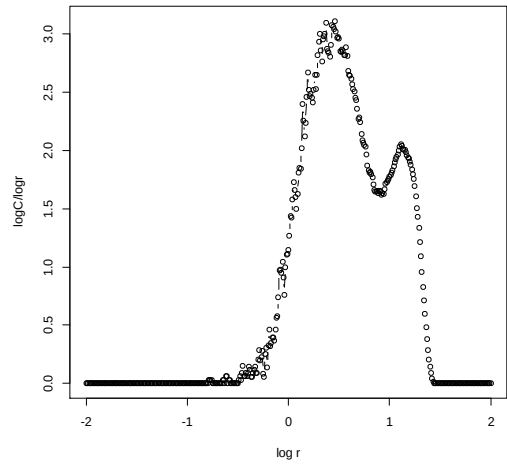
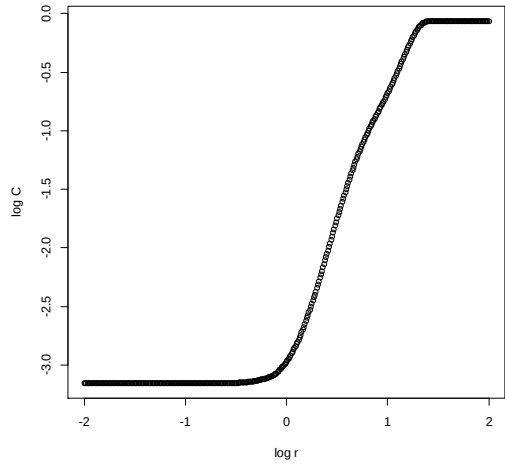


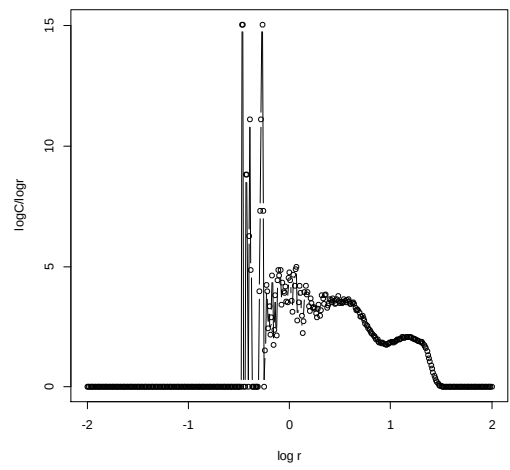
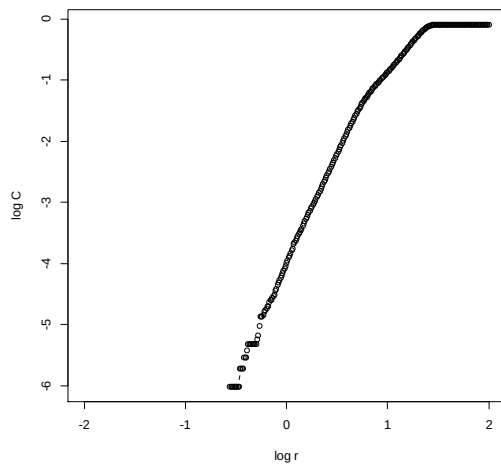
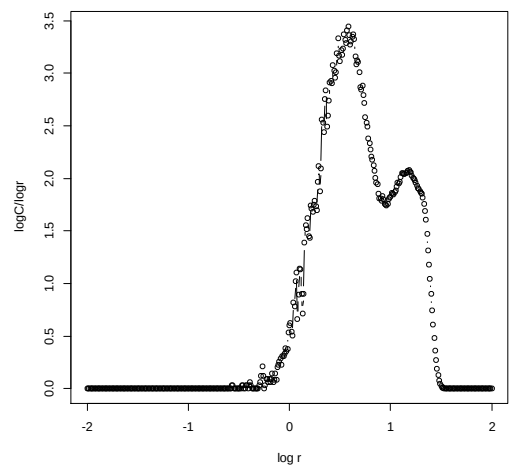
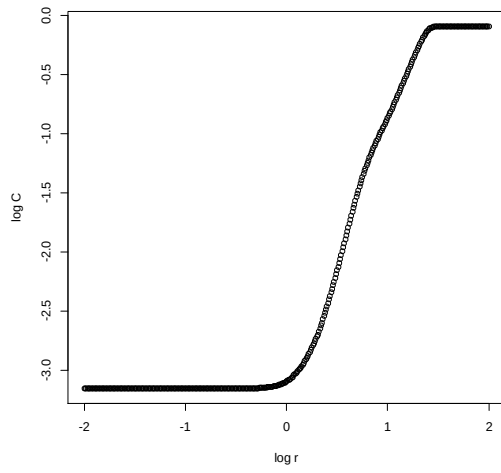
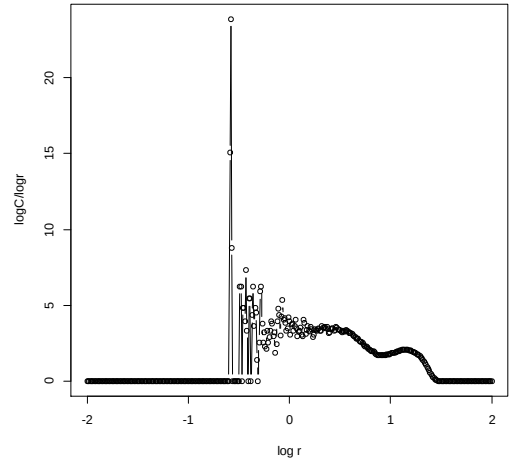
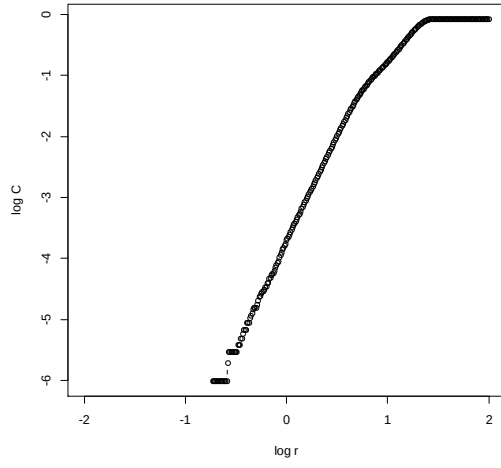


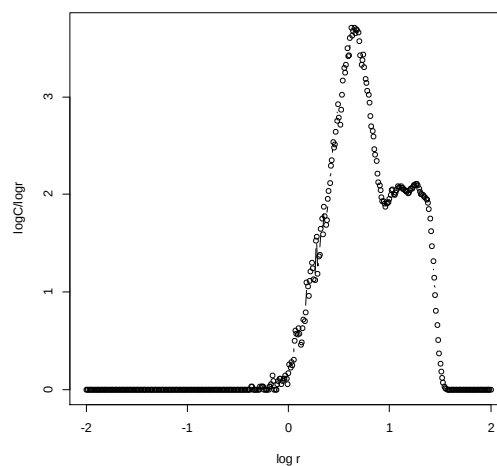
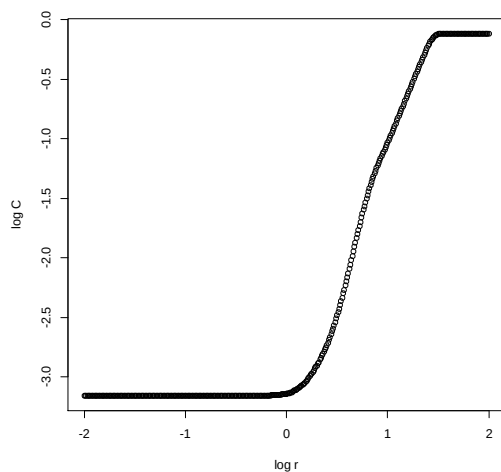
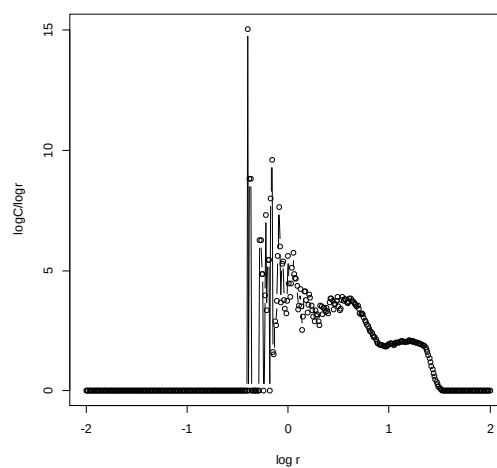
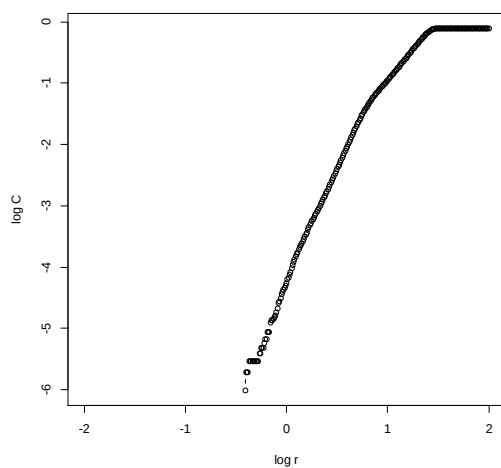
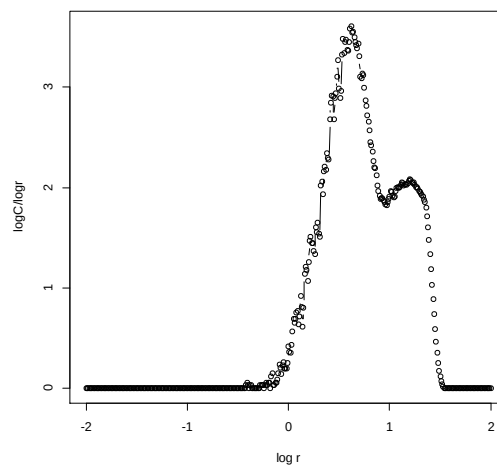
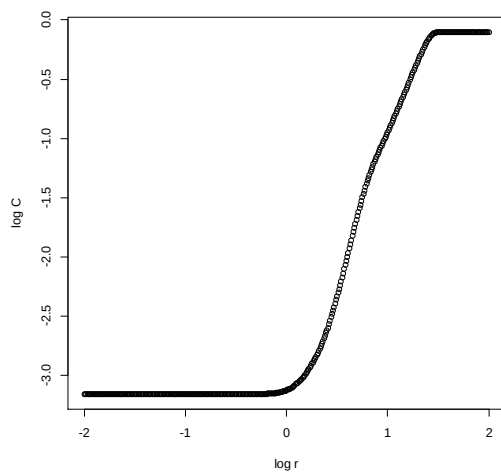
T40 set/03

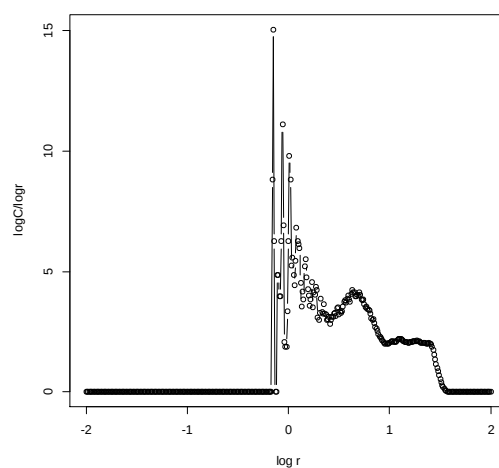
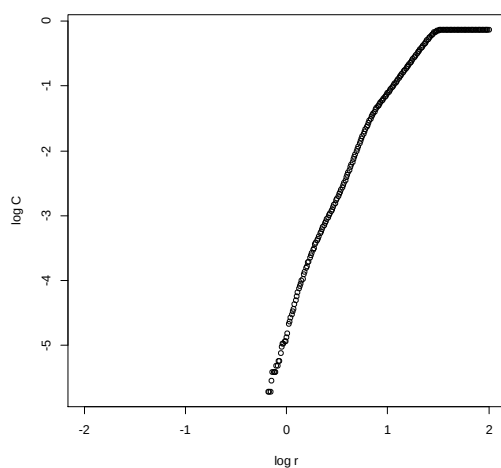
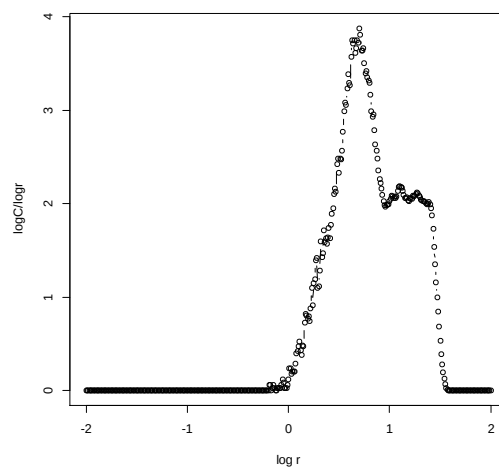
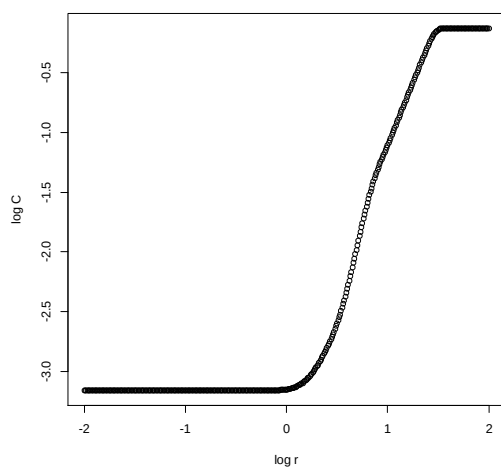
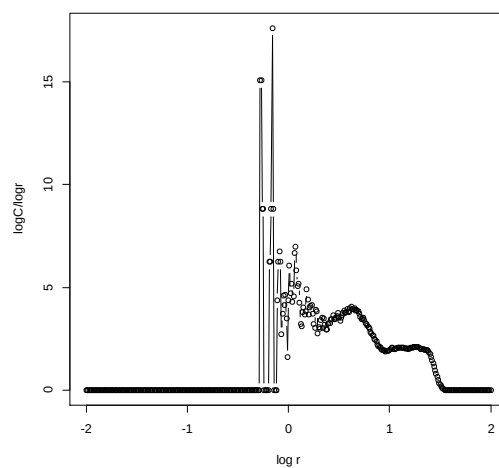
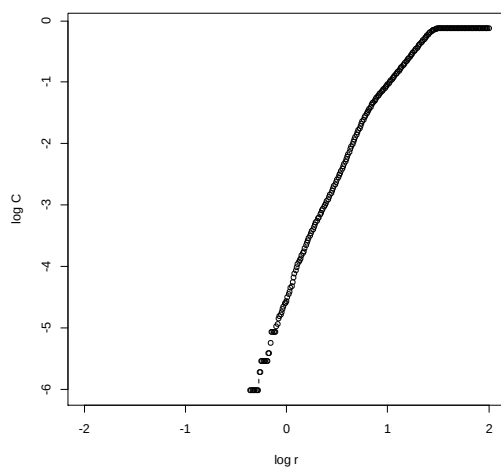


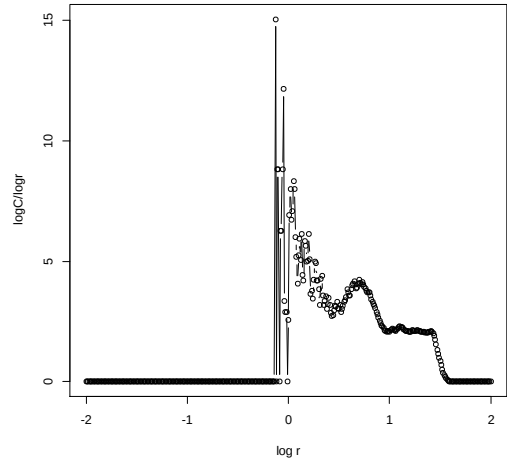
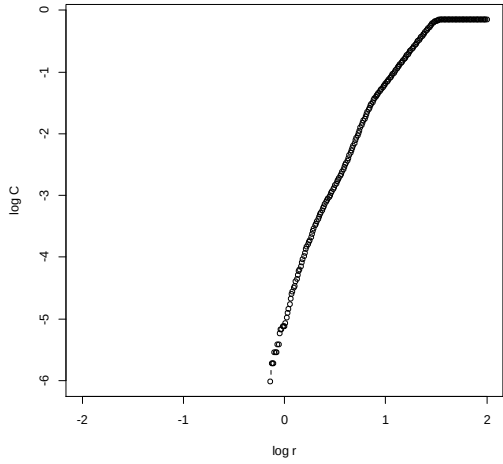
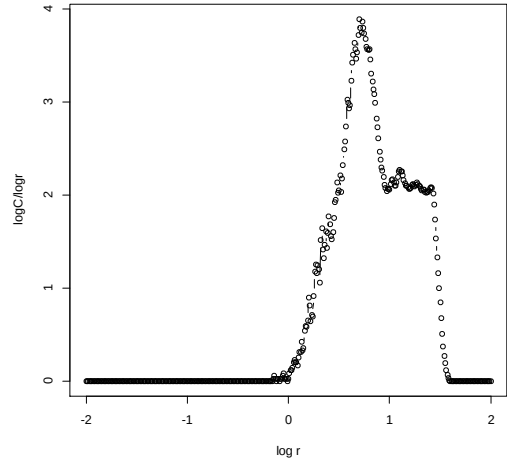
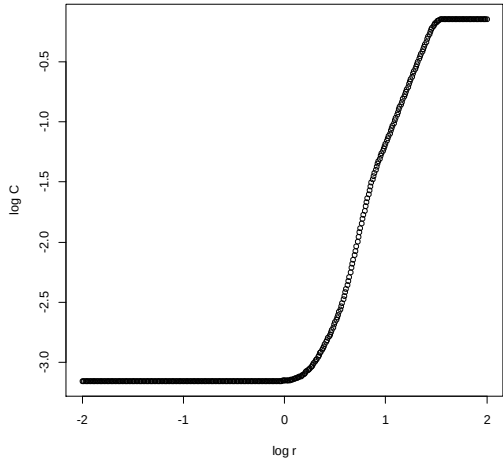


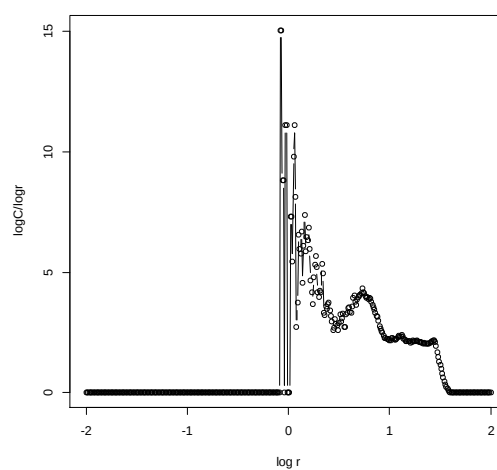
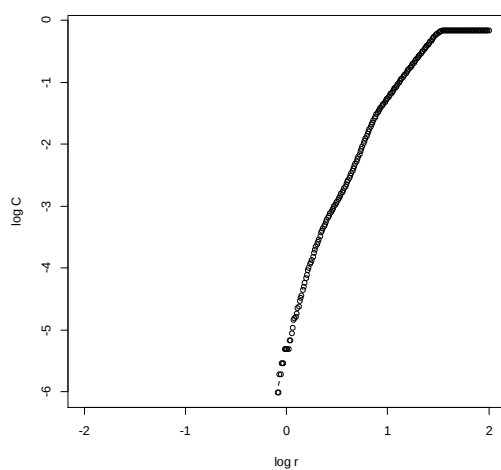
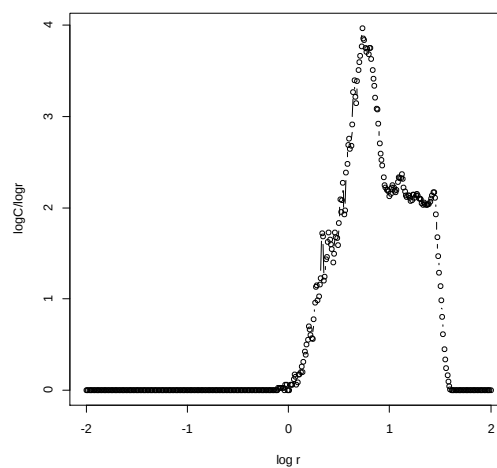
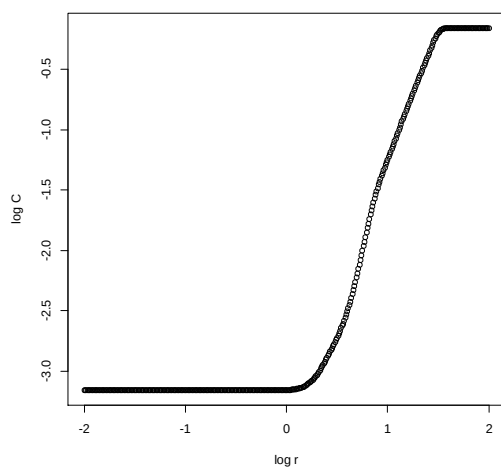




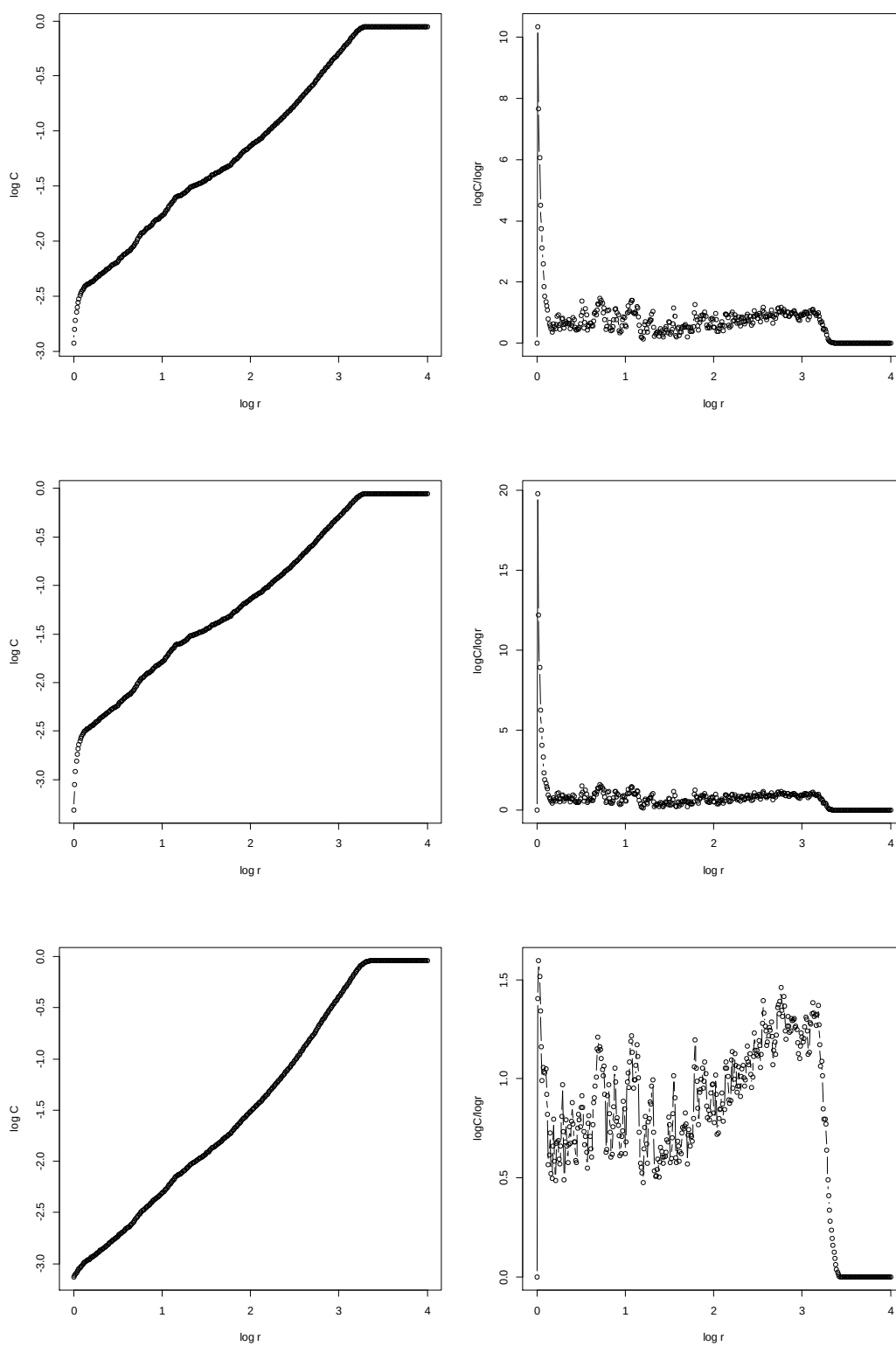


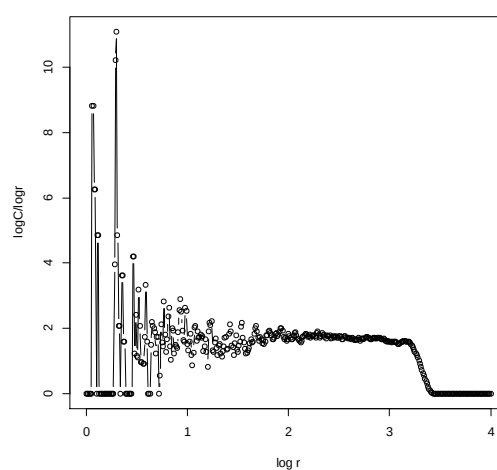
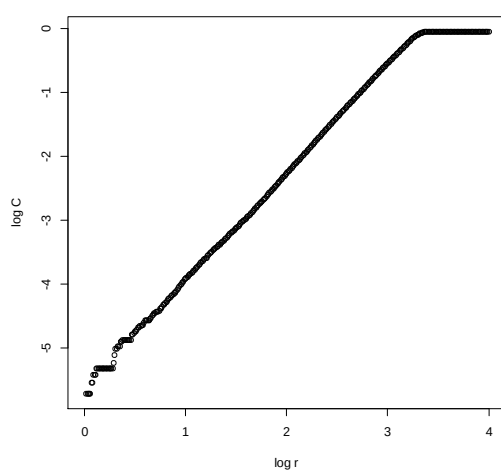
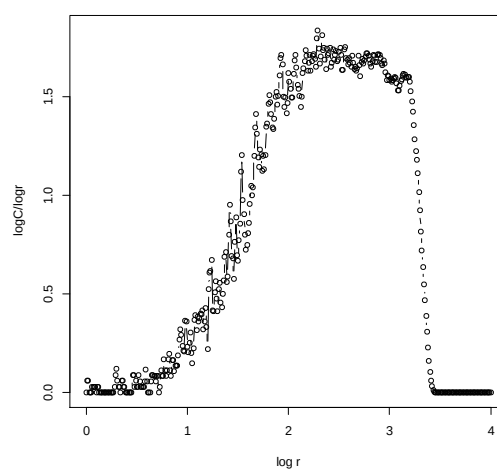
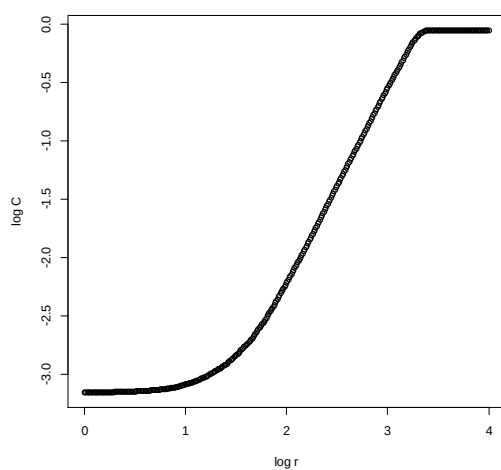
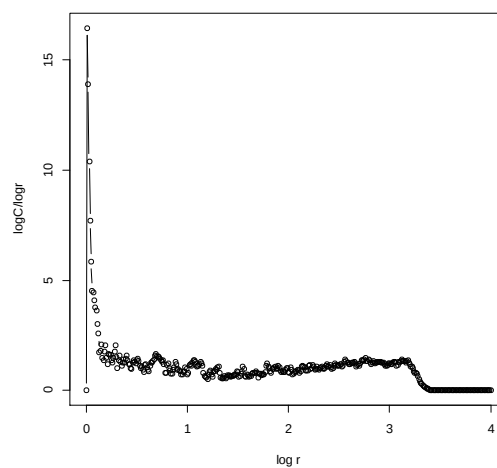
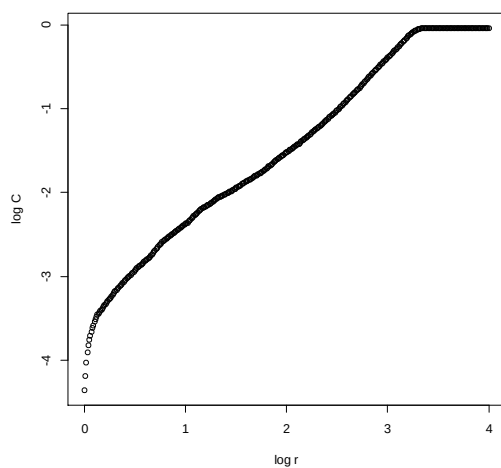


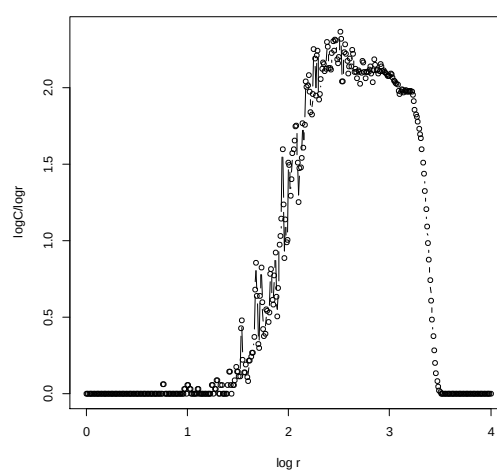
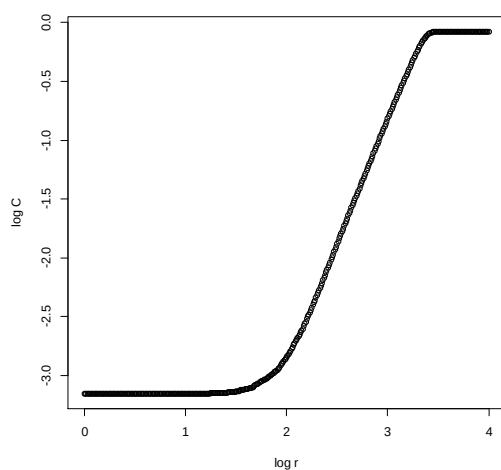
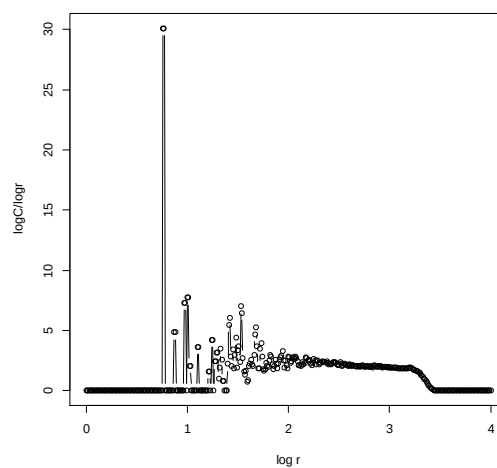
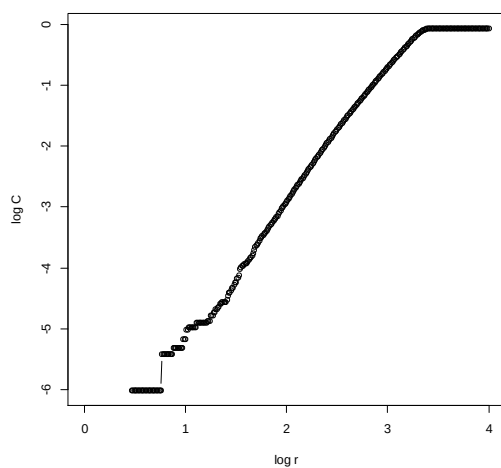
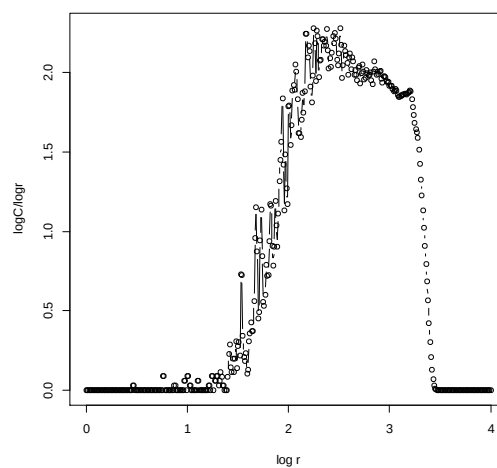
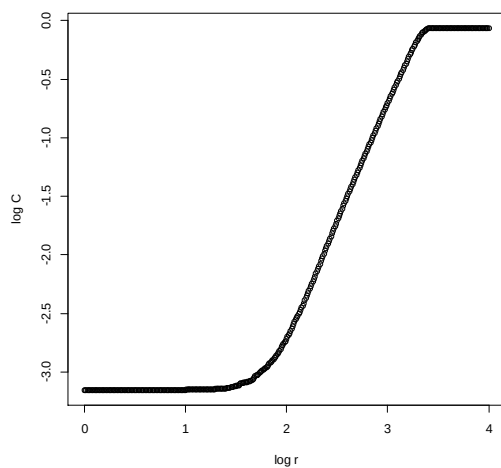


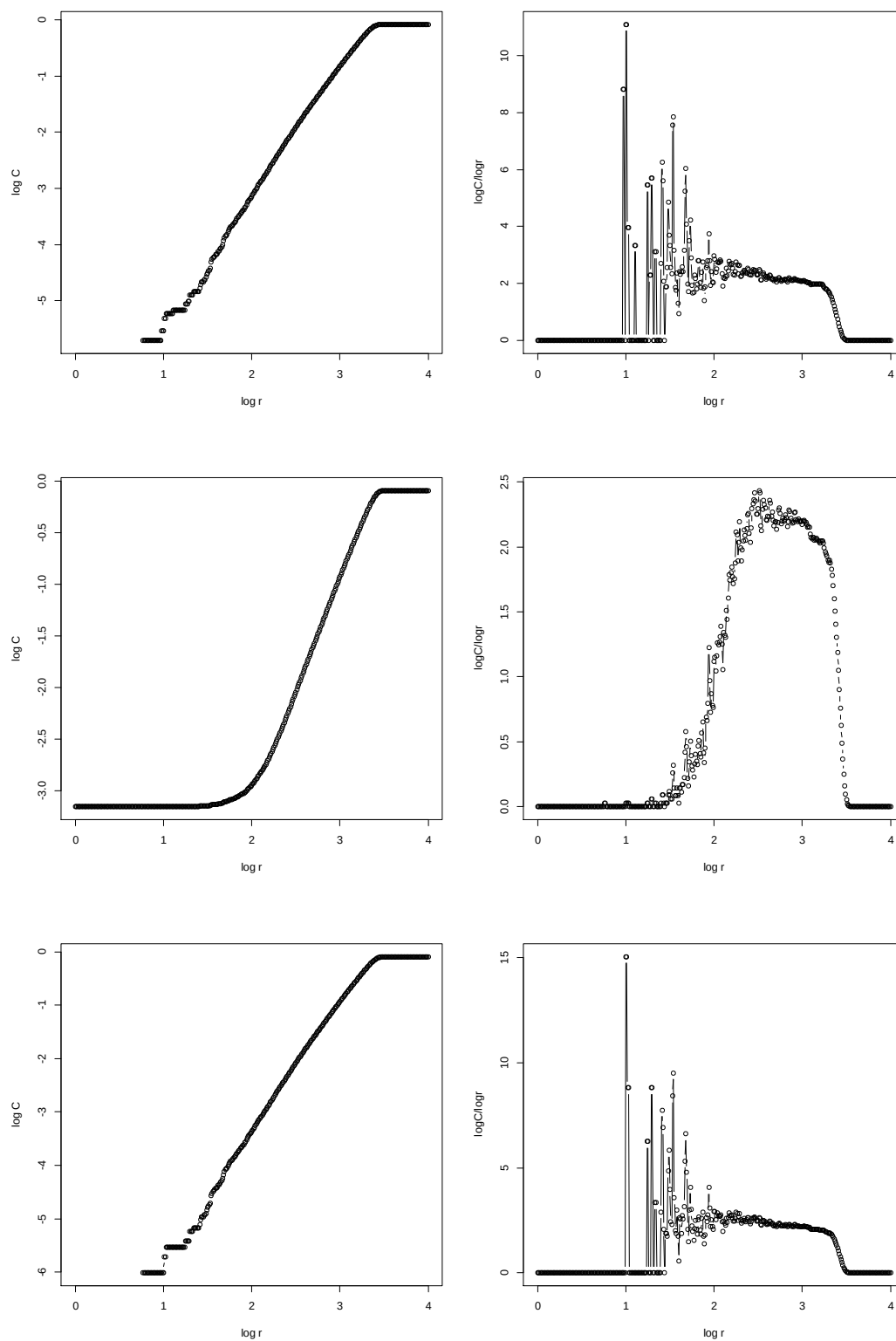


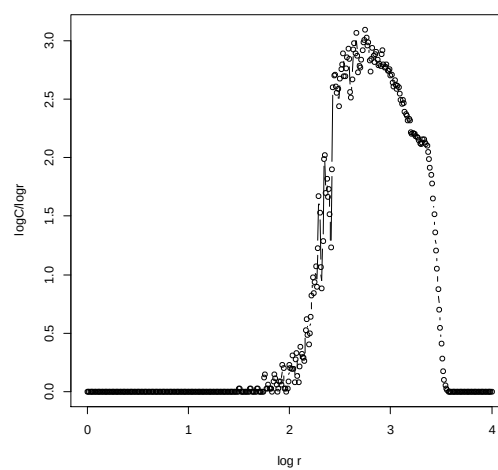
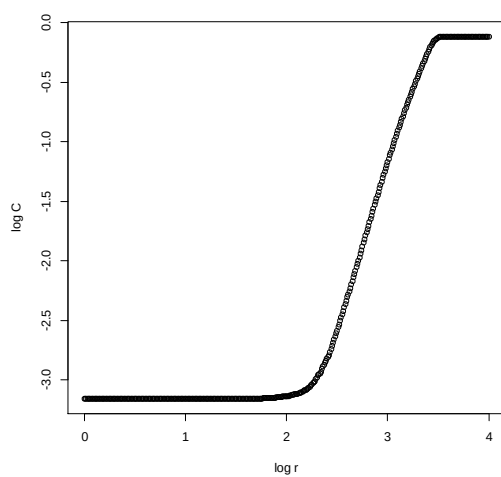
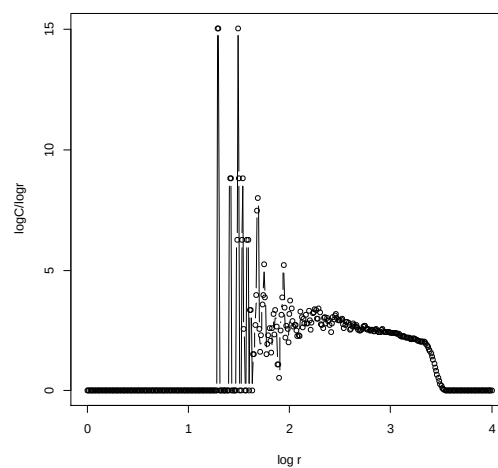
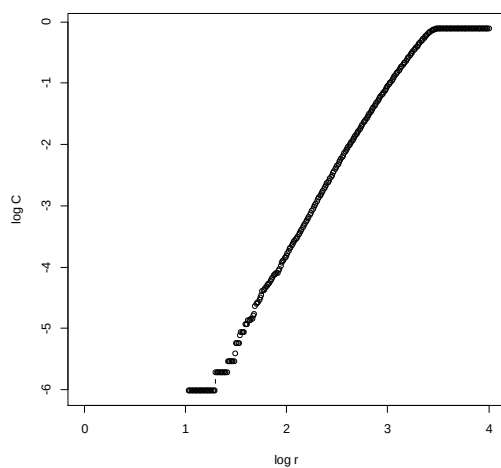
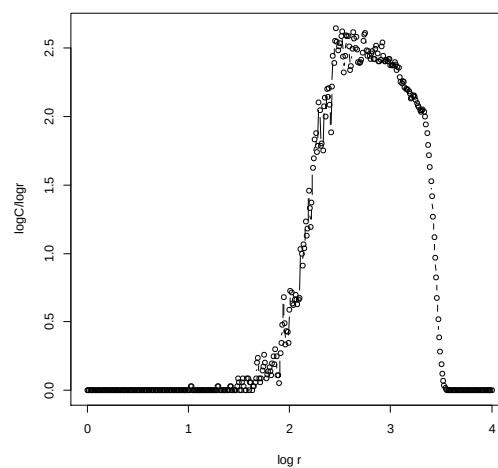
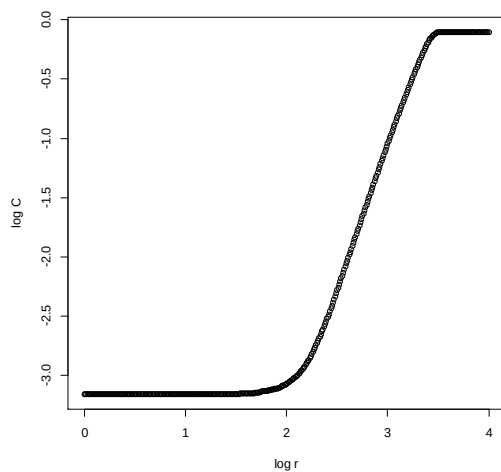
PARi nov/03

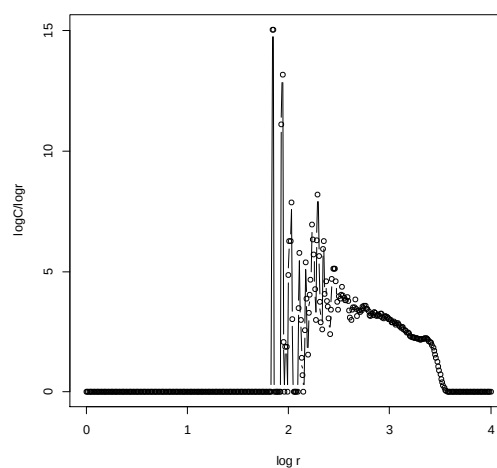
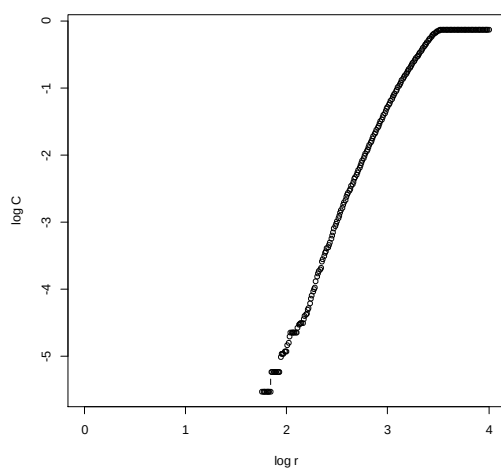
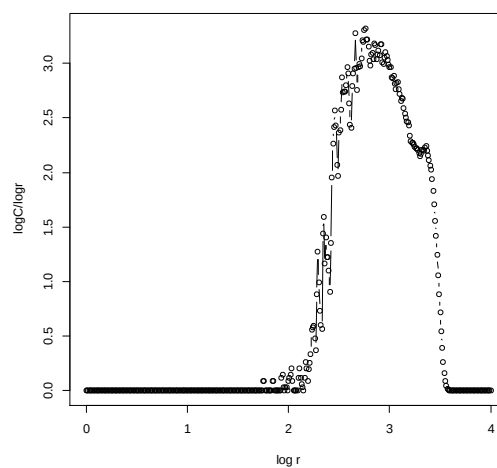
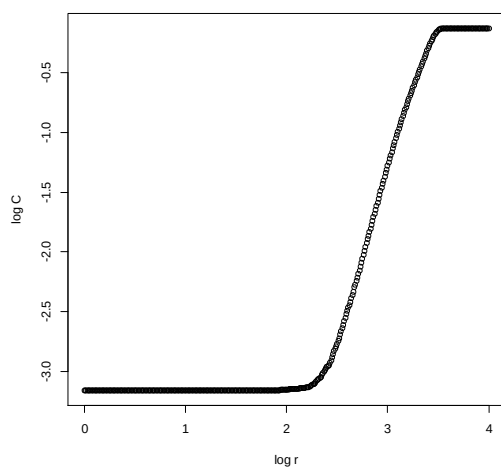
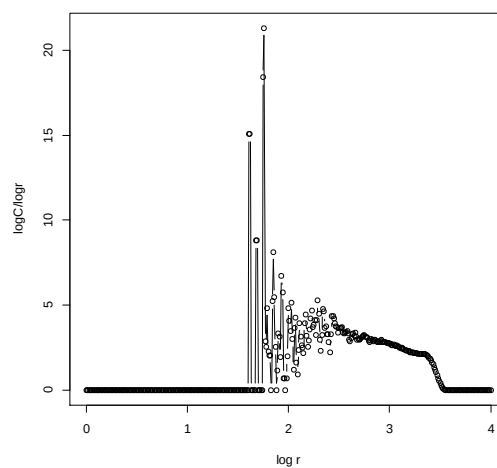
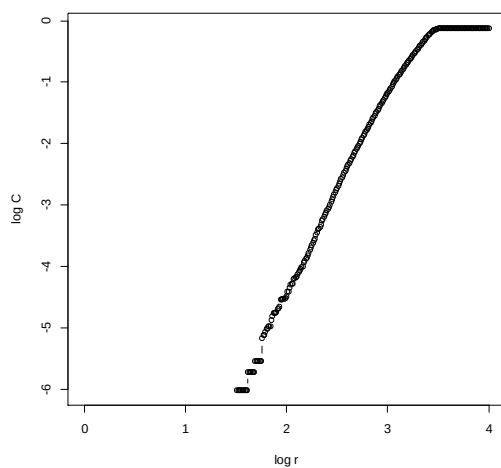


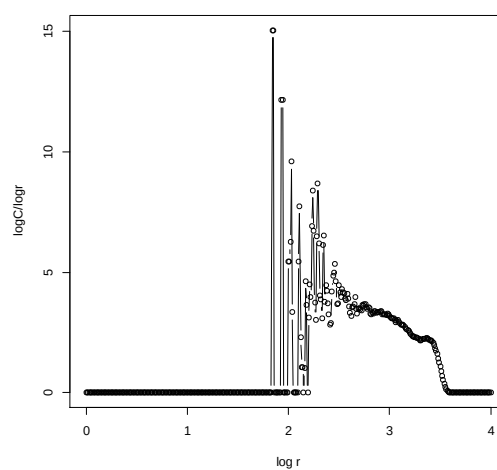
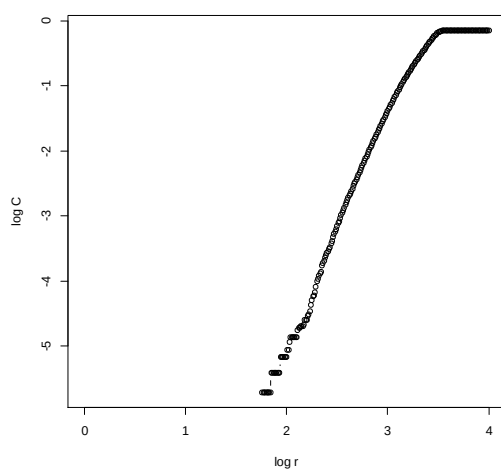
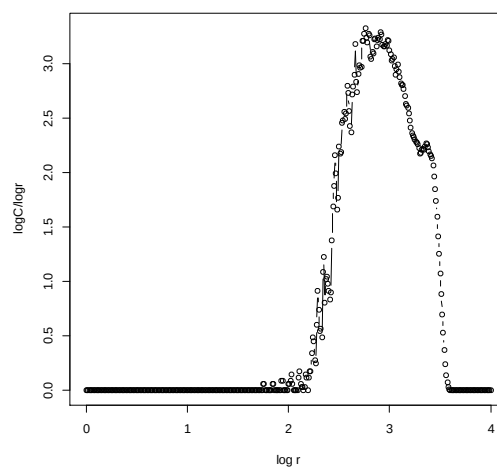
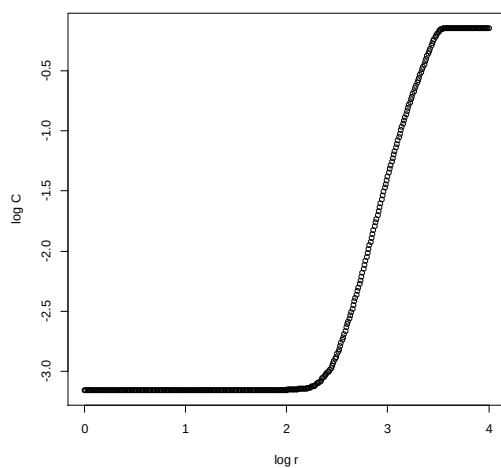


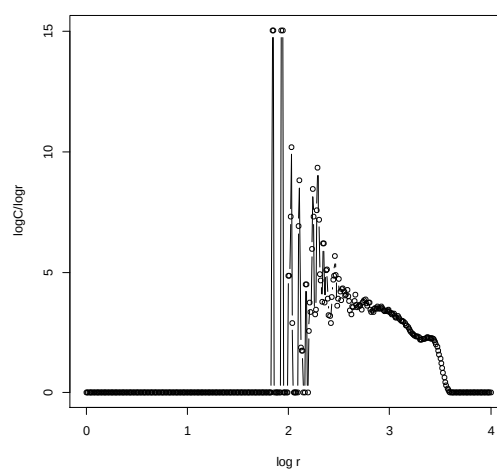
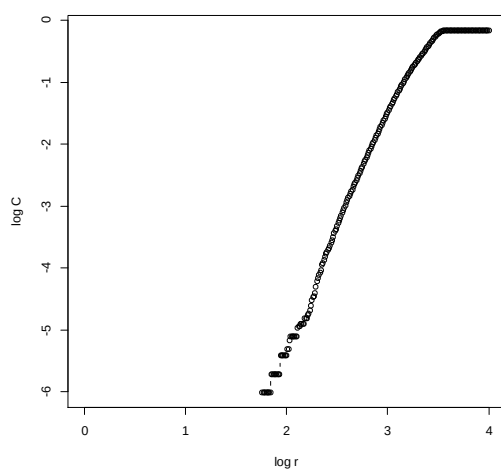
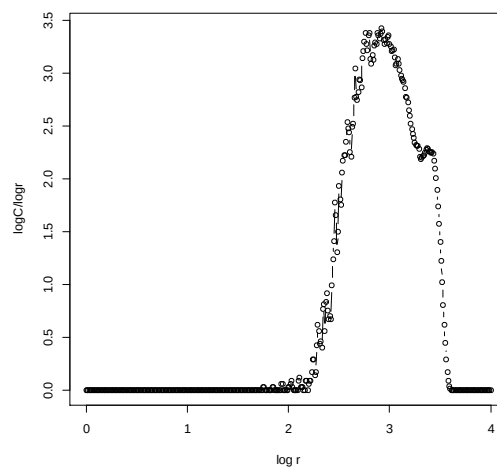
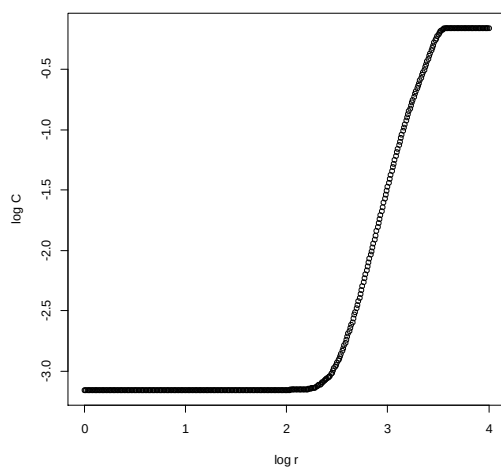




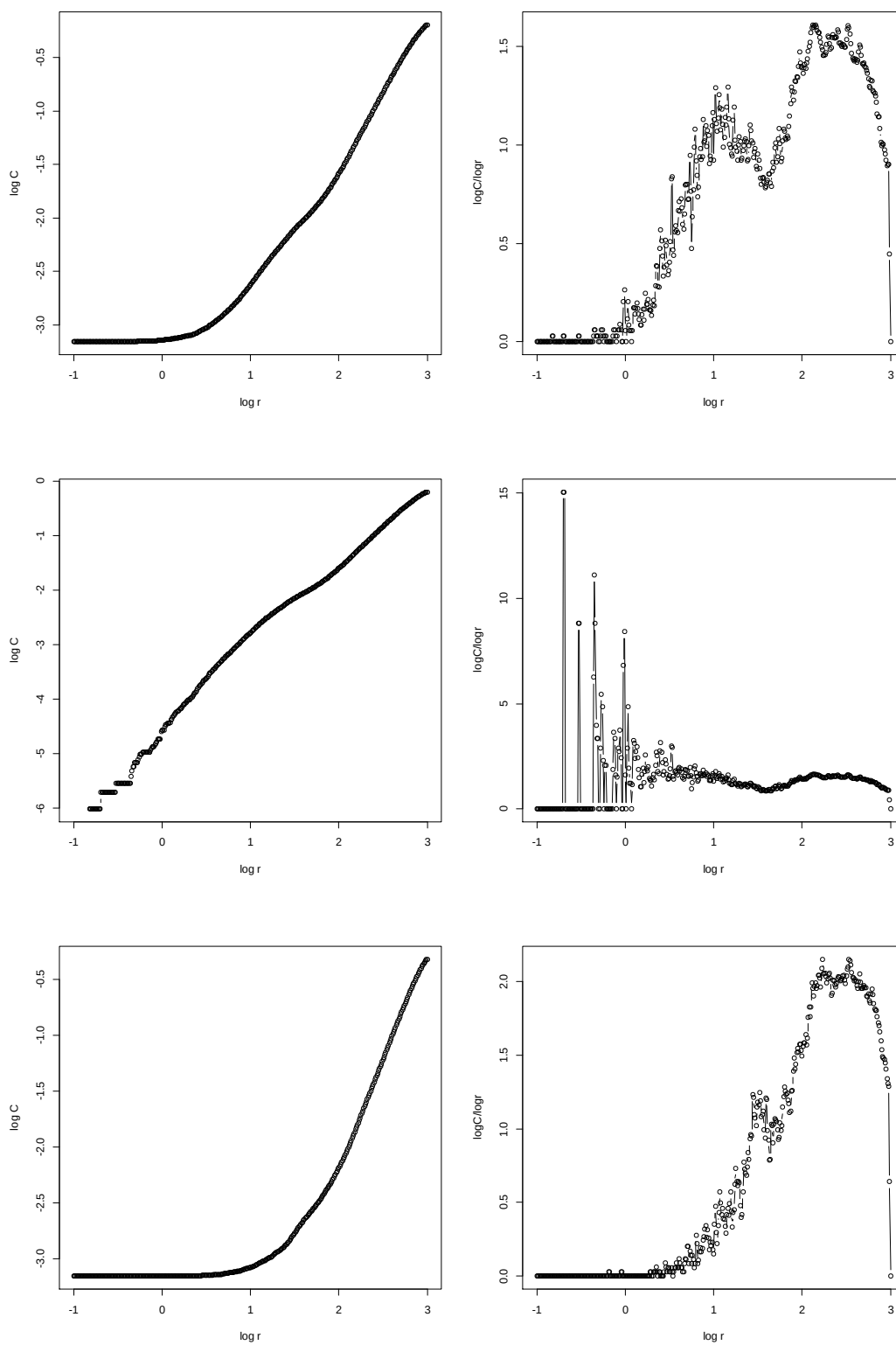


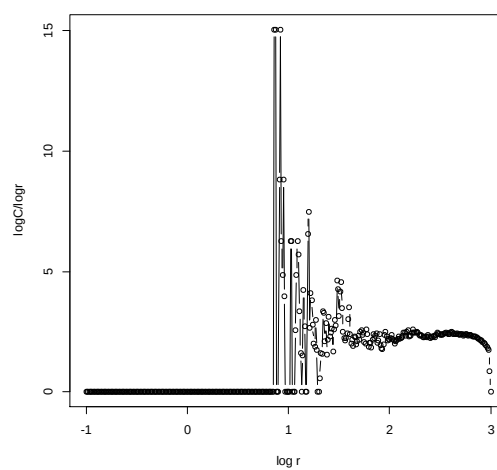
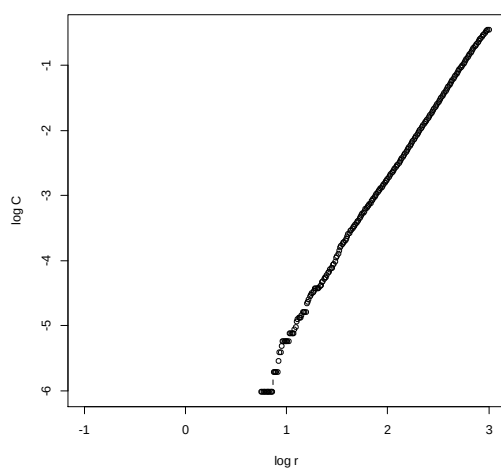
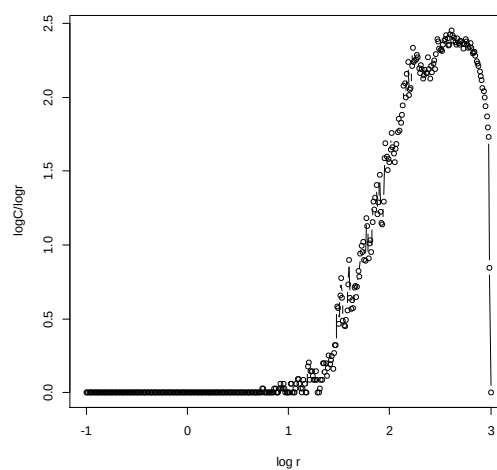
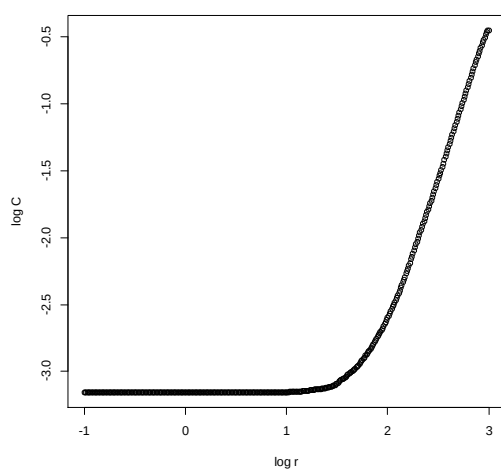
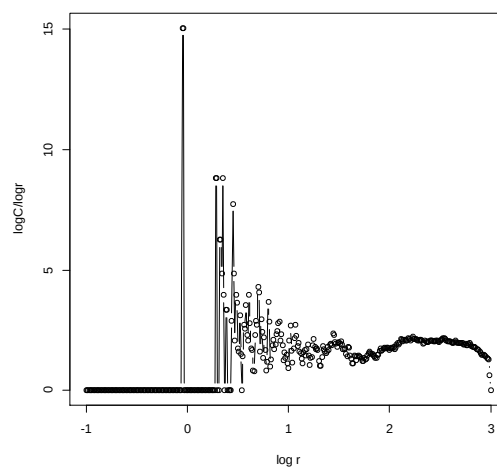
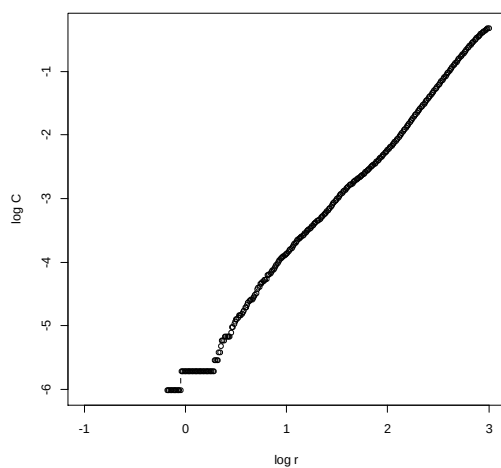


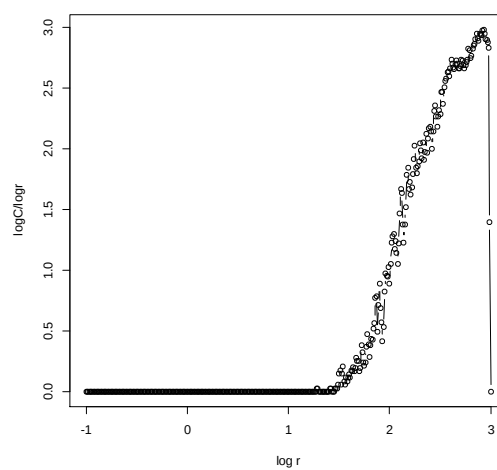
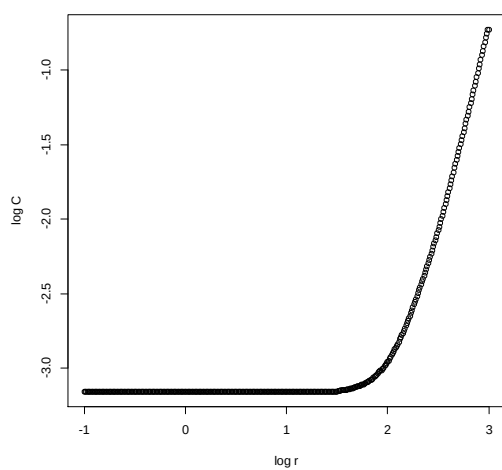
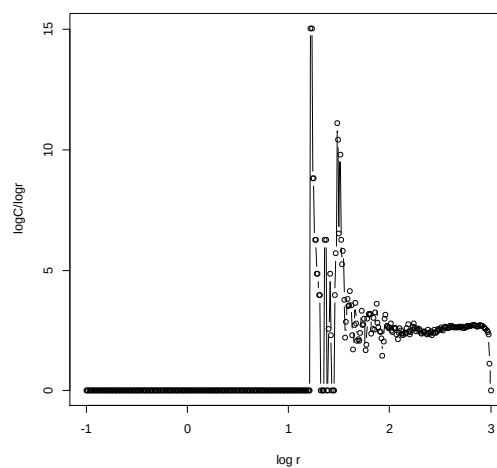
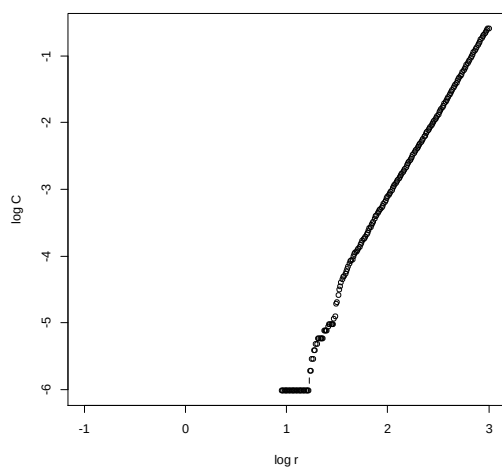
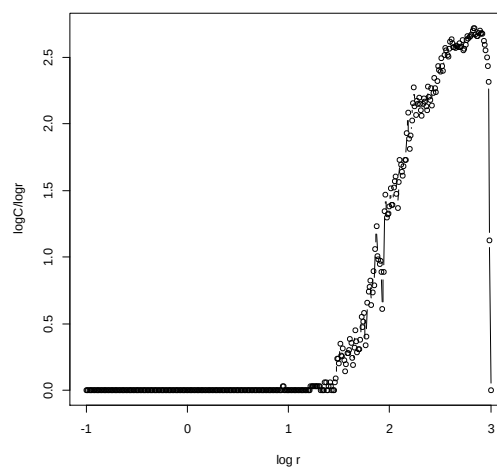
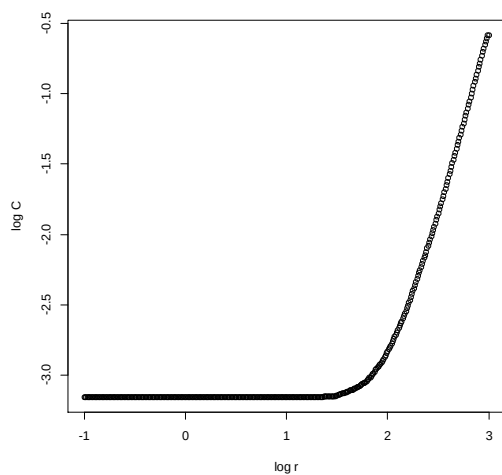


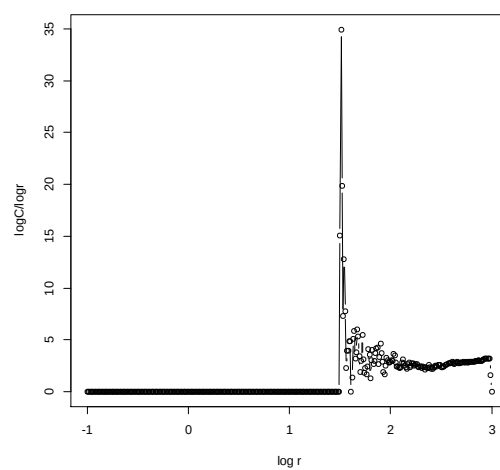
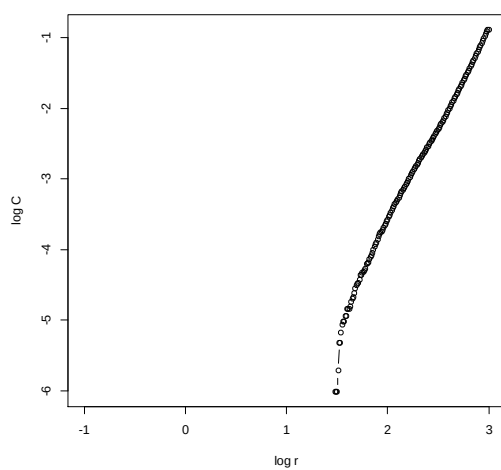
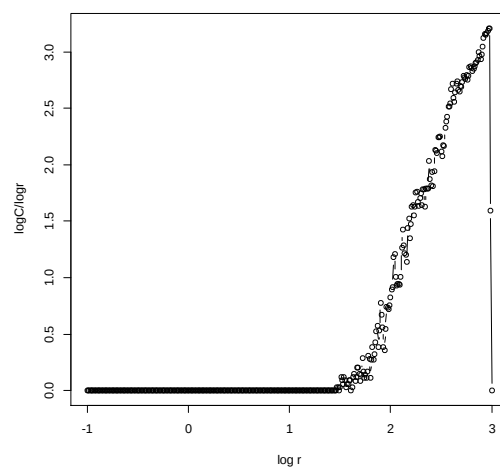
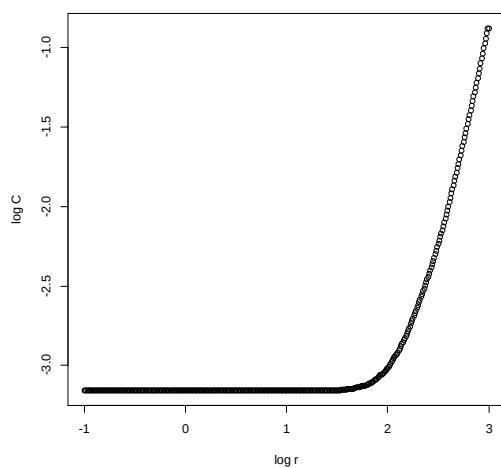
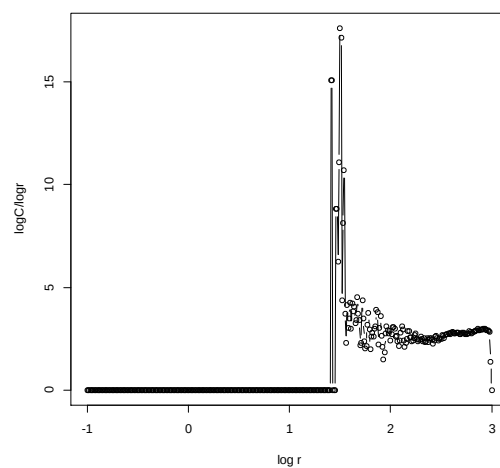
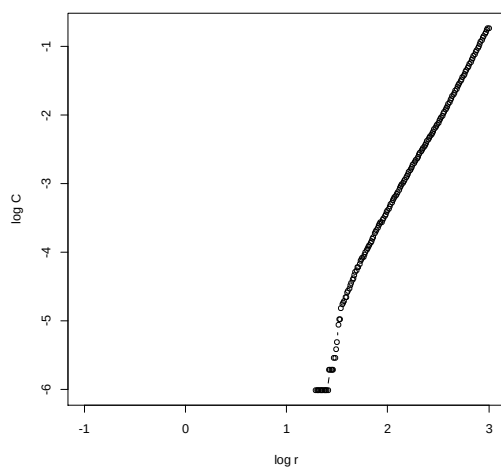


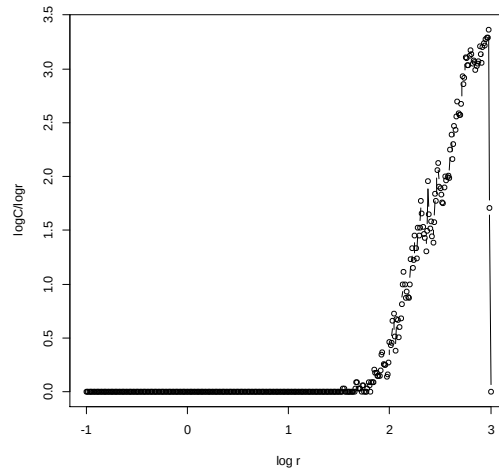
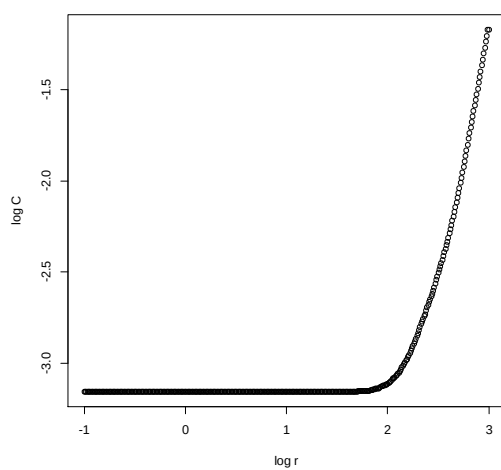
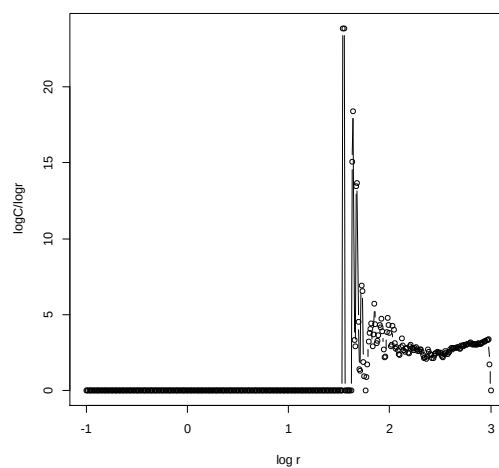
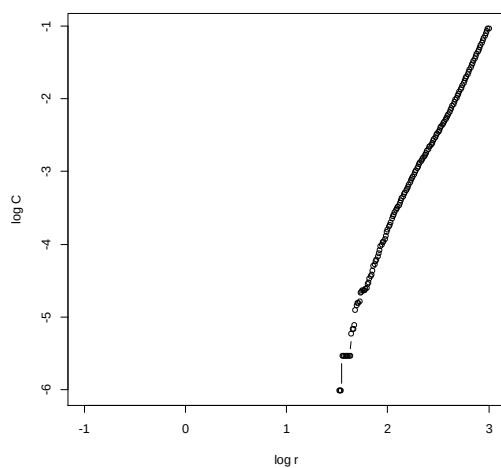
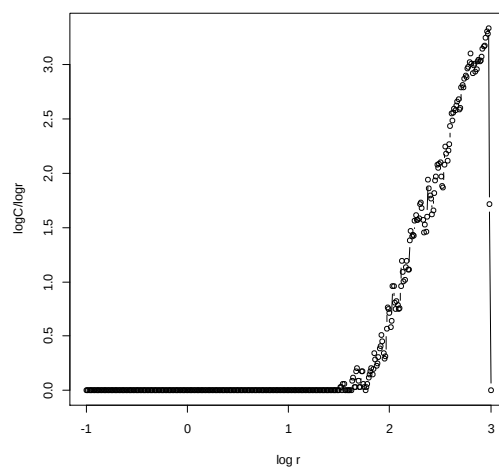
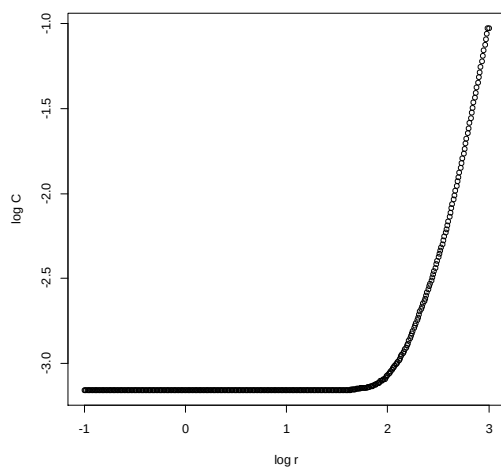
Rn nov/03

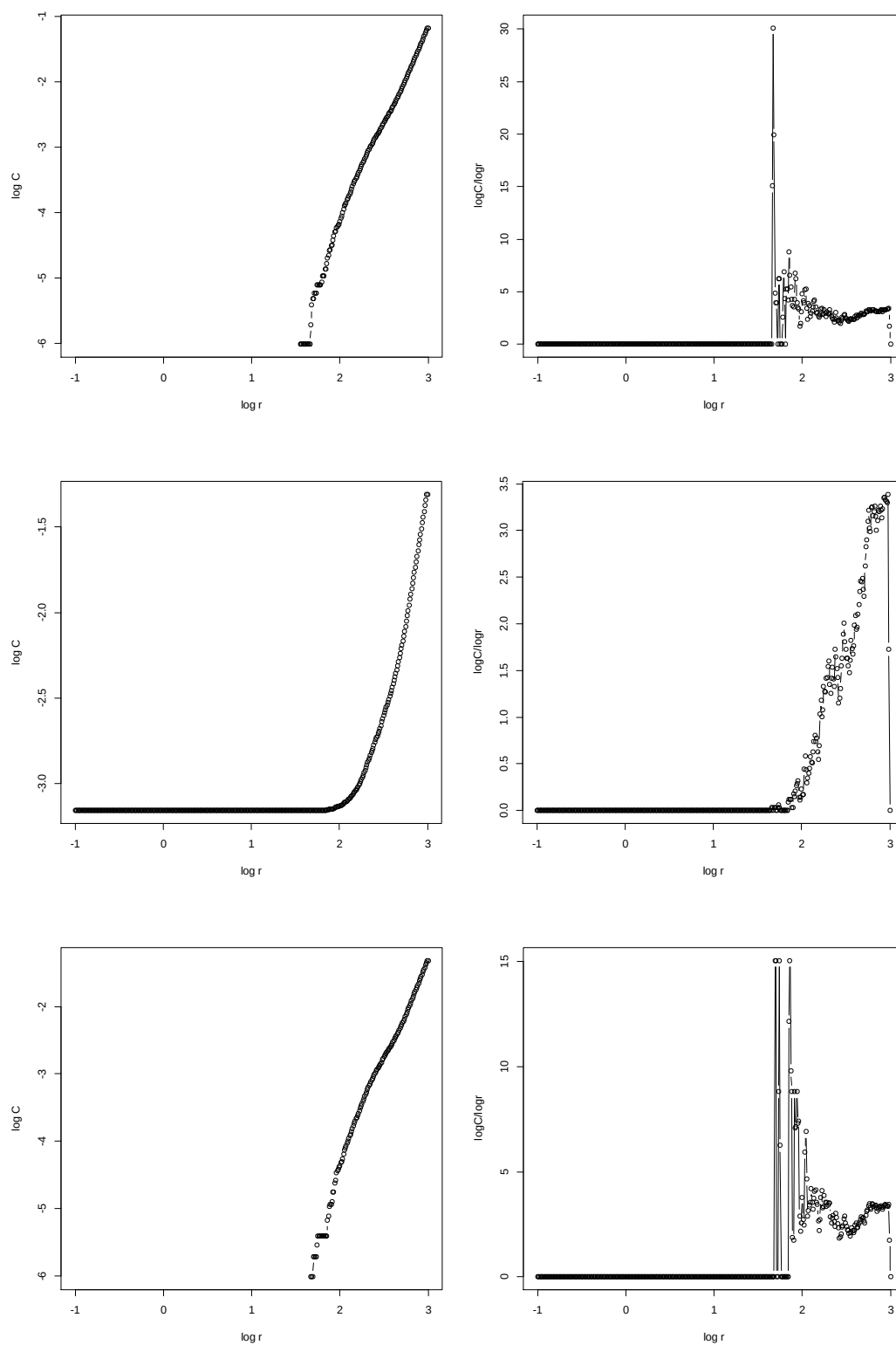


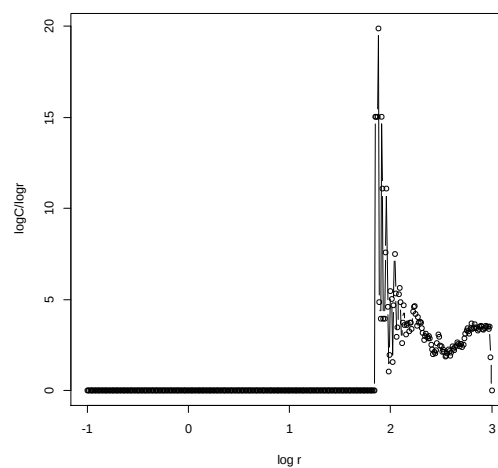
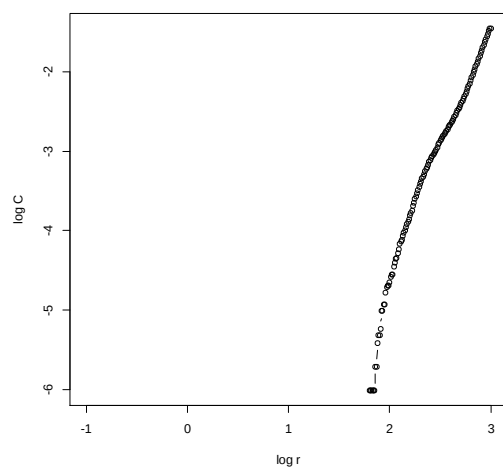
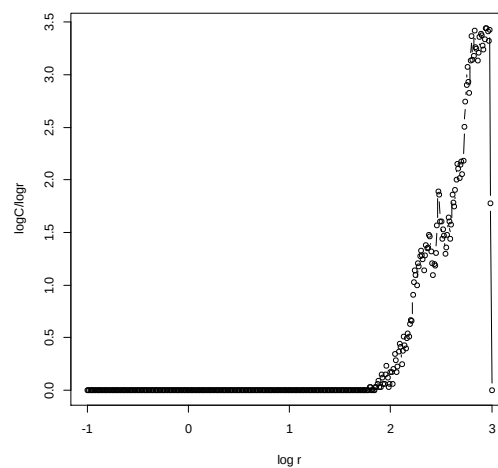
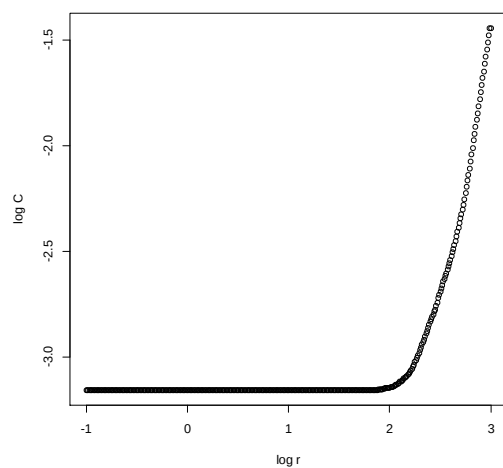


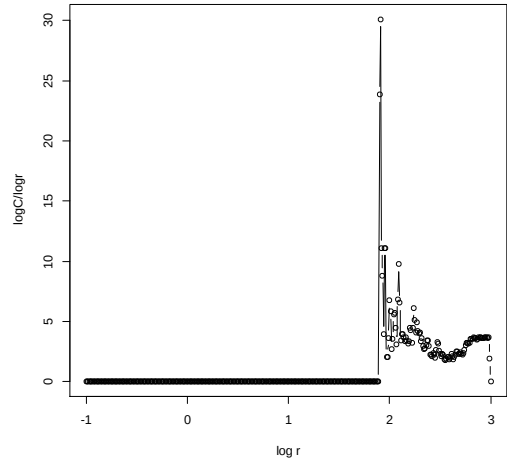
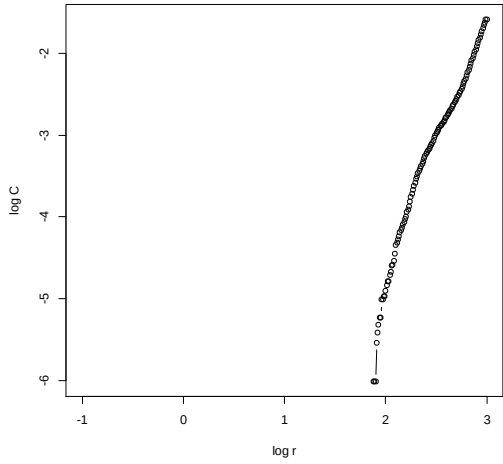
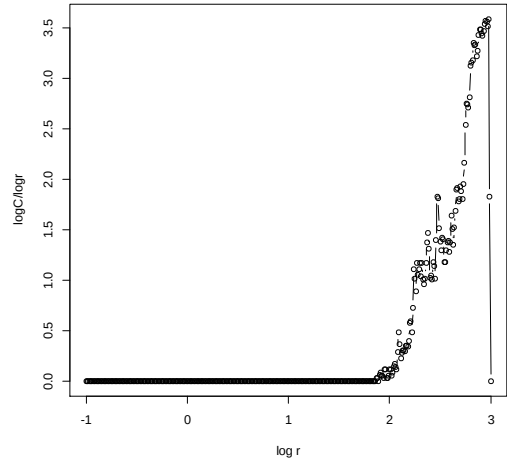
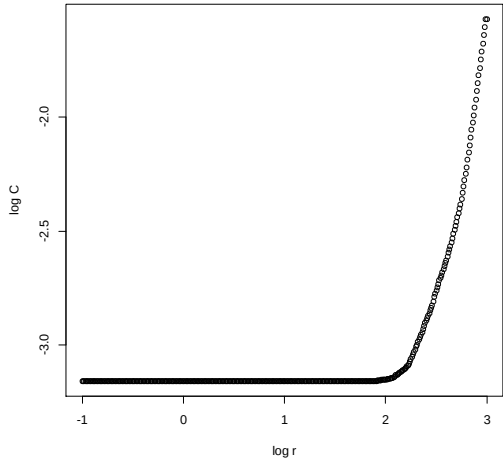




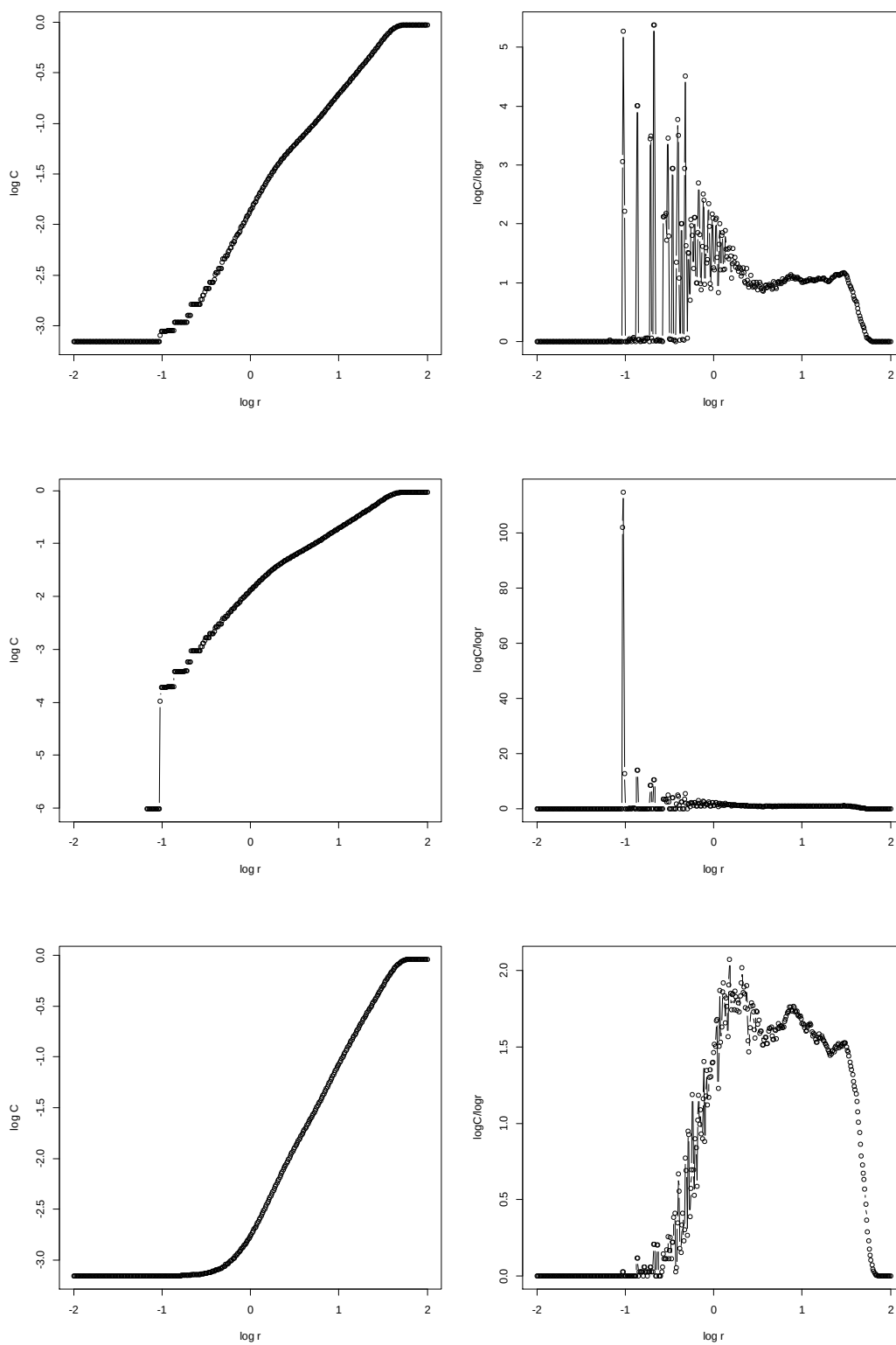


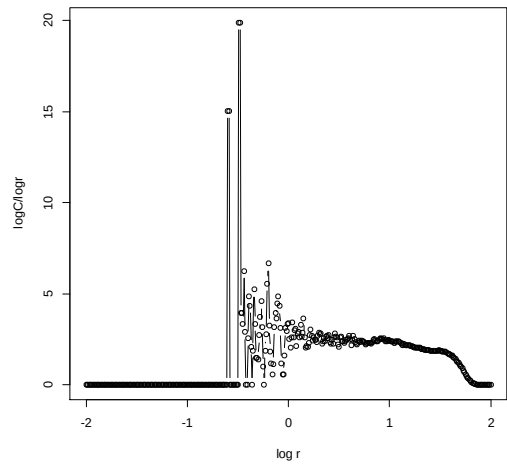
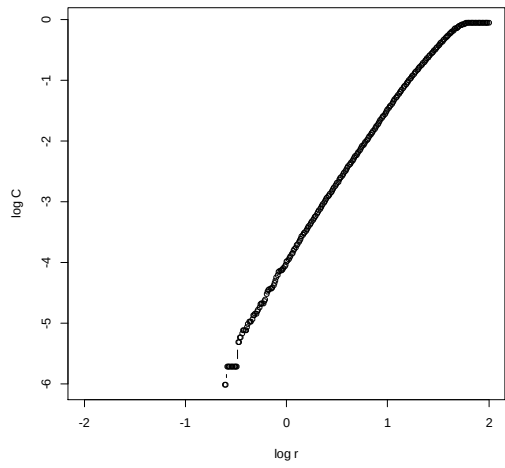
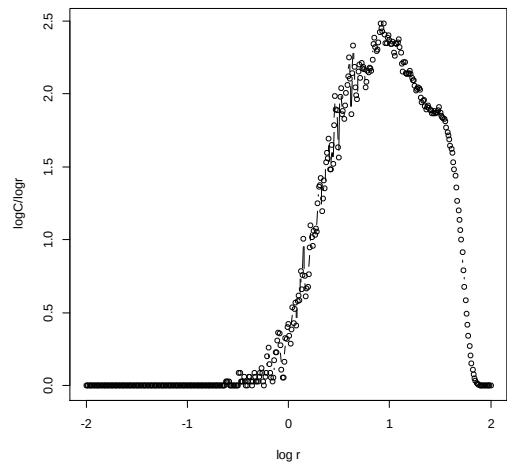
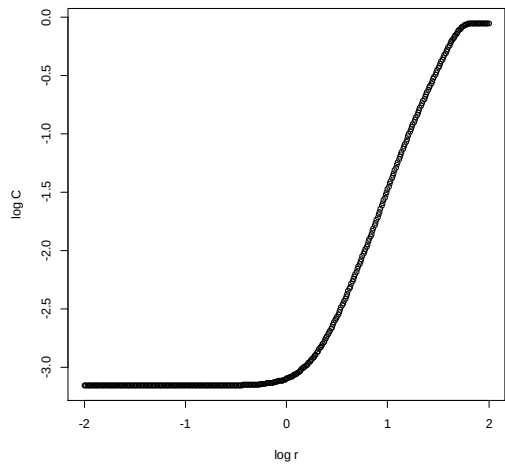
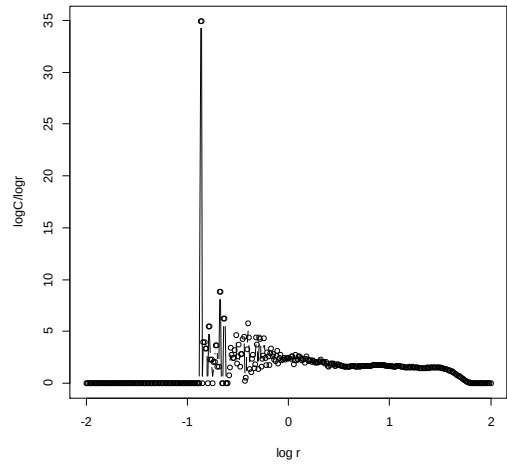
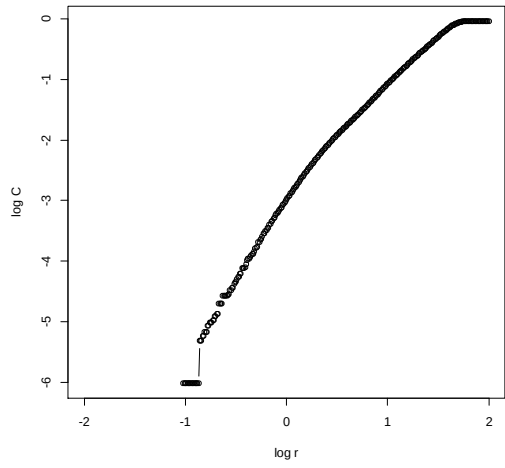


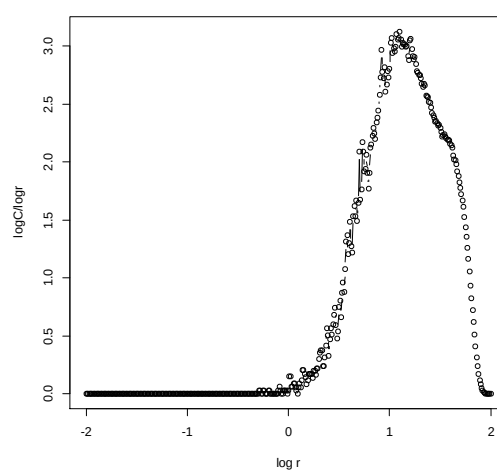
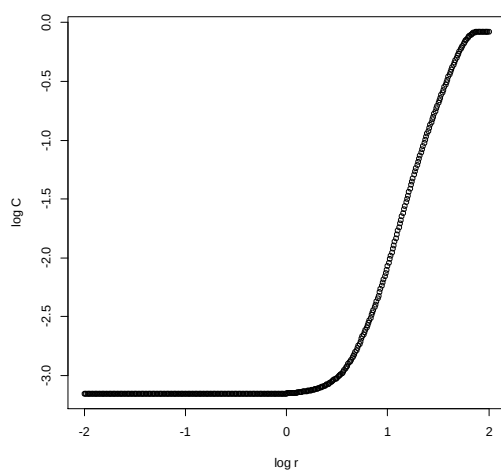
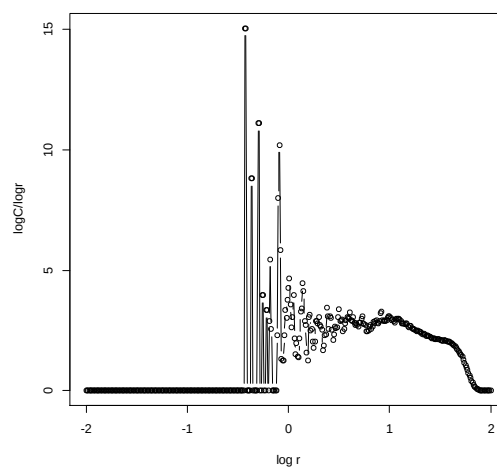
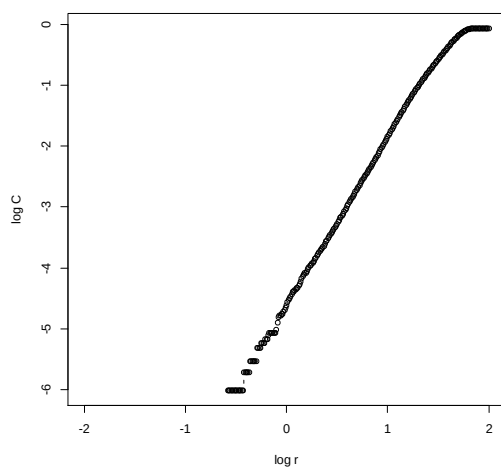
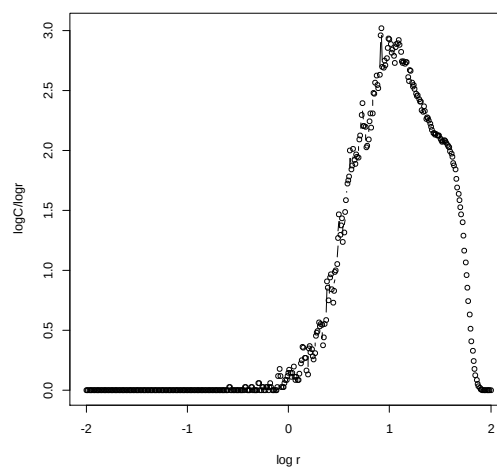
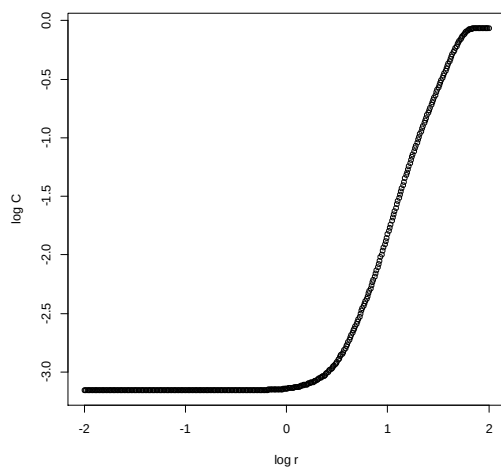


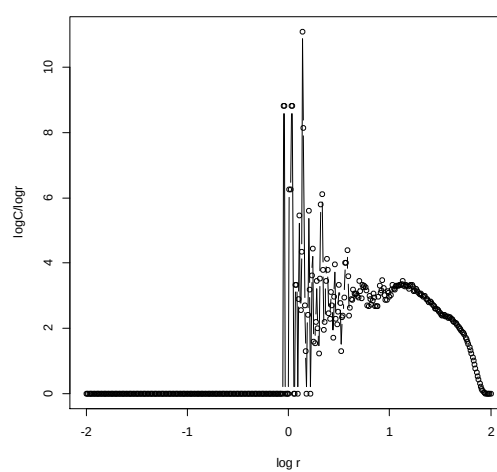
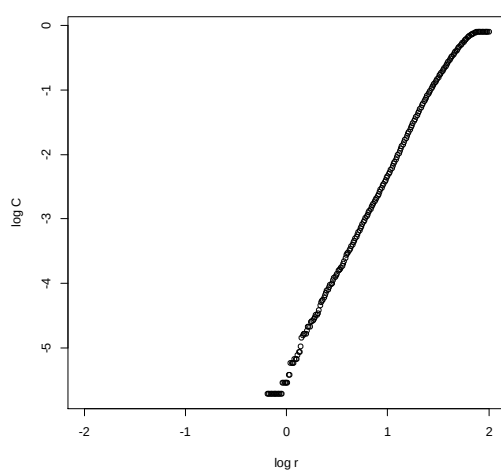
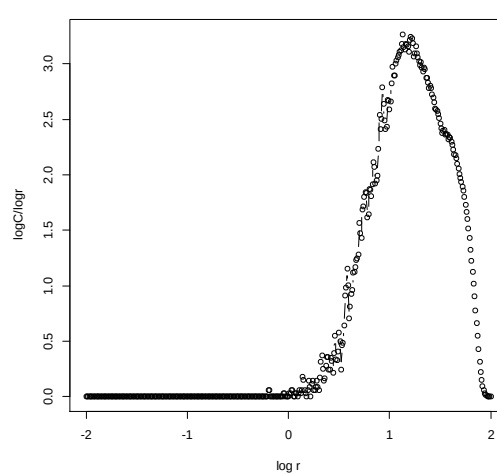
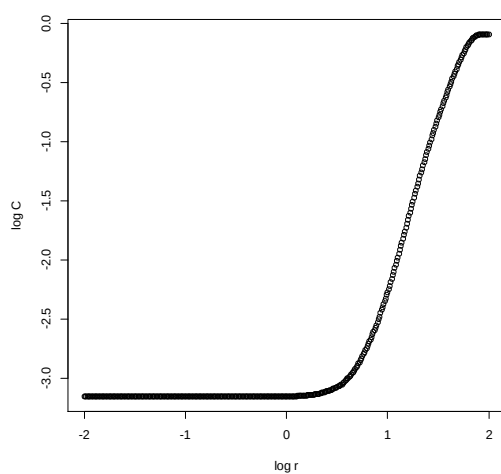
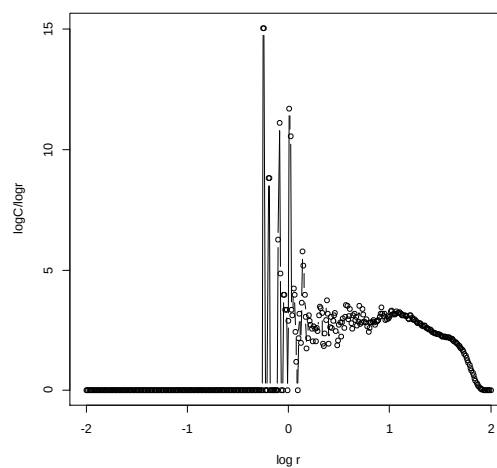
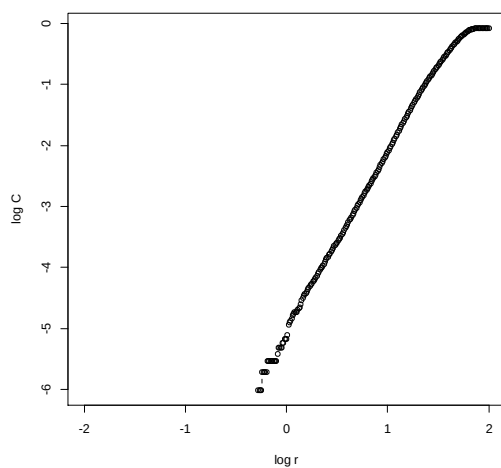


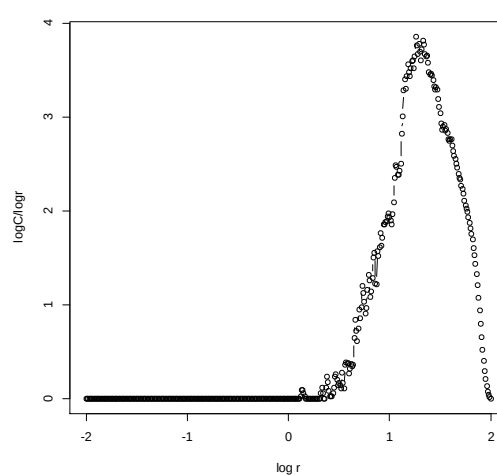
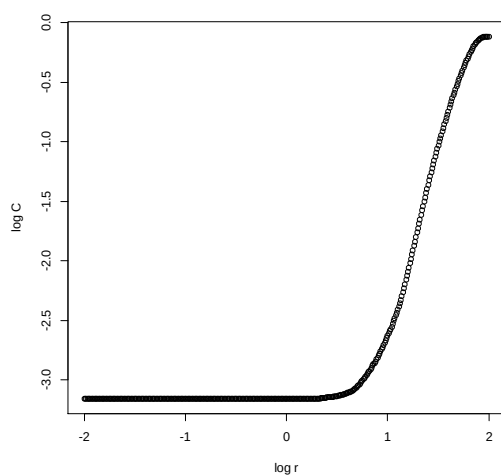
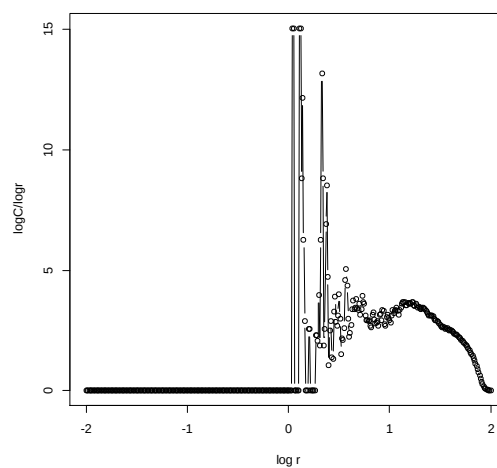
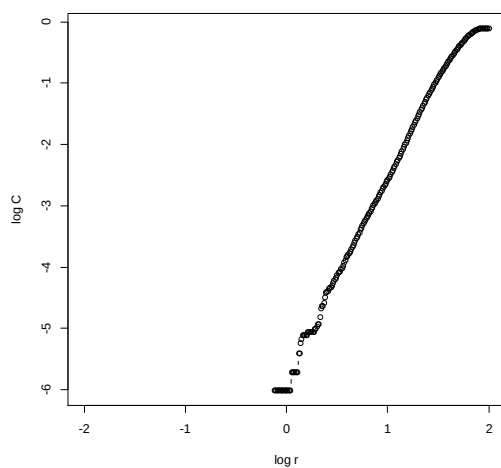
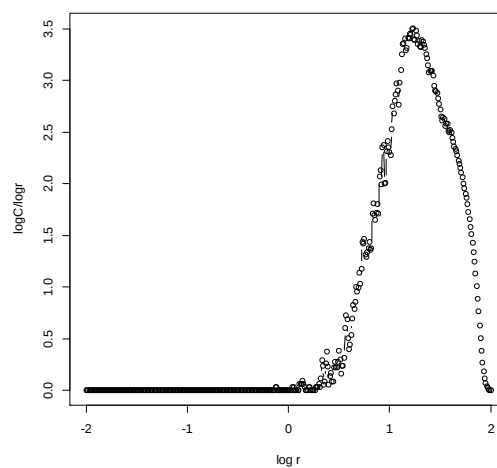
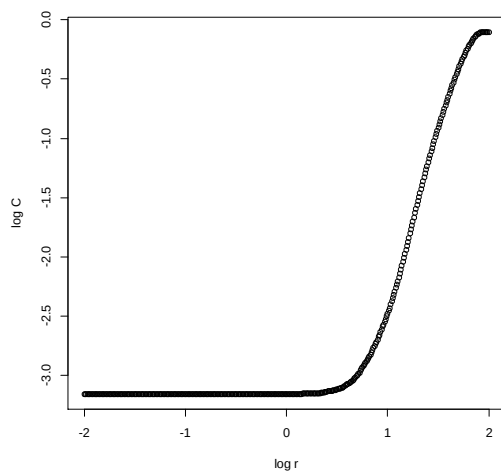
RH nov/03

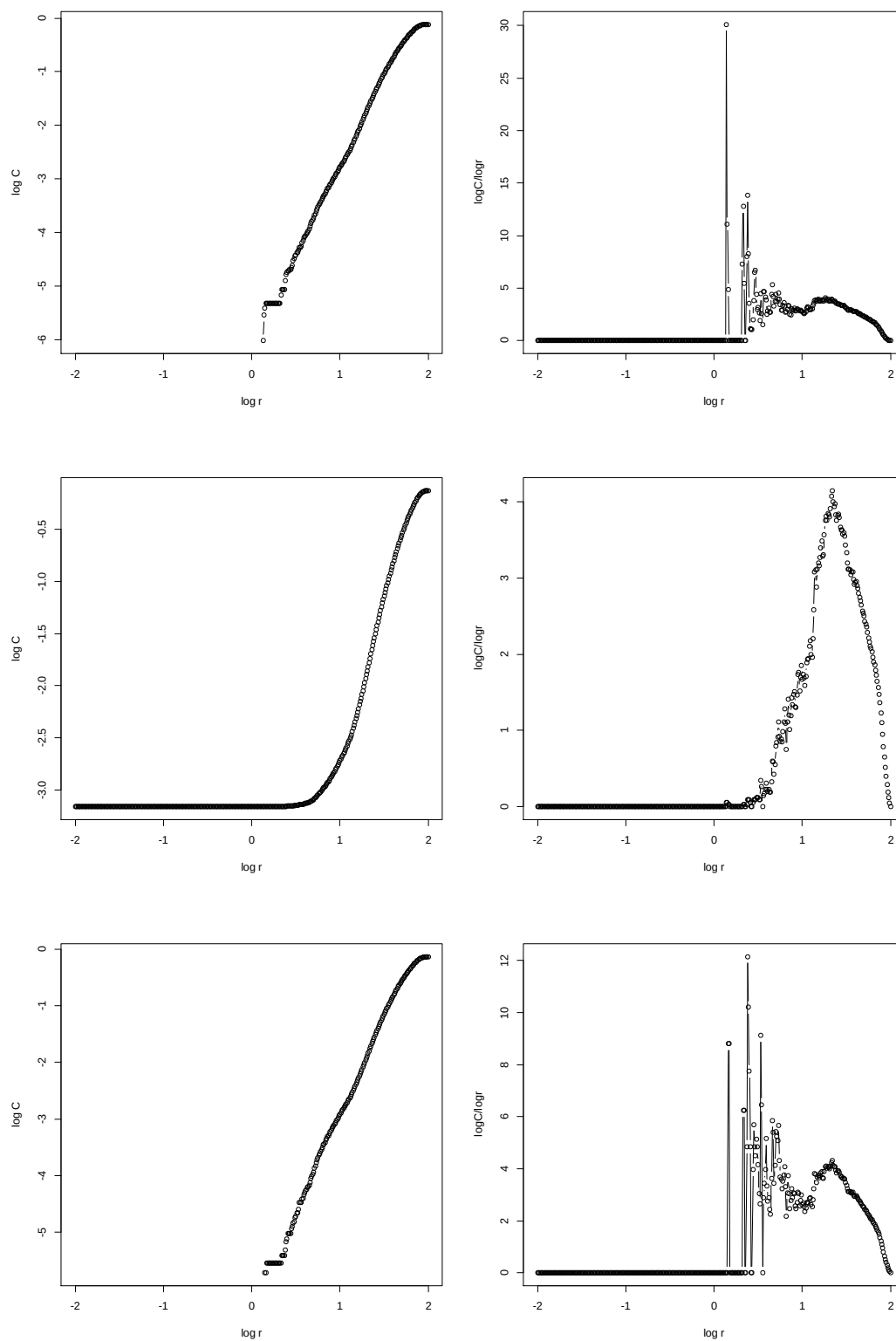


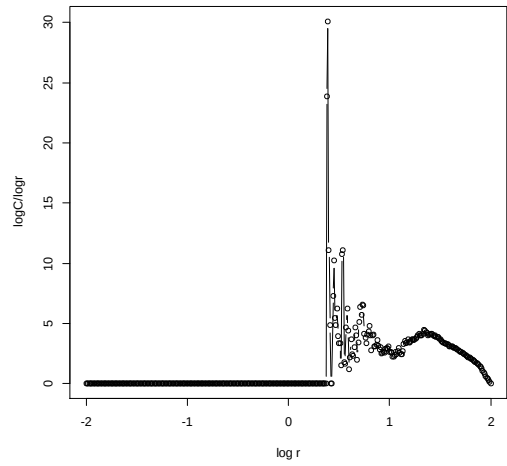
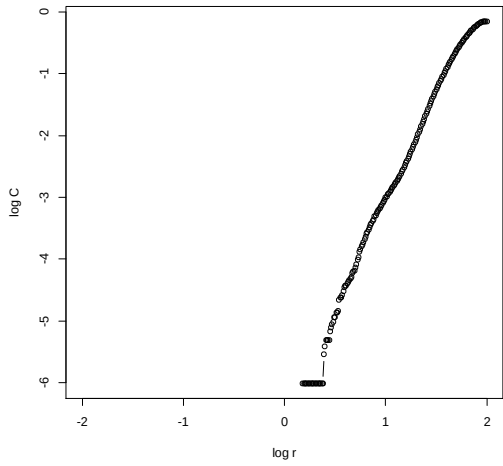
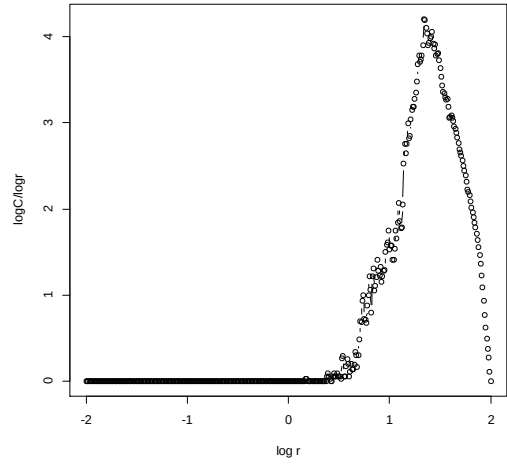
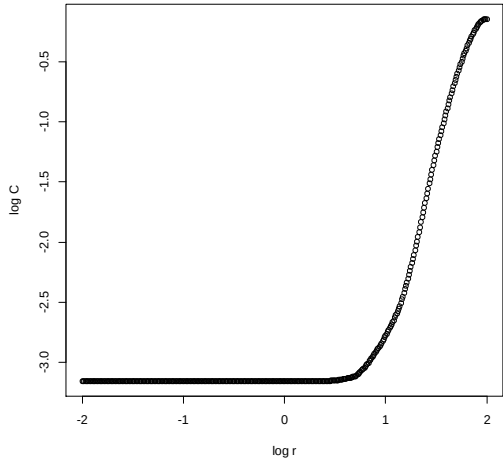


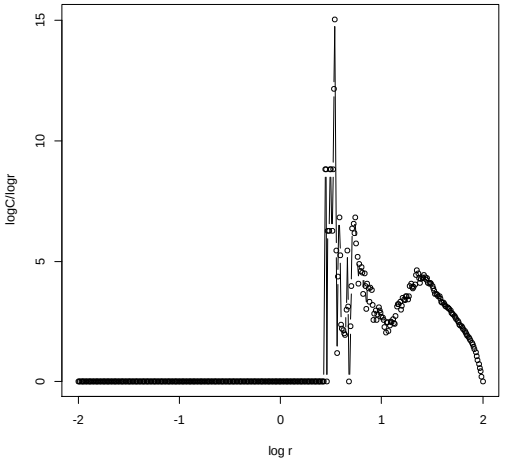
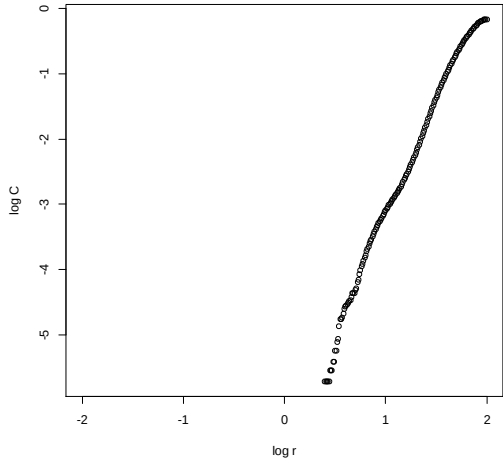
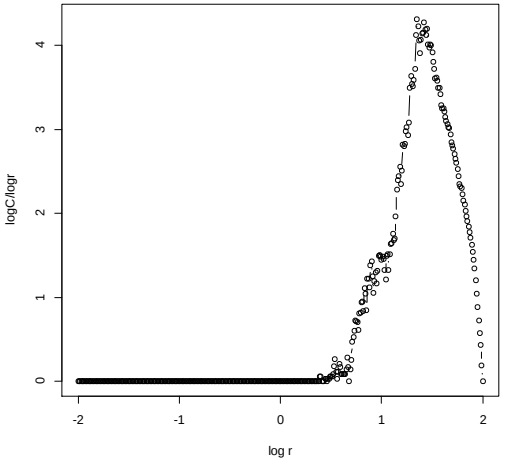
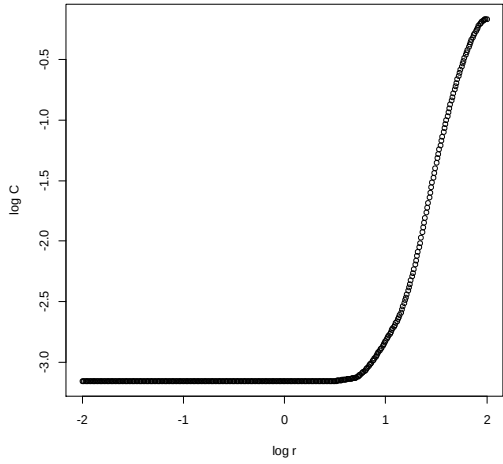




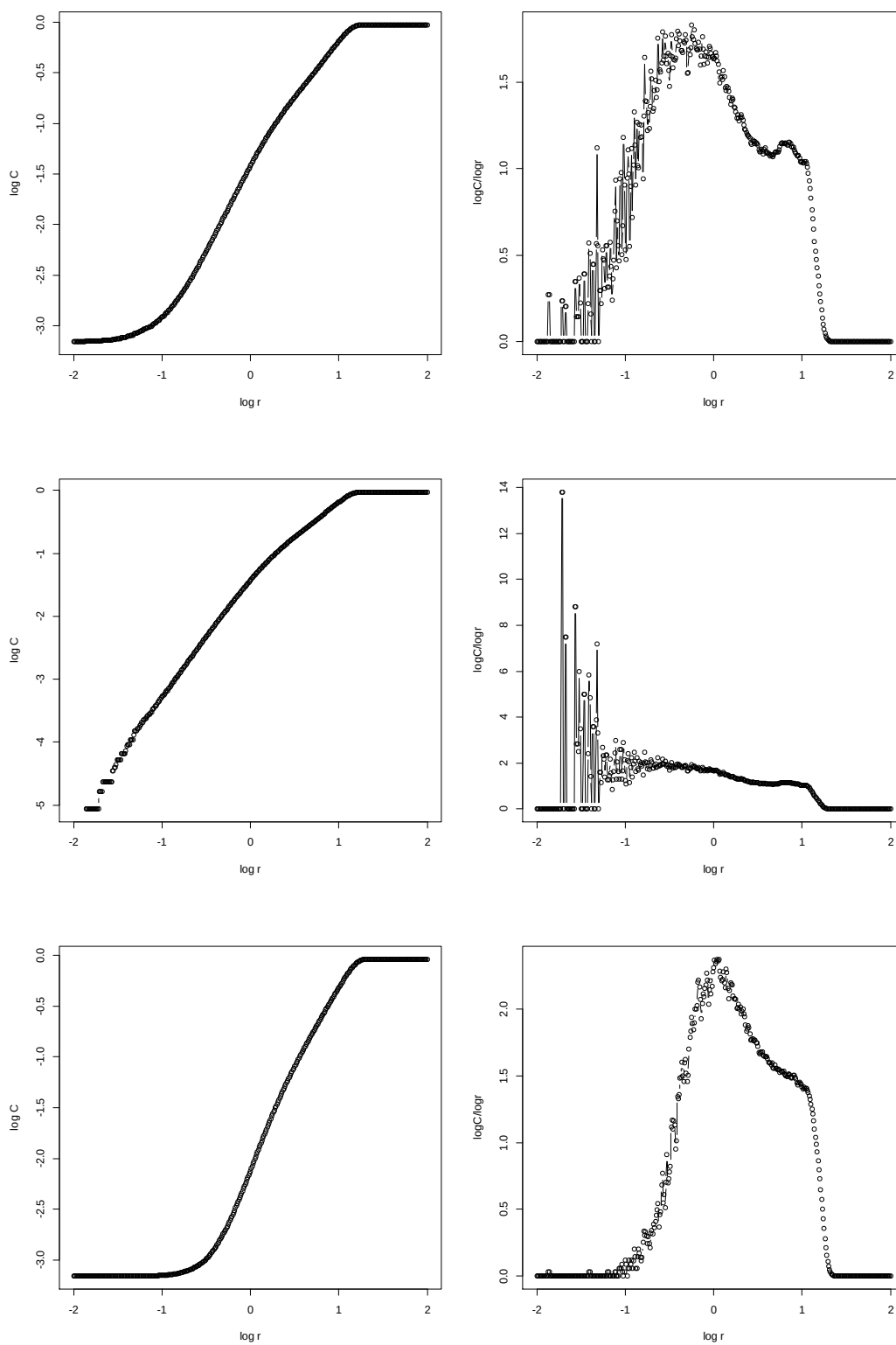


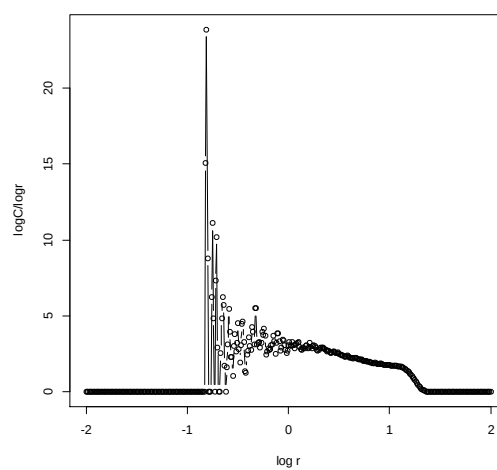
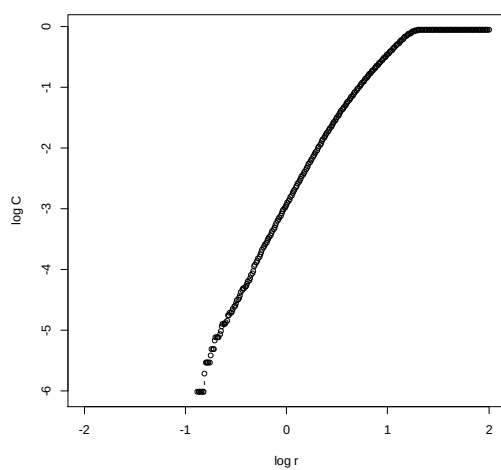
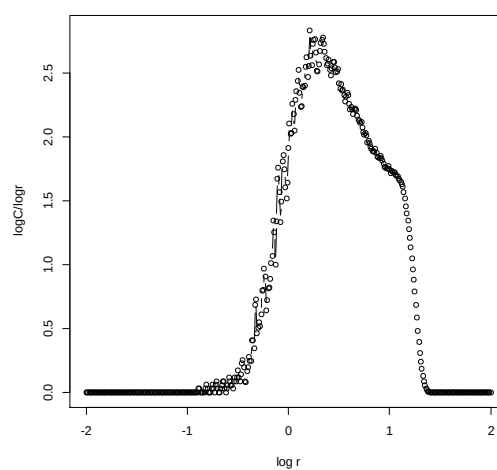
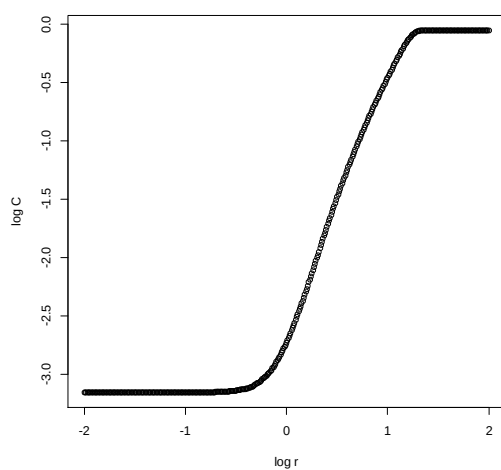
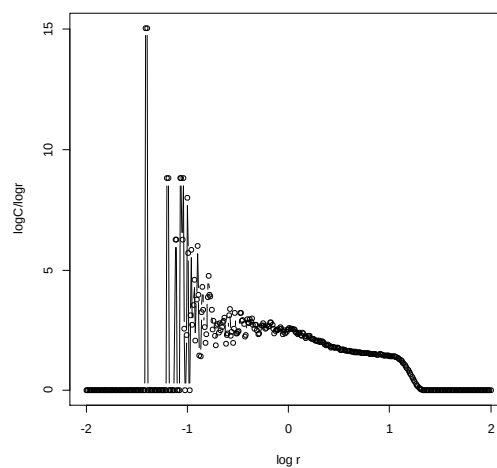
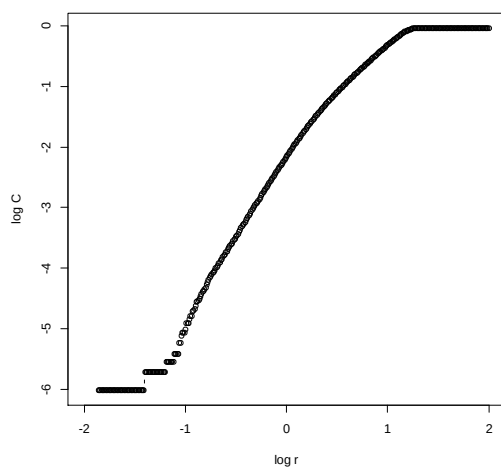


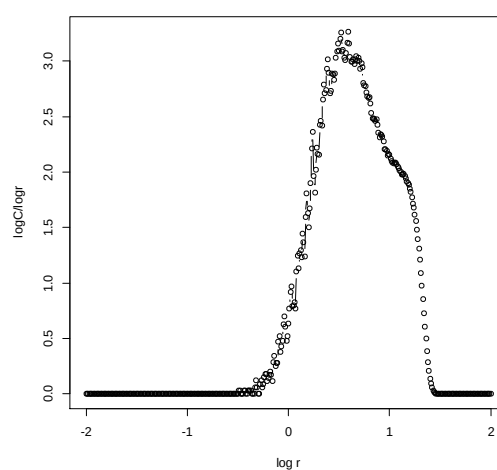
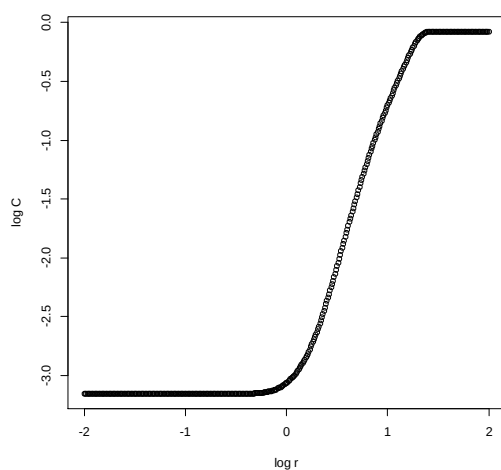
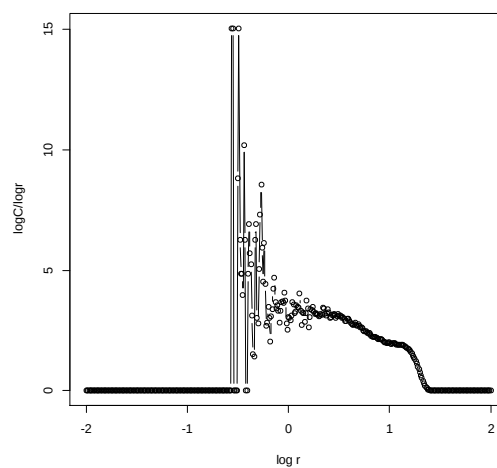
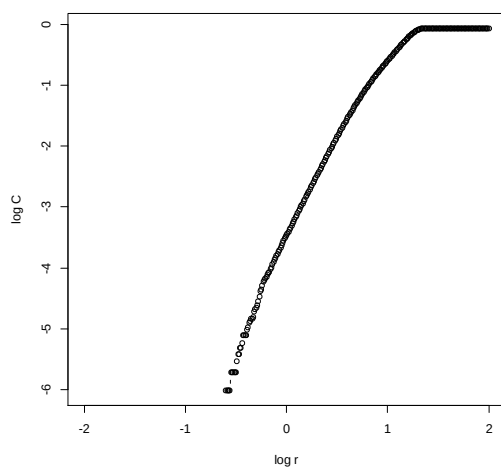
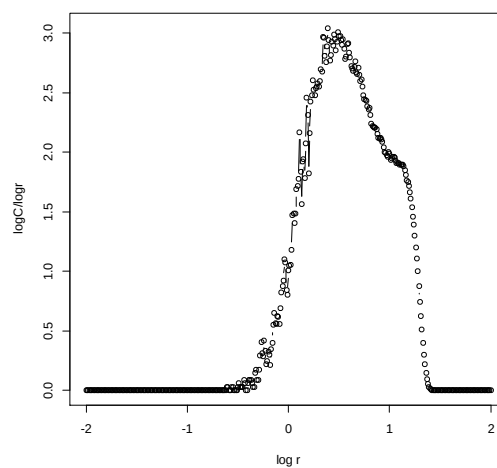
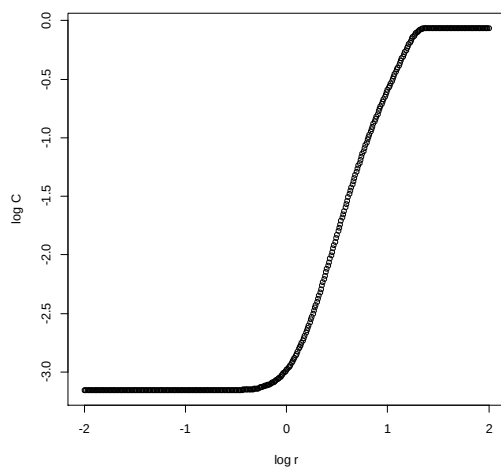


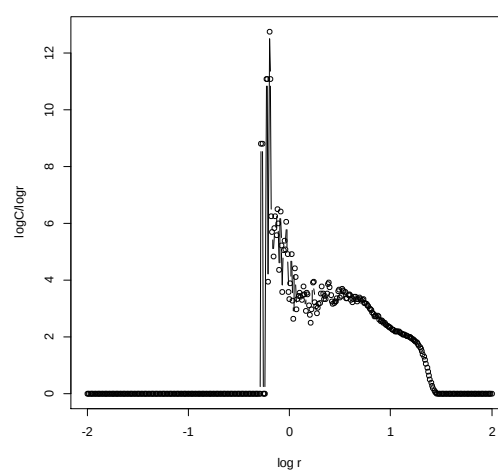
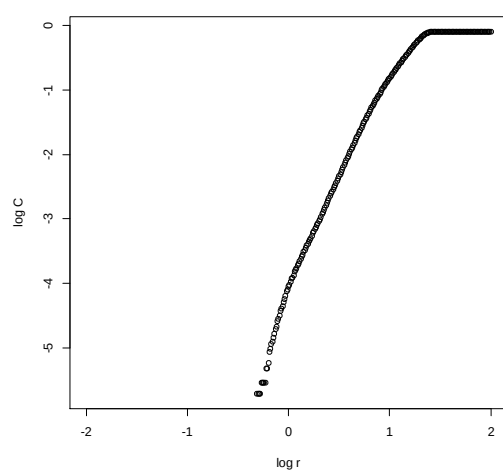
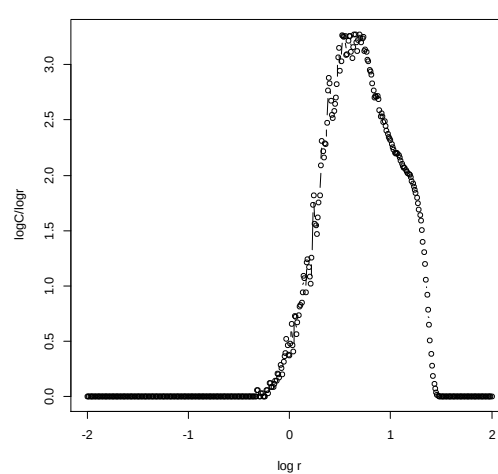
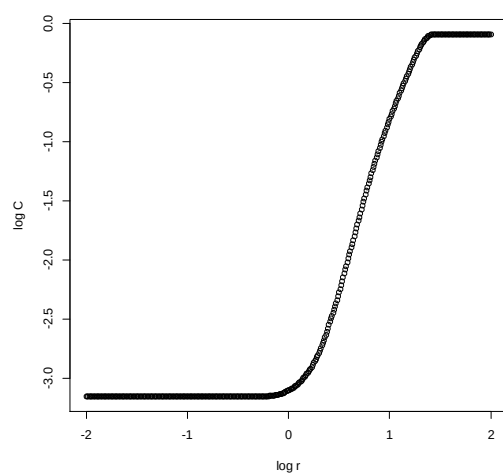
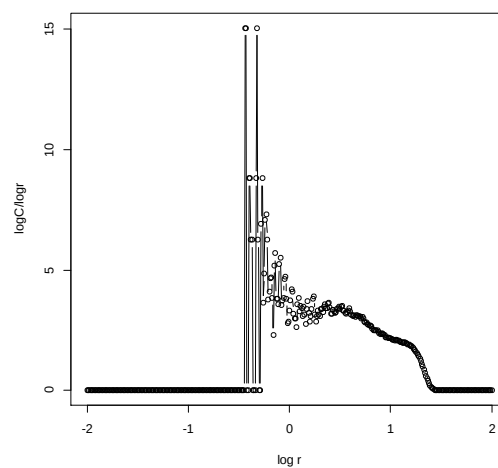
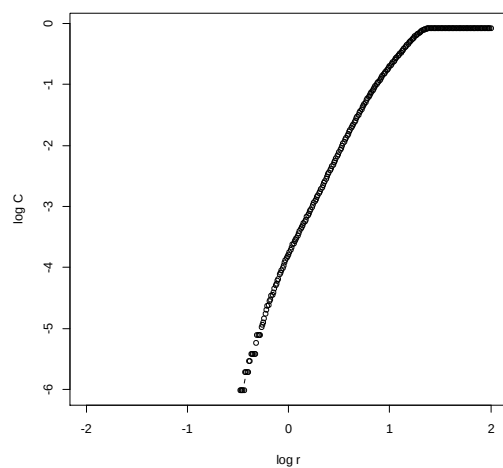


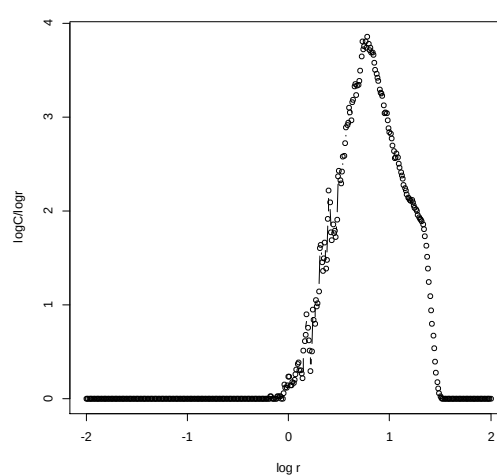
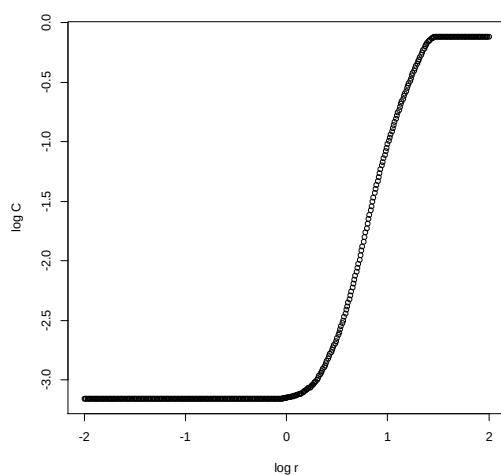
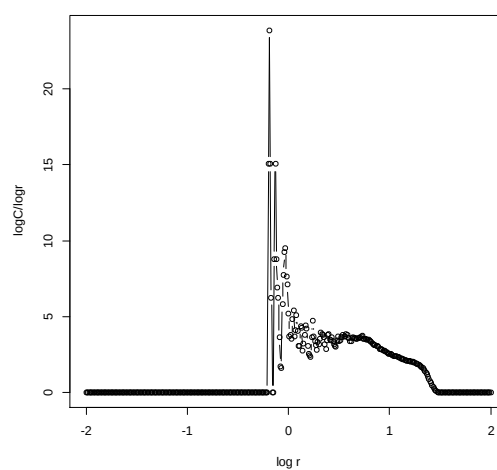
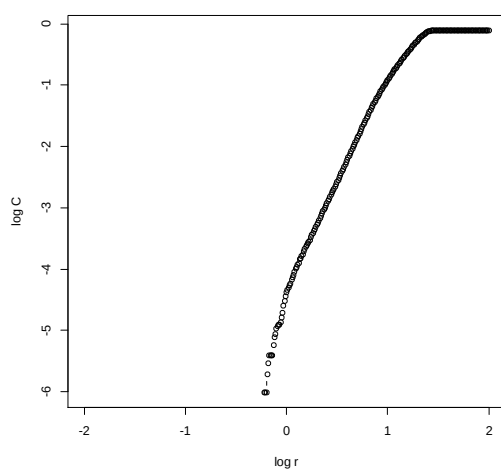
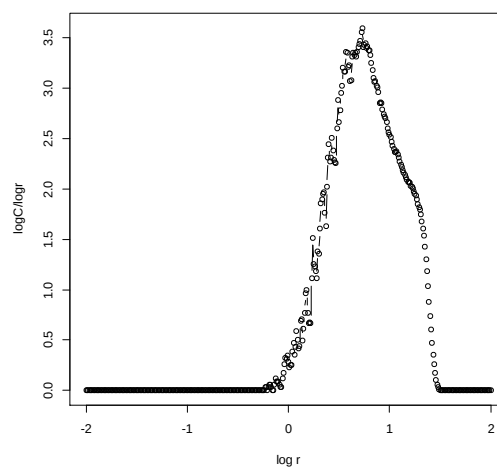
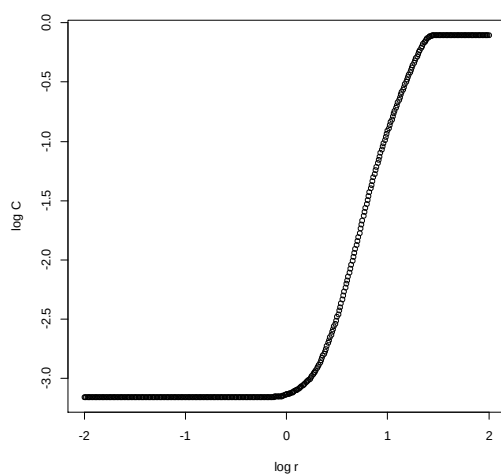
T40 nov/03

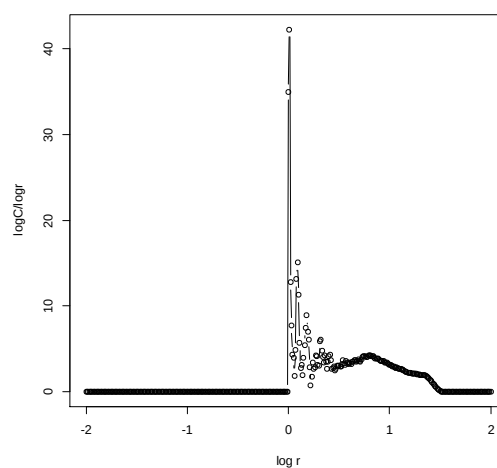
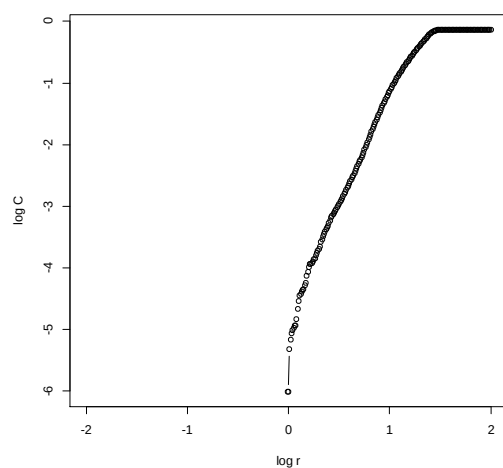
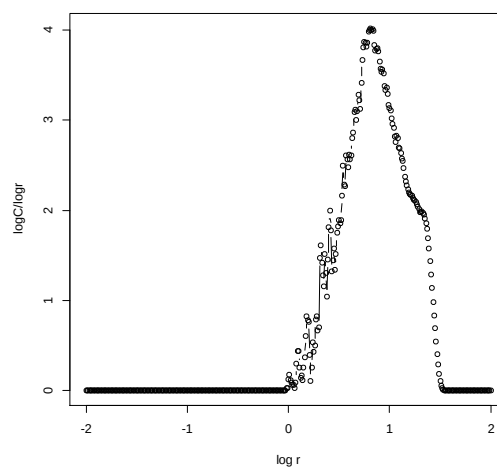
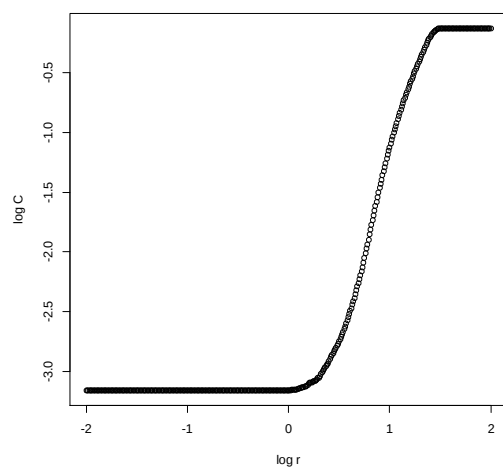
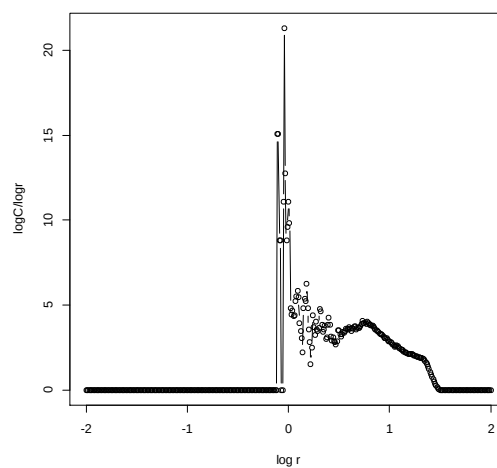
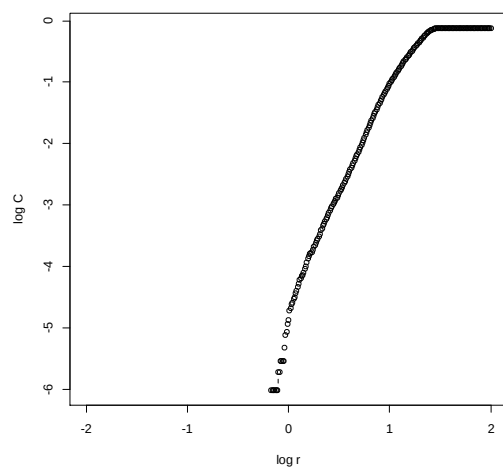


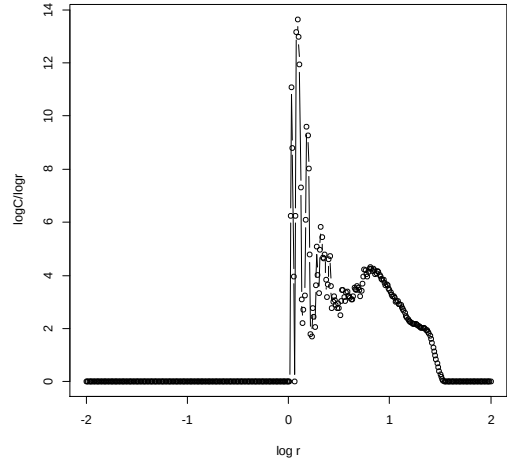
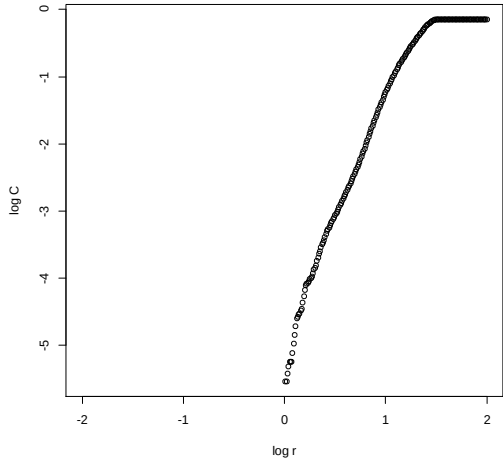
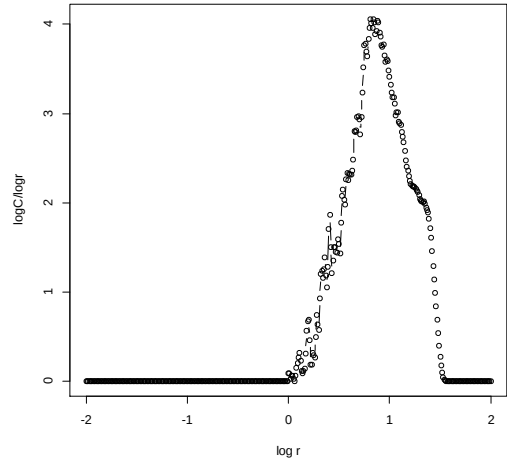
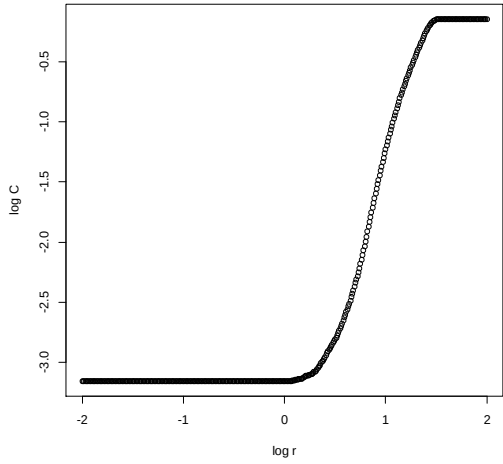


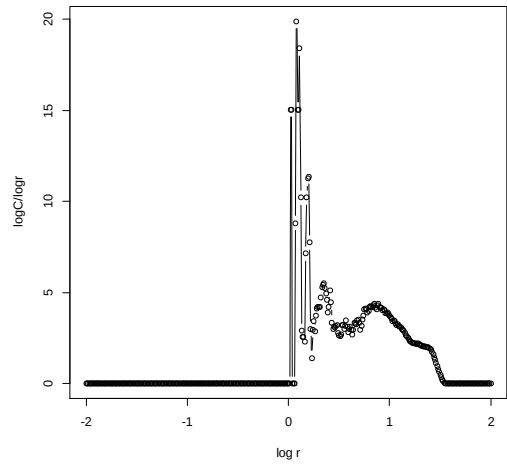
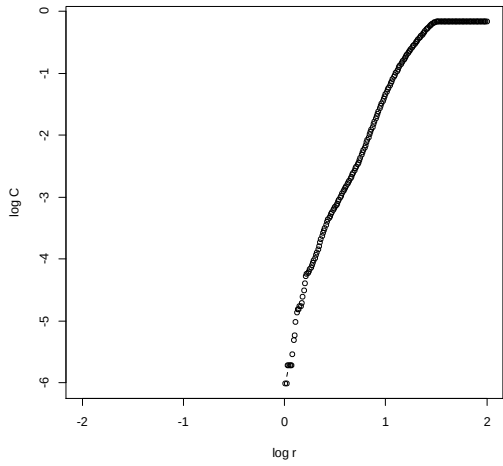
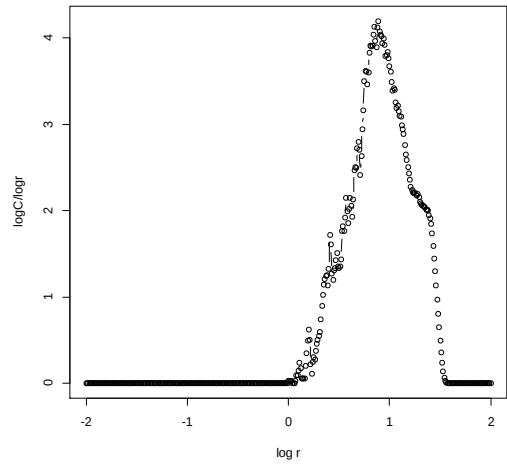
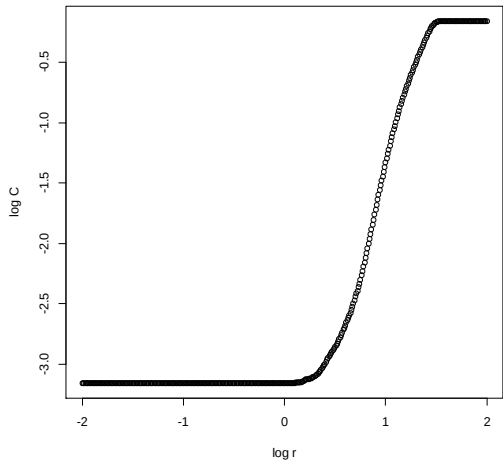




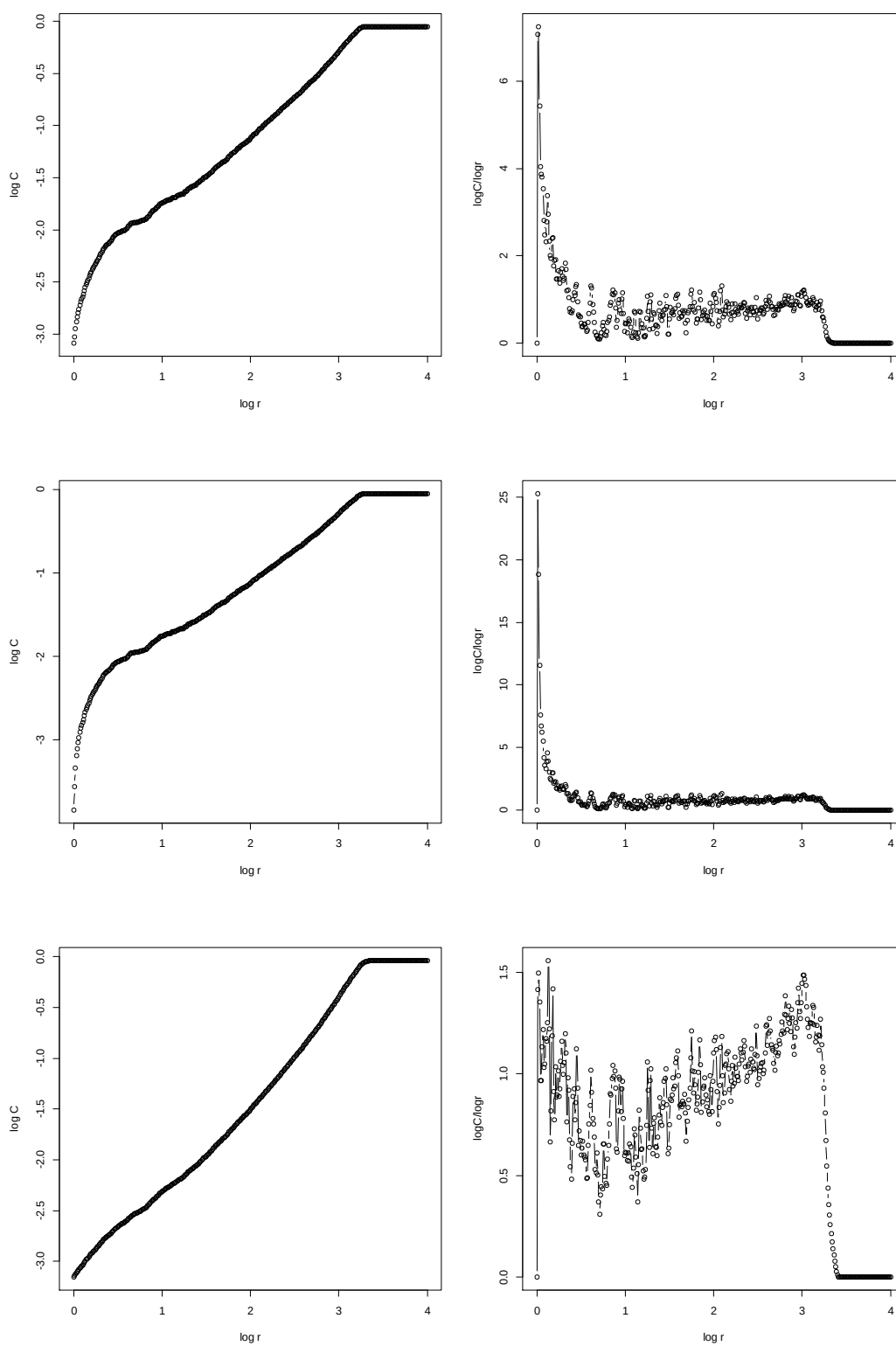


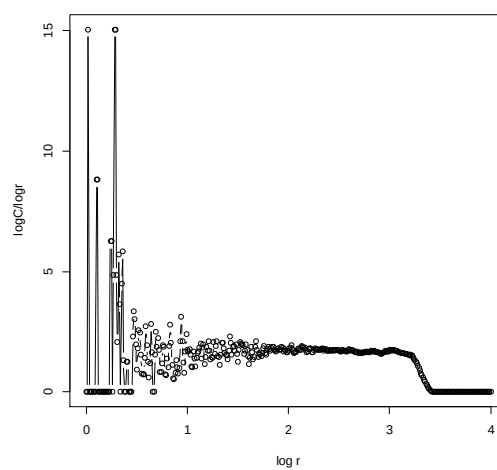
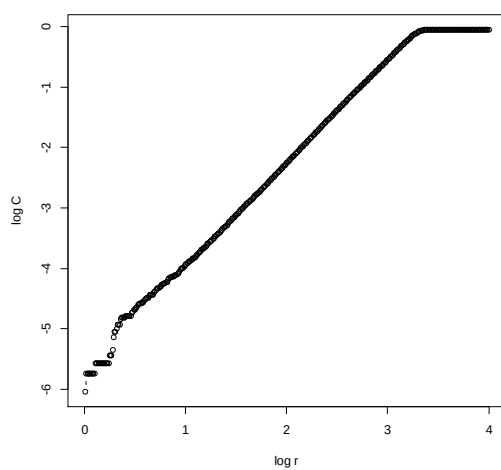
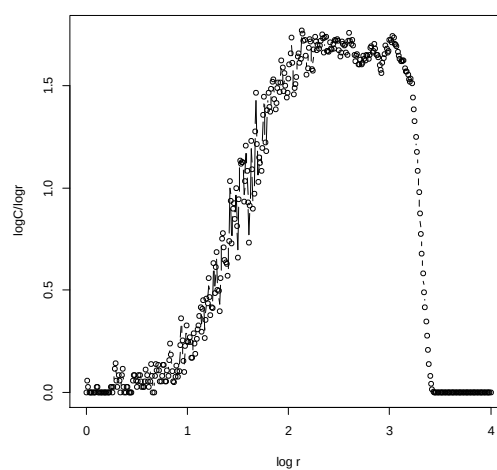
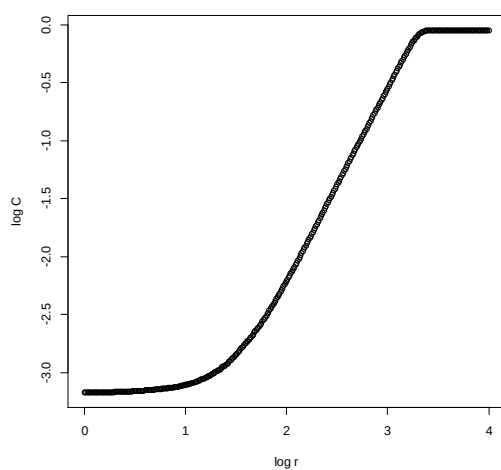
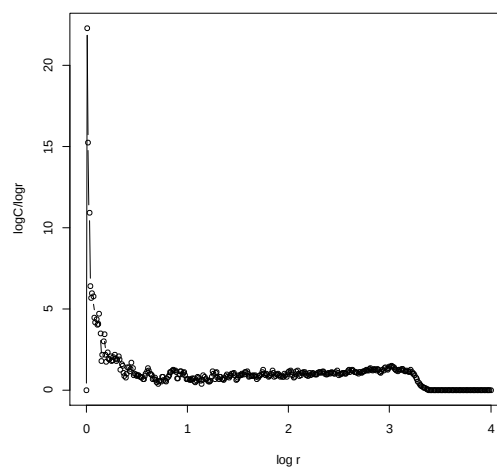
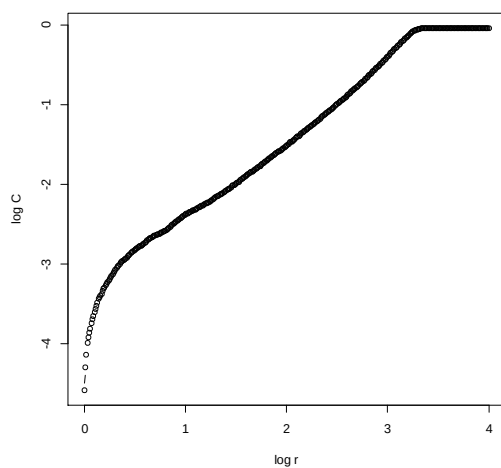


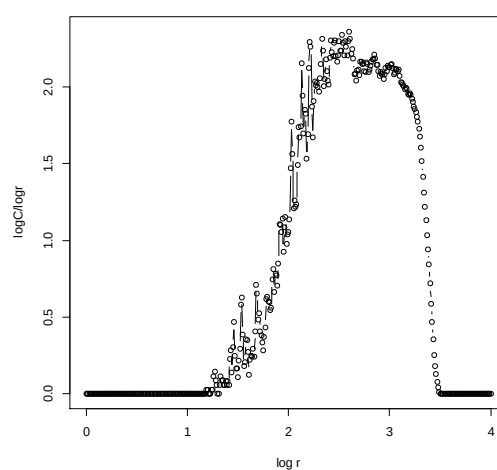
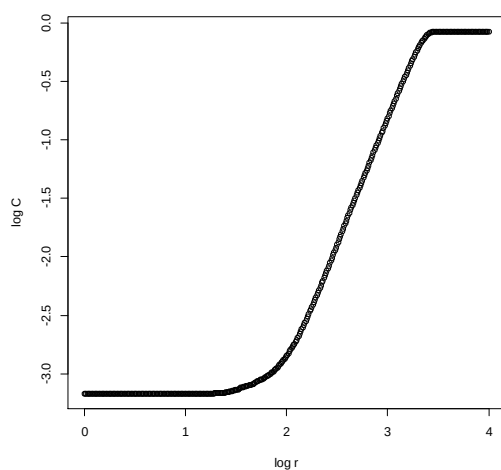
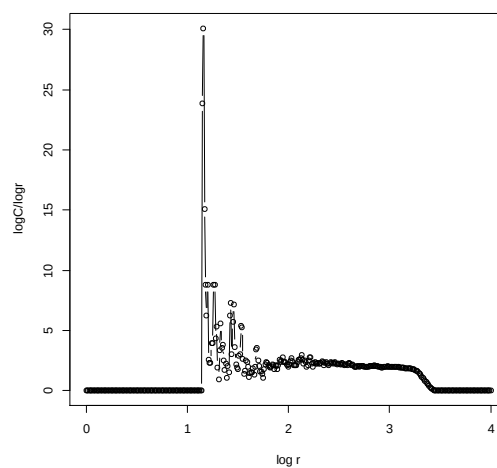
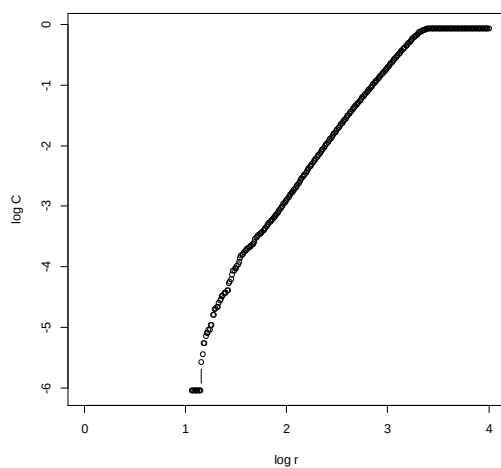
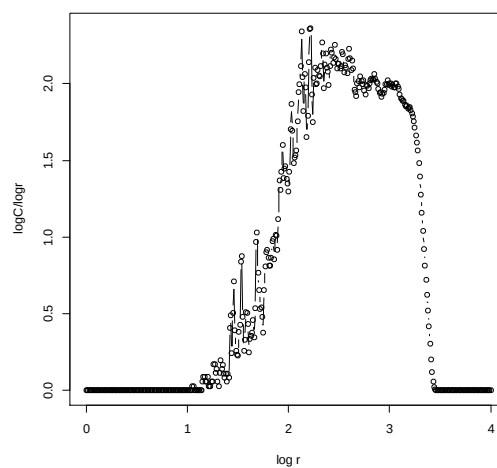
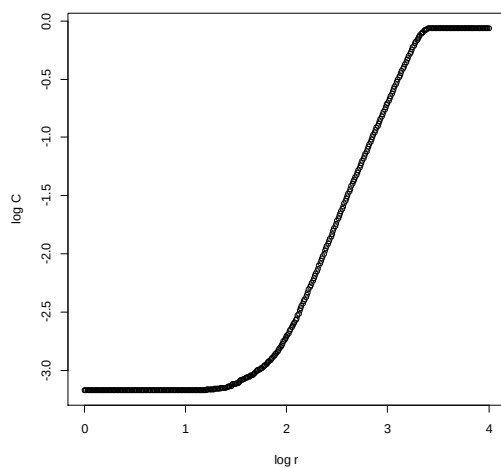


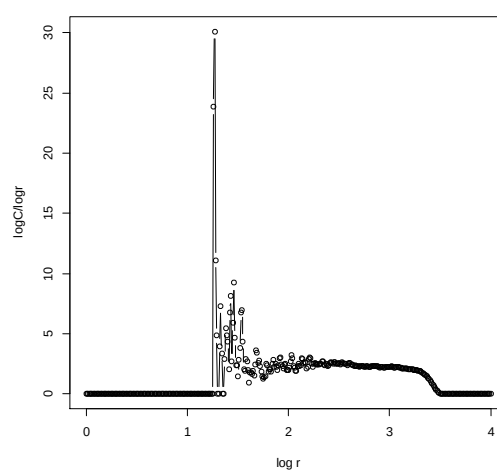
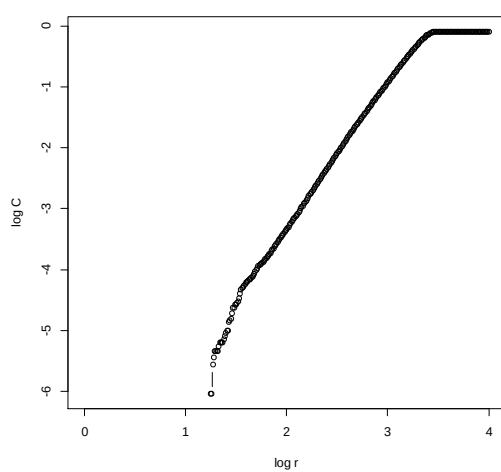
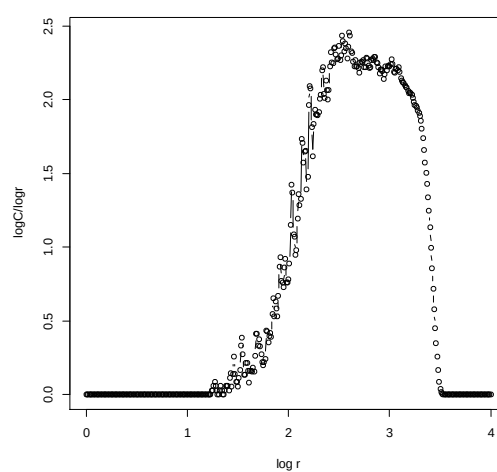
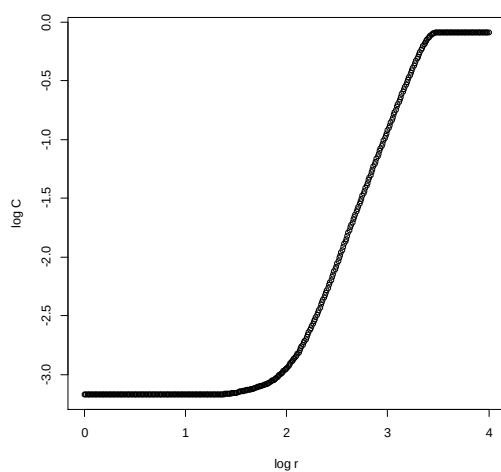
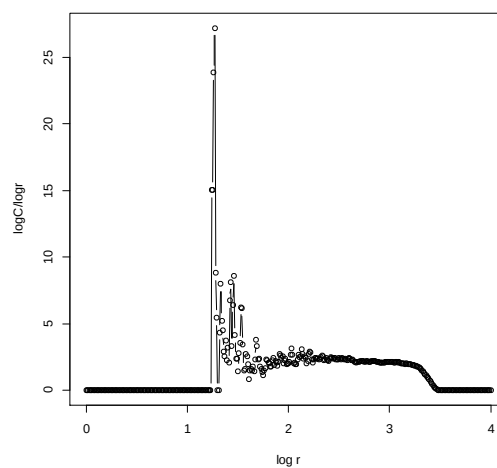
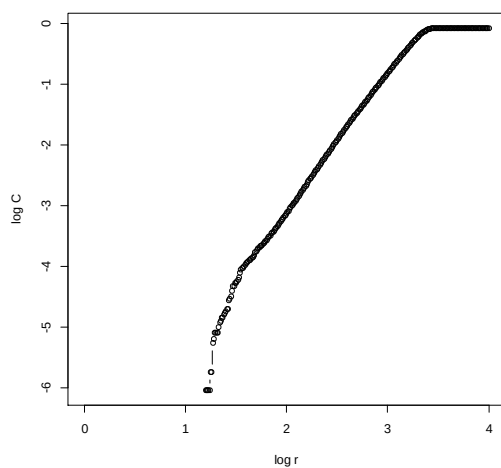


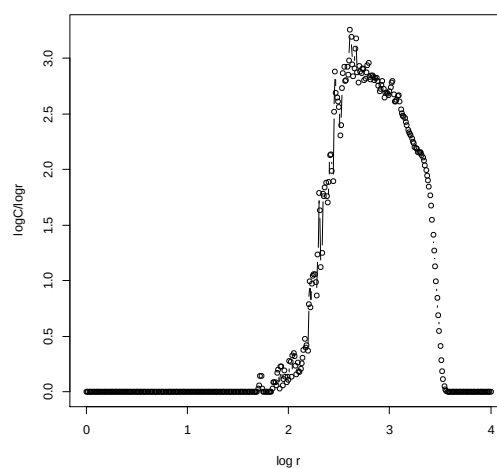
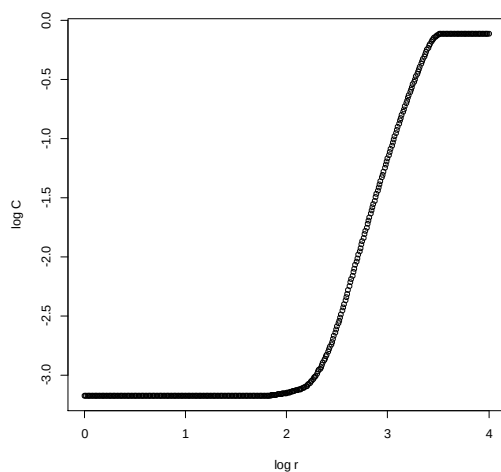
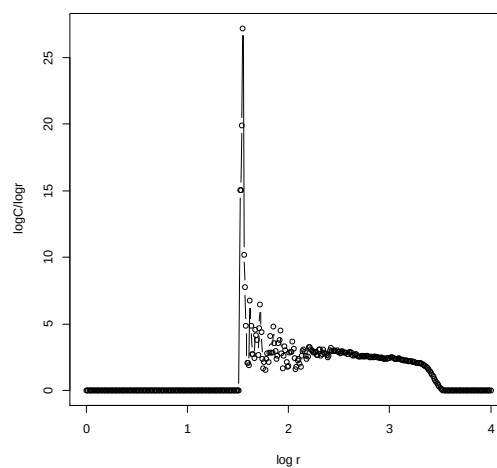
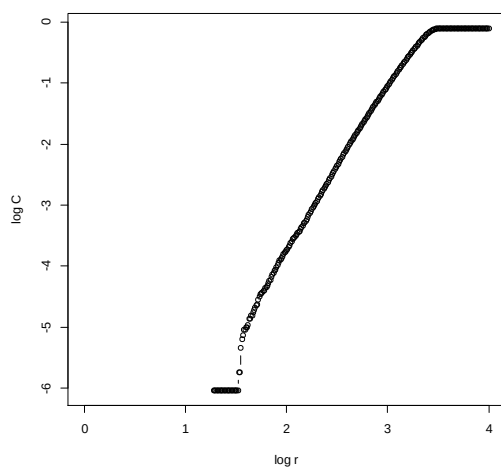
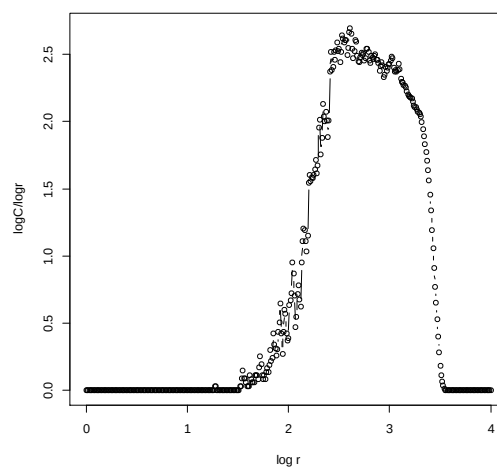
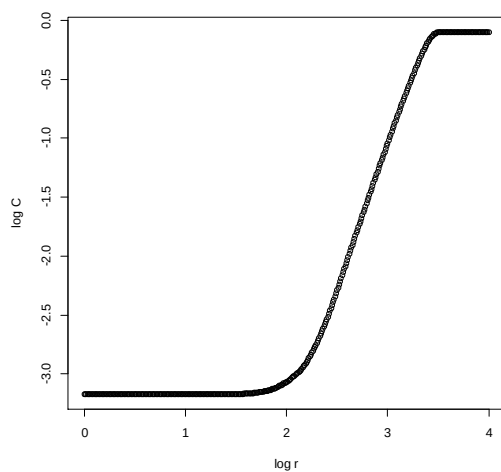
PARI dez/03

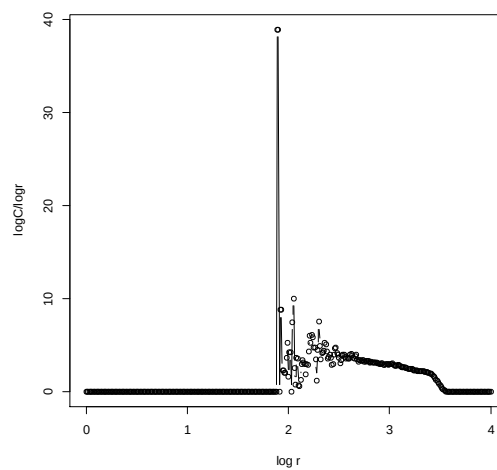
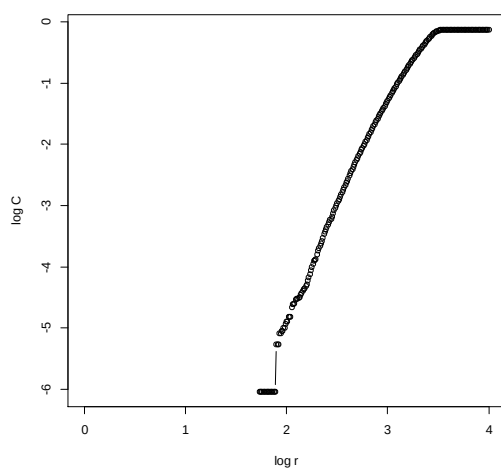
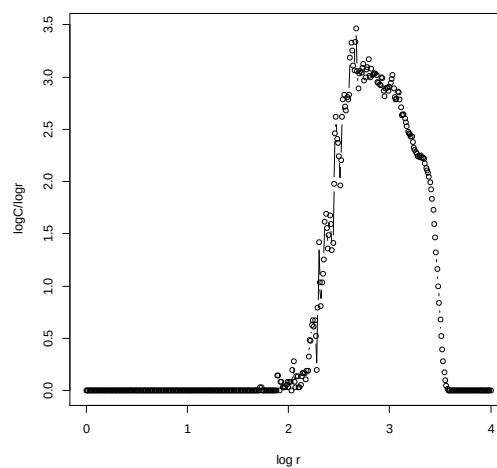
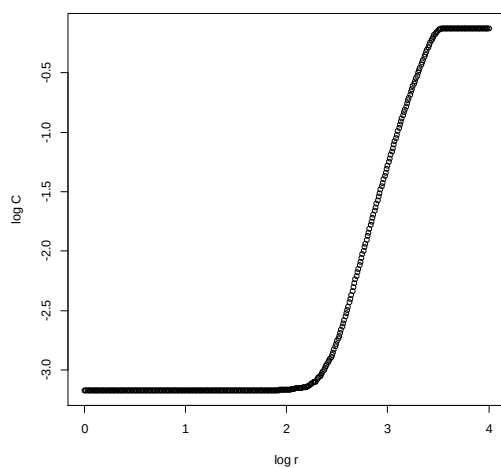
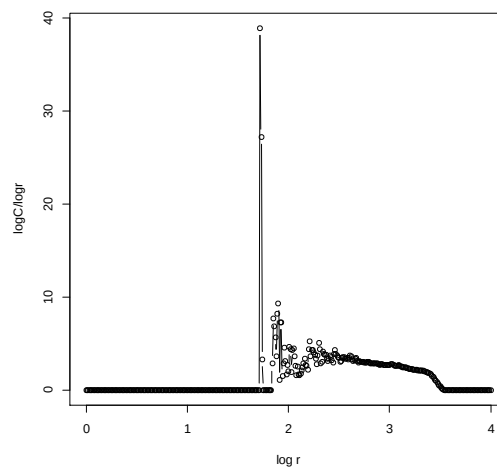
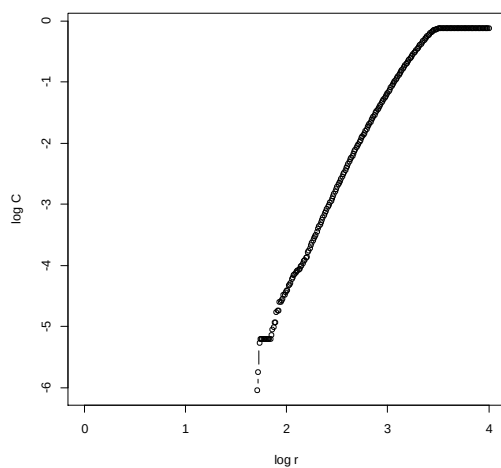


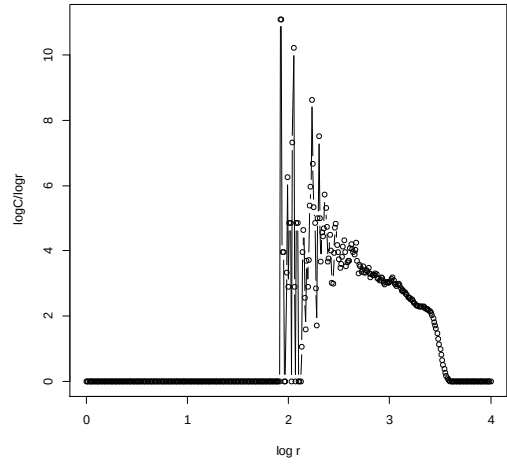
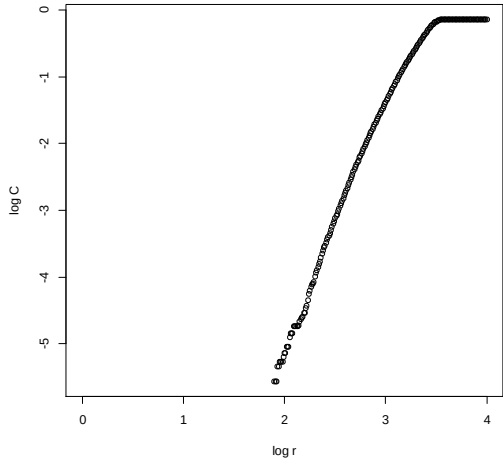
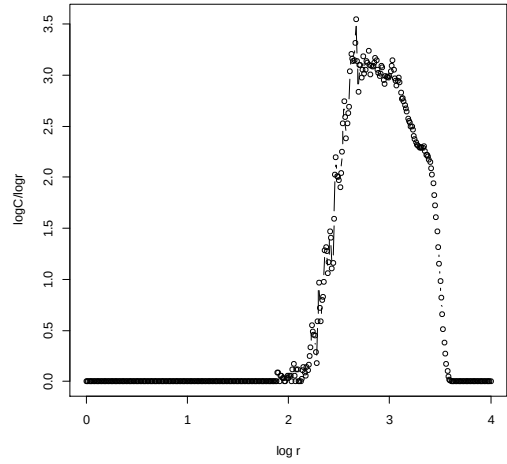
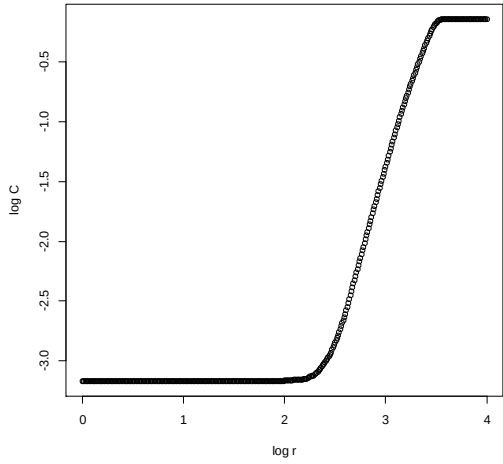


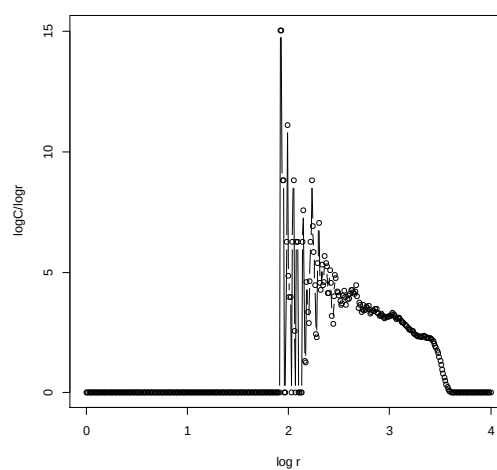
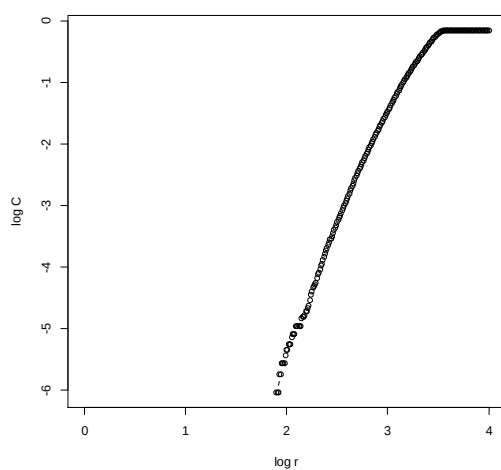
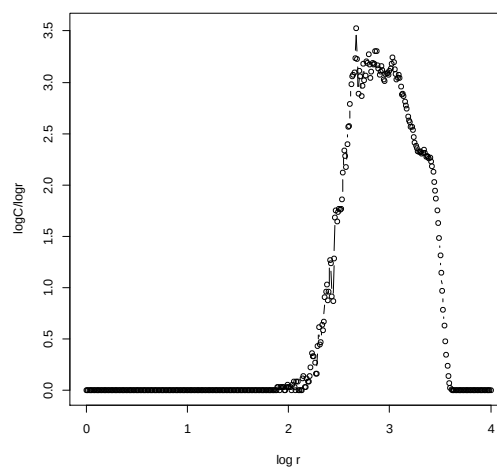
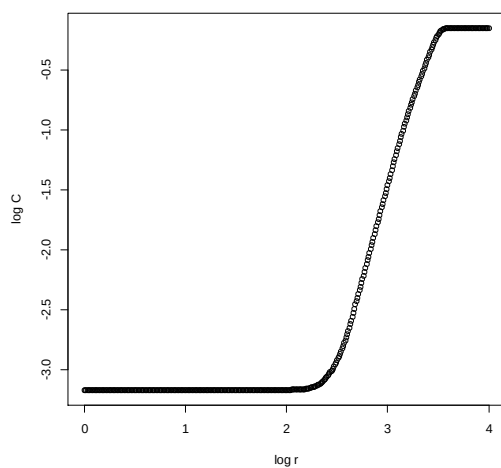




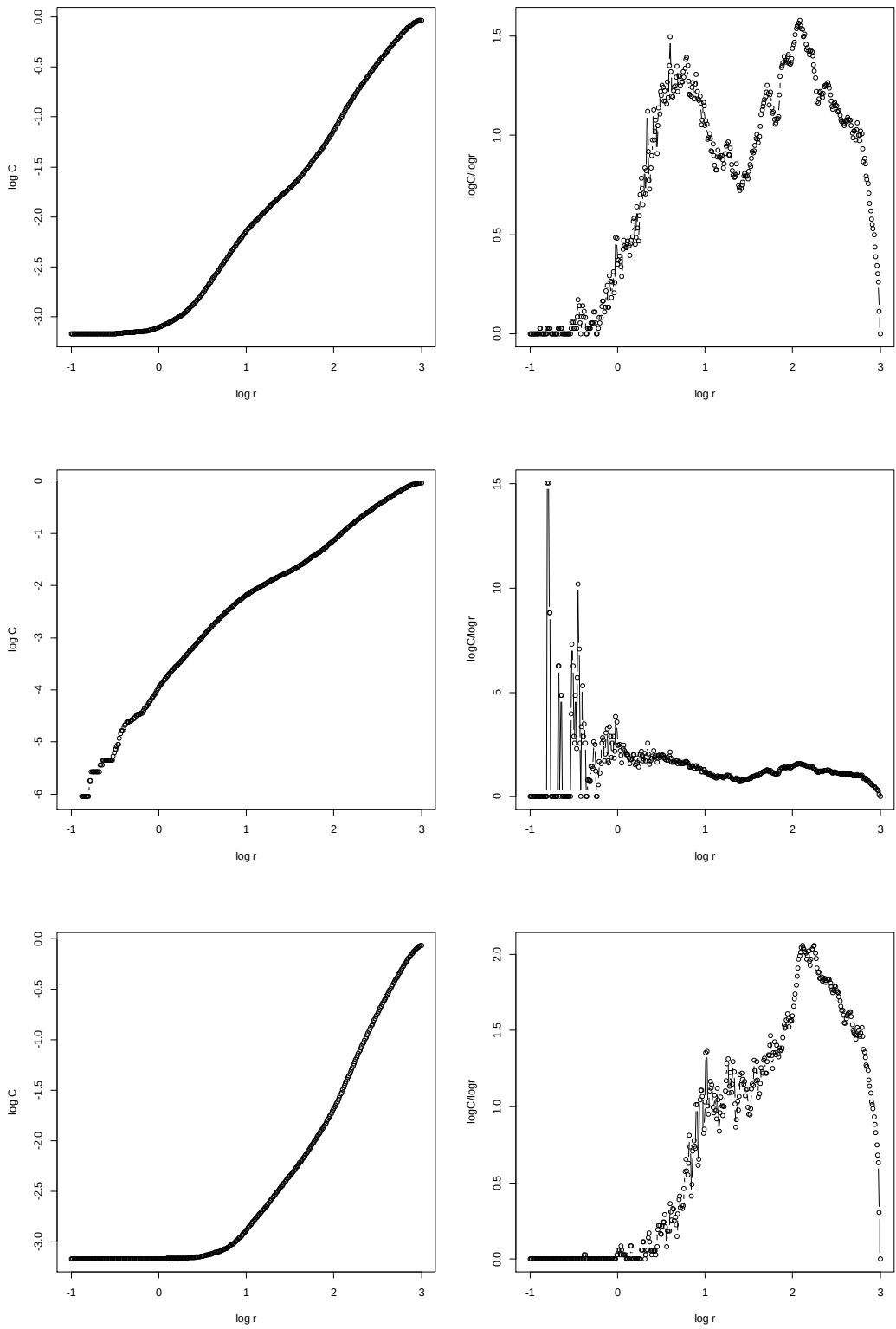


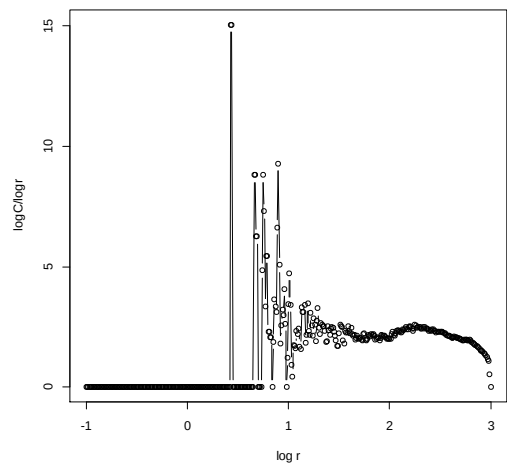
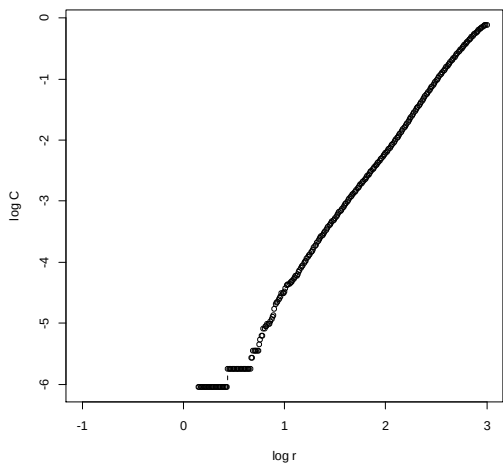
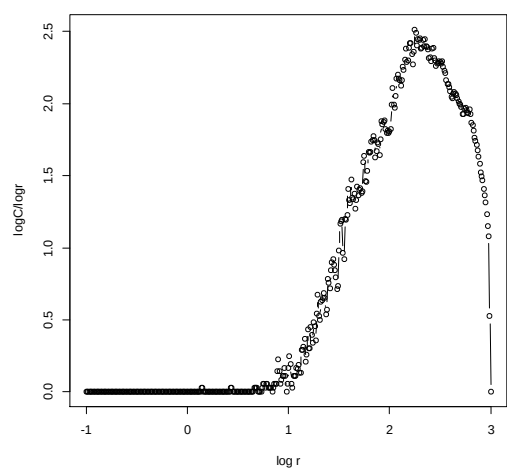
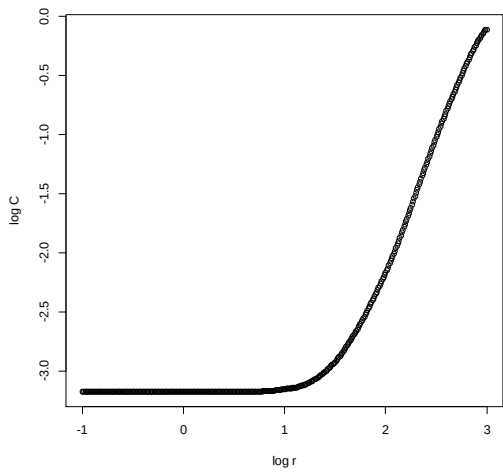
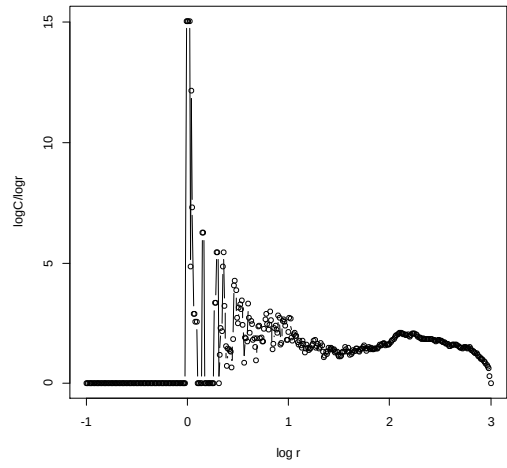
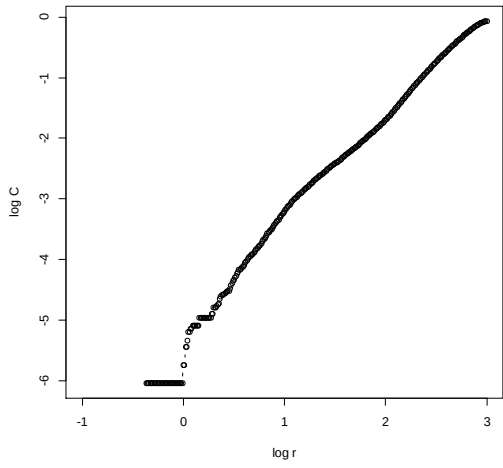


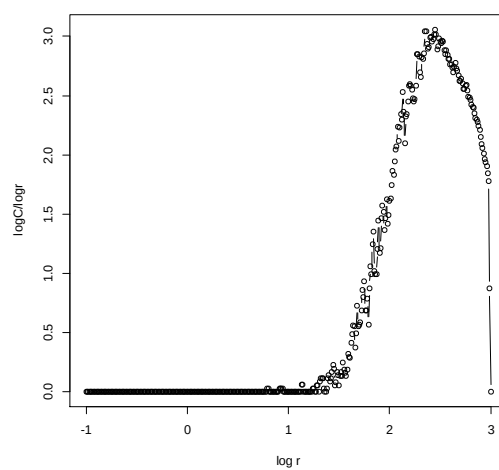
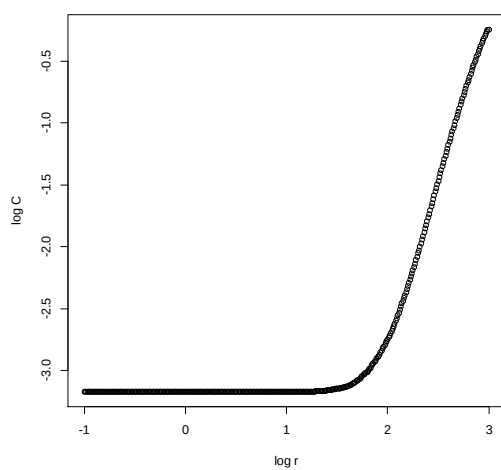
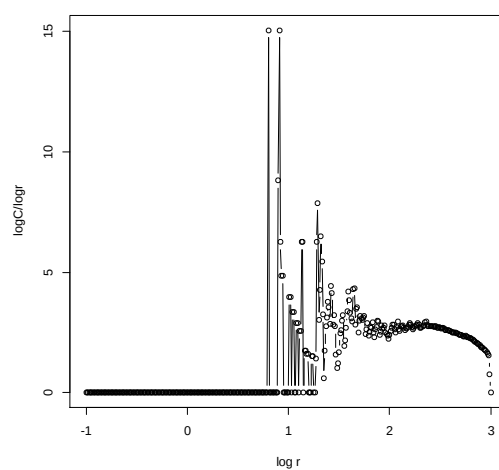
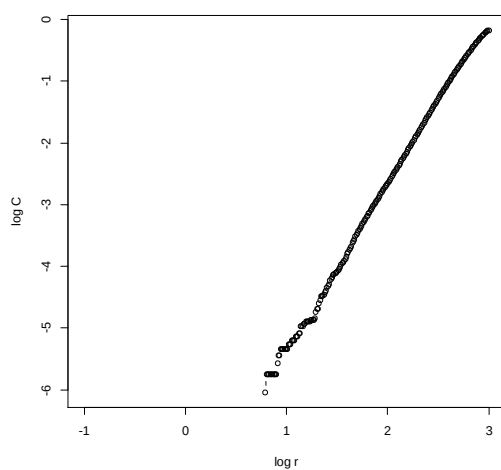
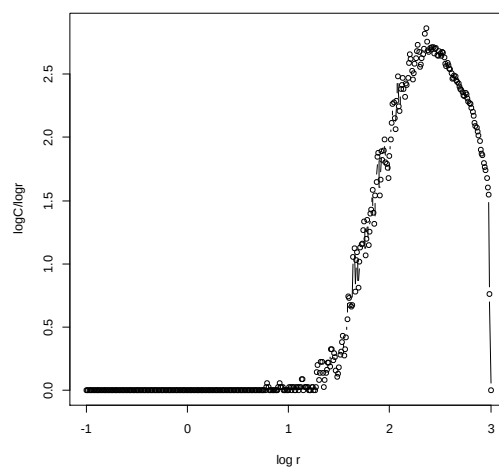
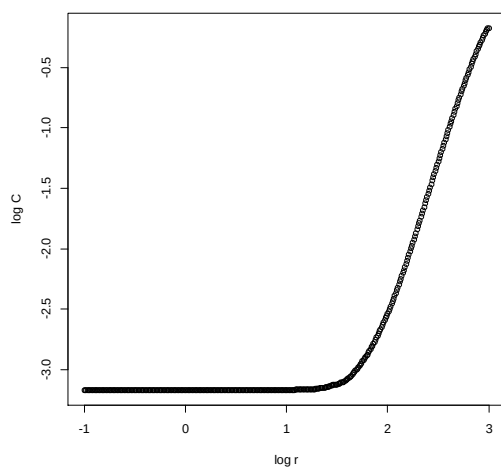


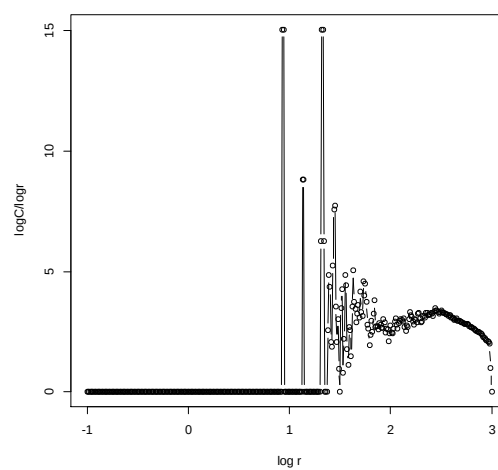
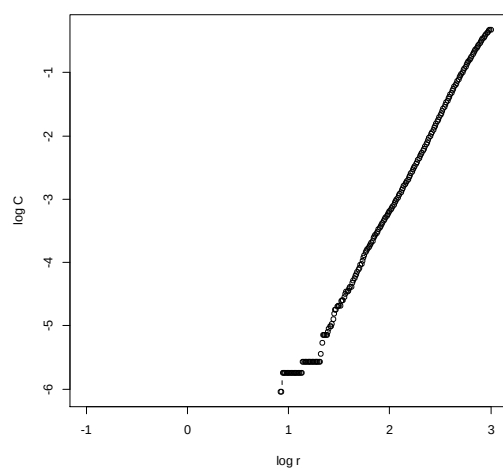
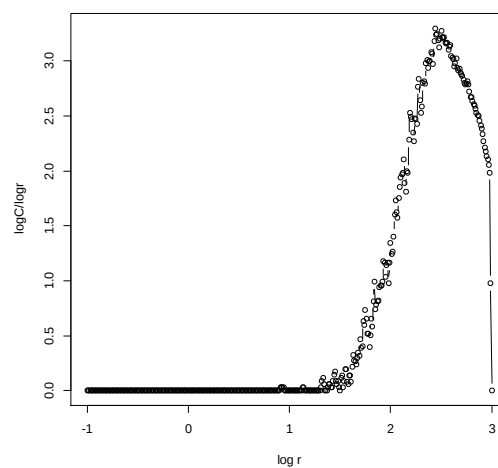
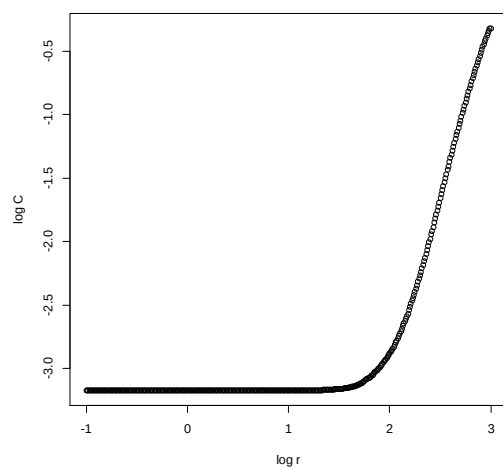
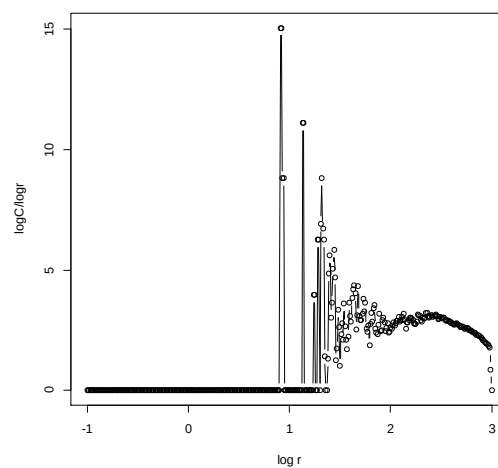
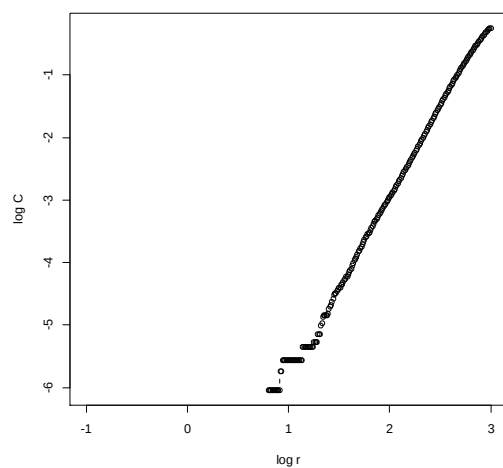


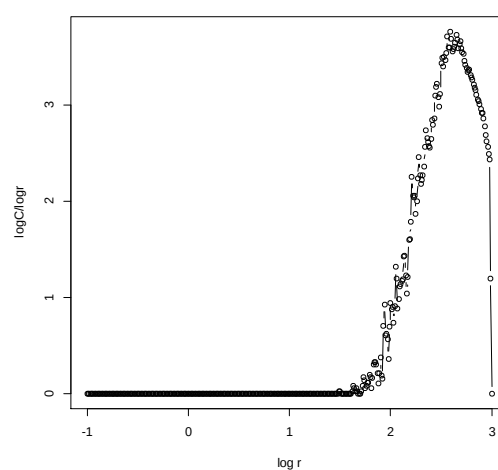
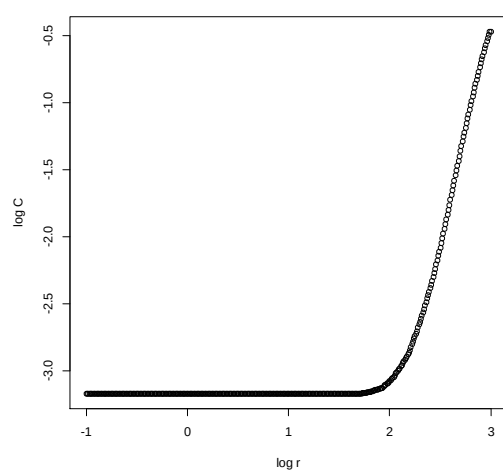
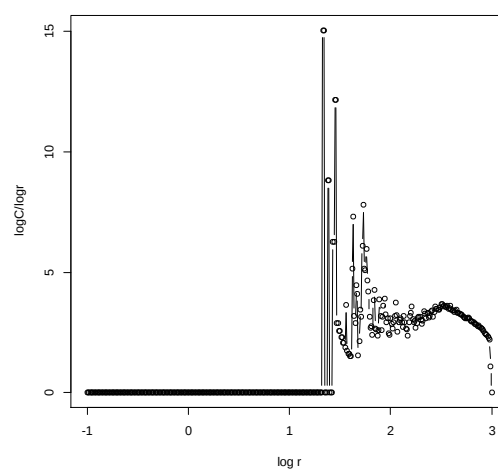
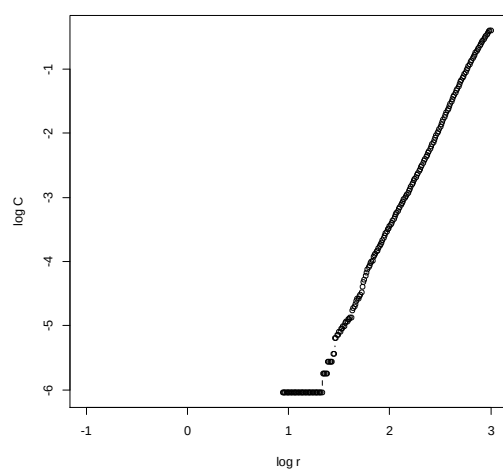
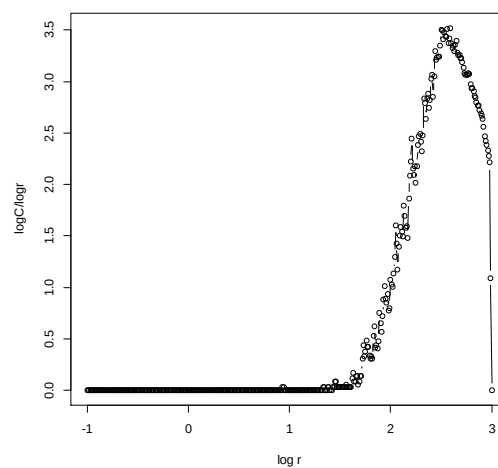
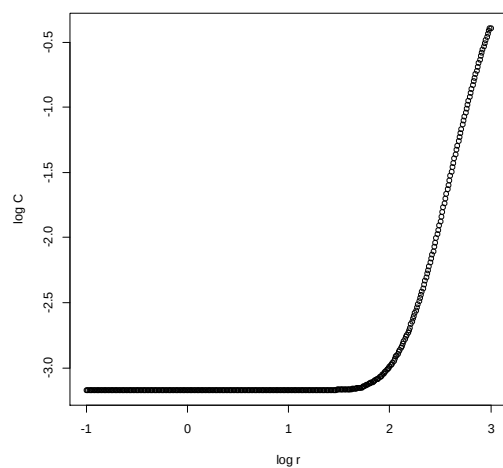
Rn dez/03

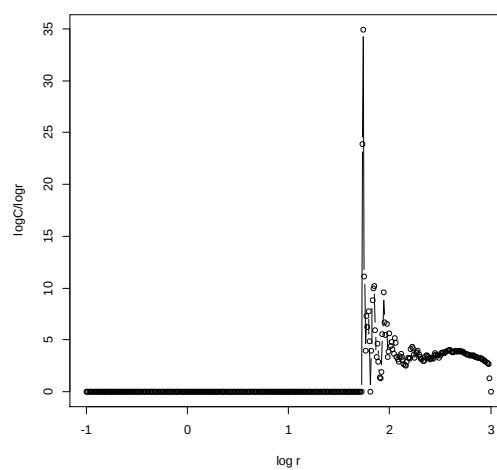
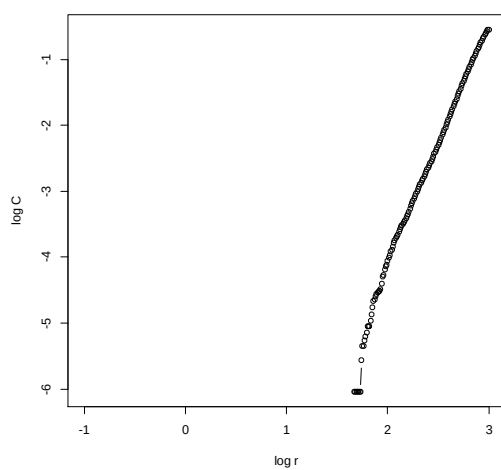
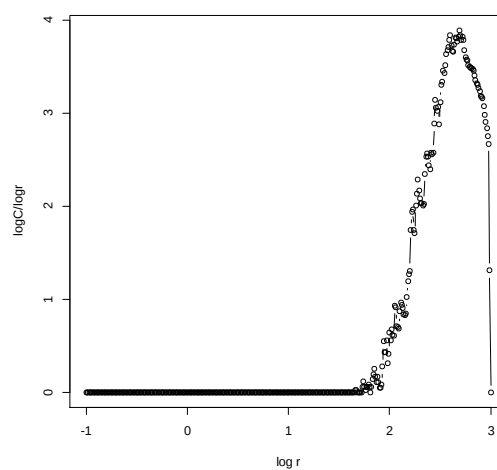
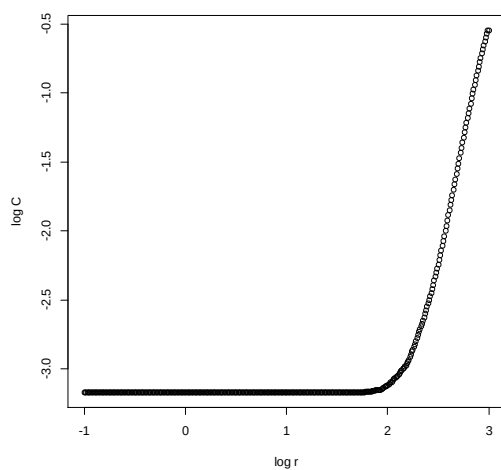
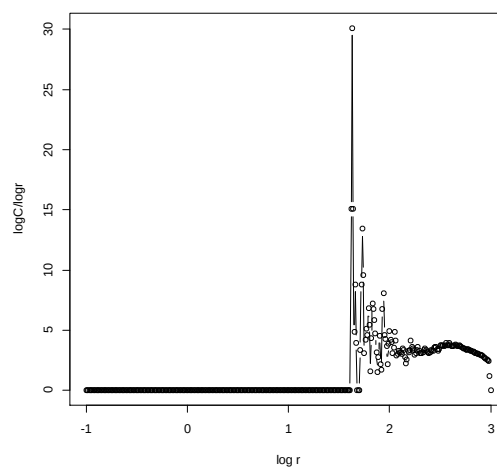
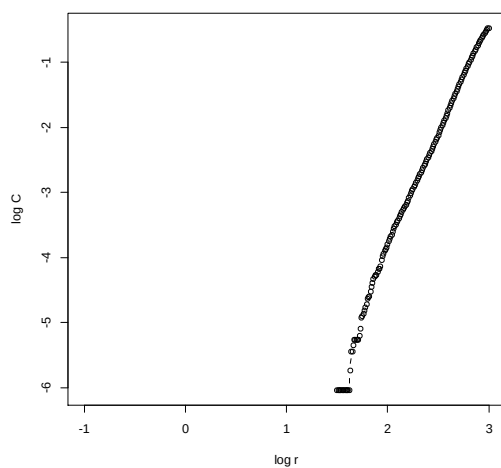


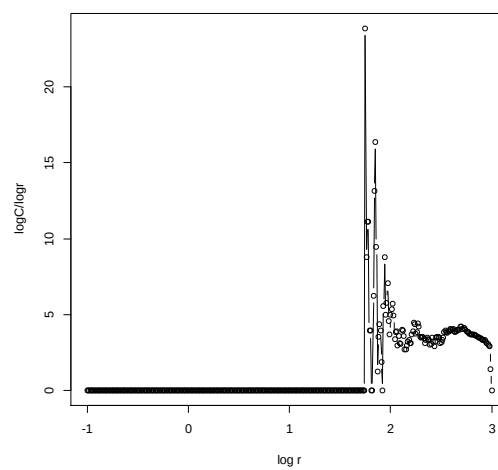
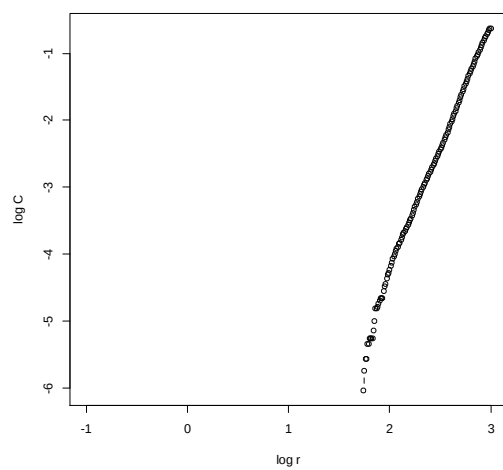
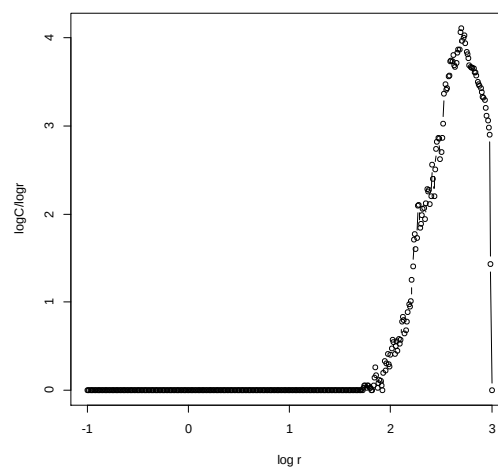
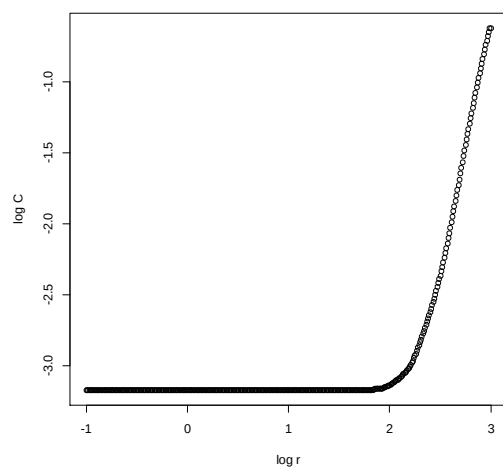


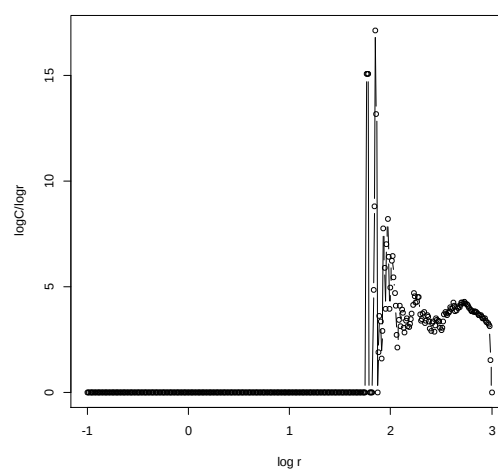
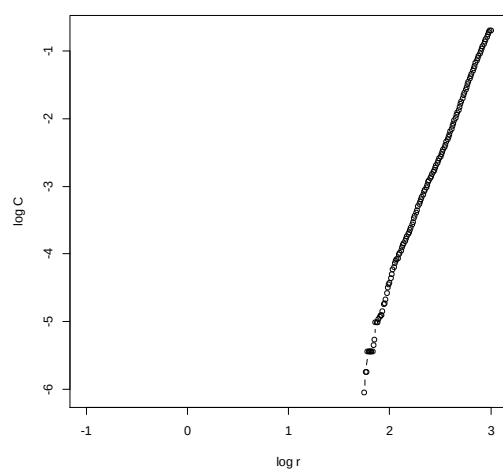
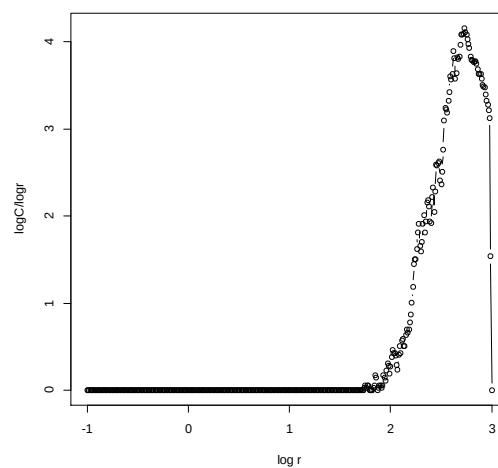
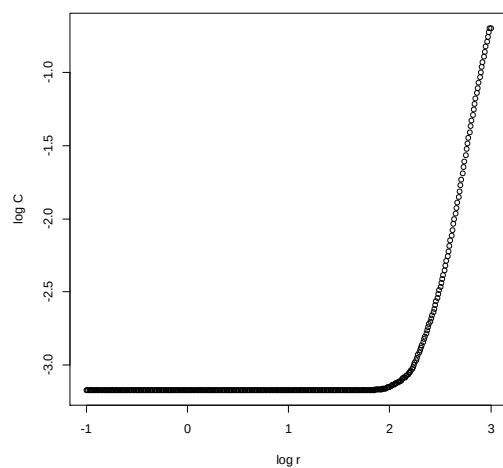




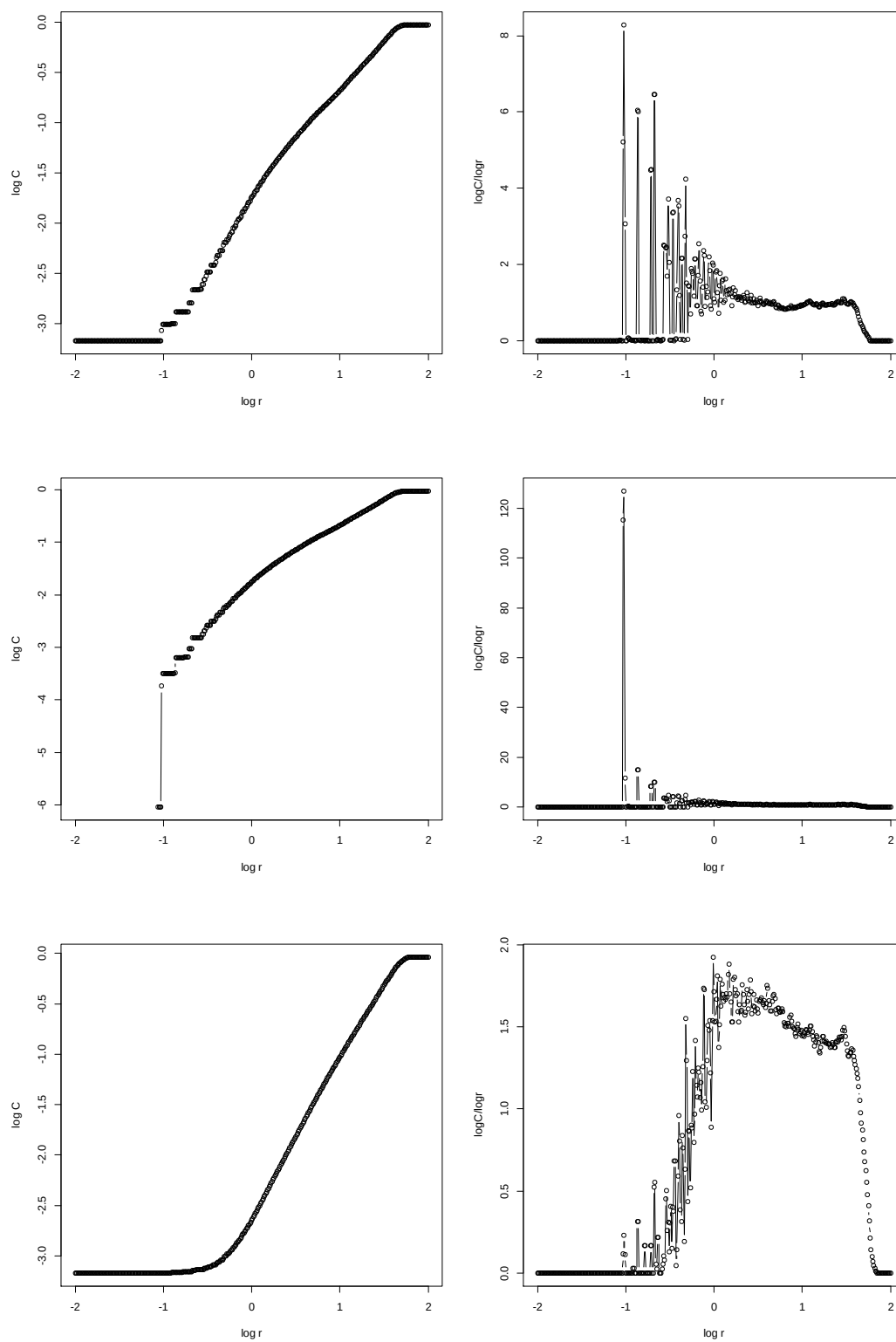


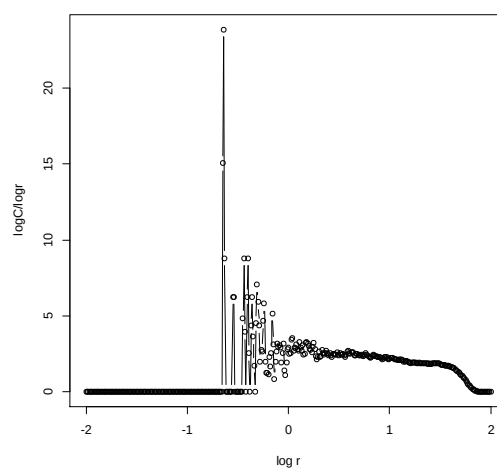
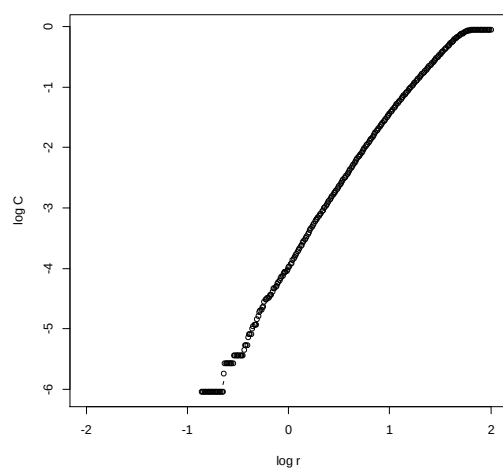
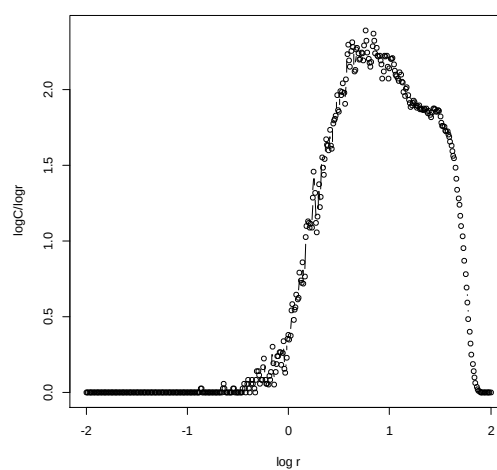
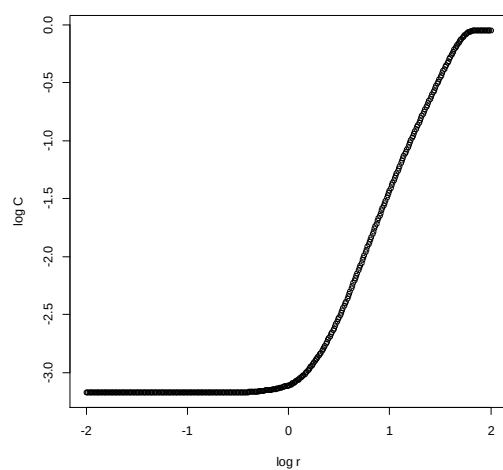
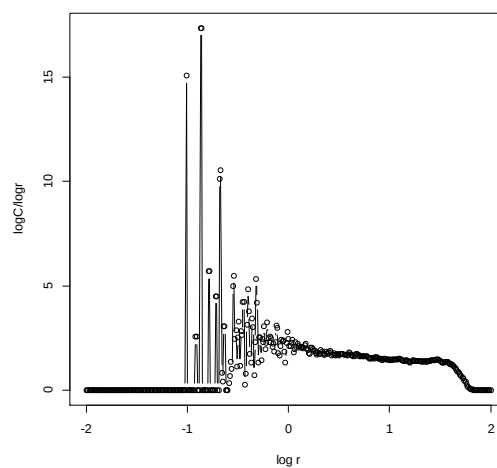
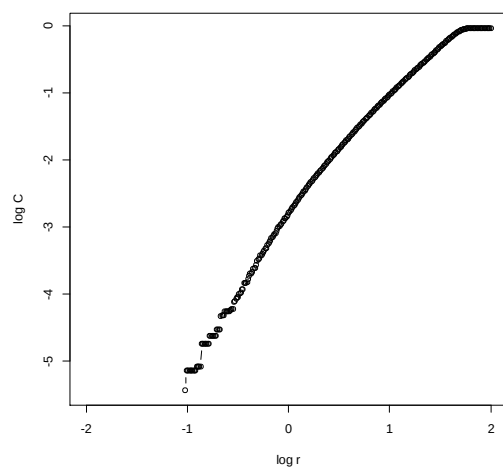


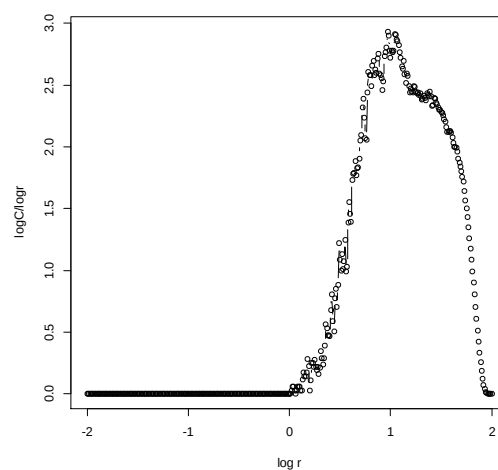
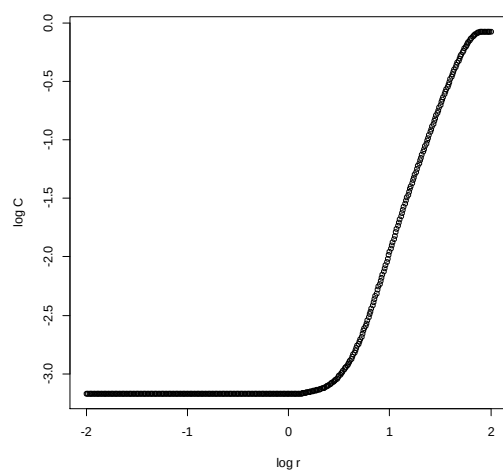
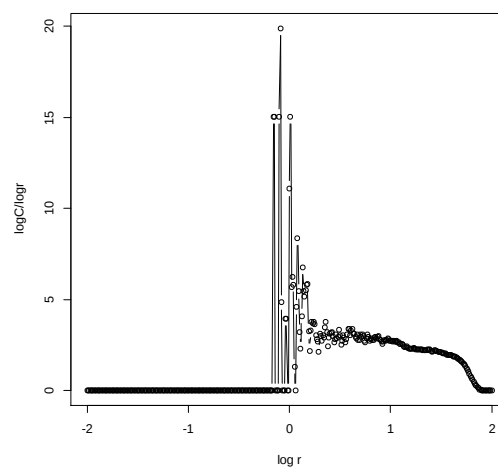
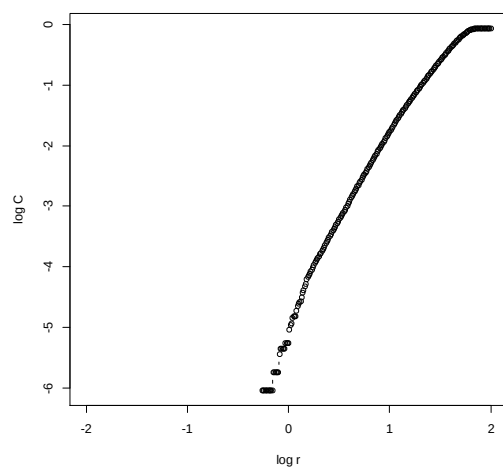
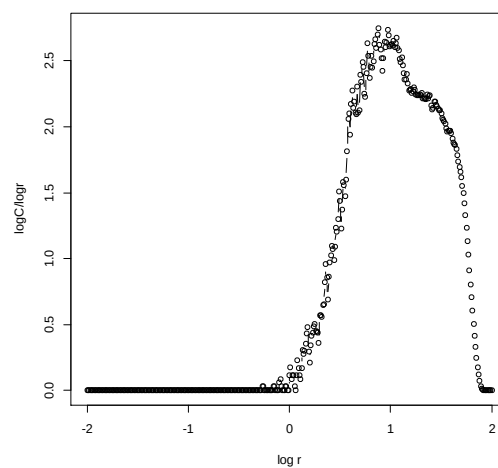
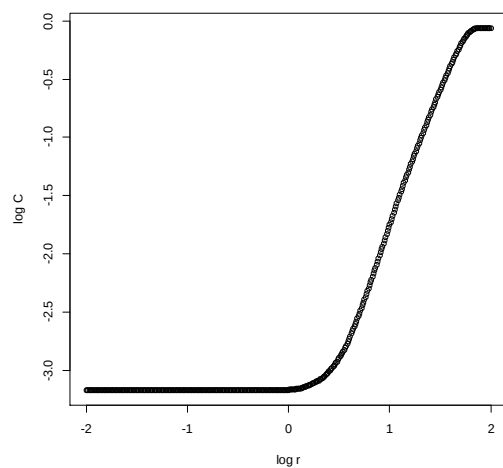


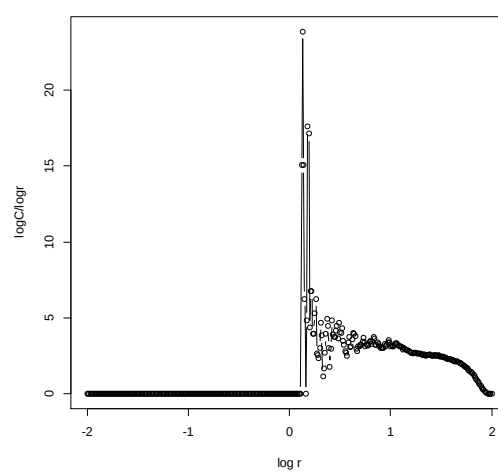
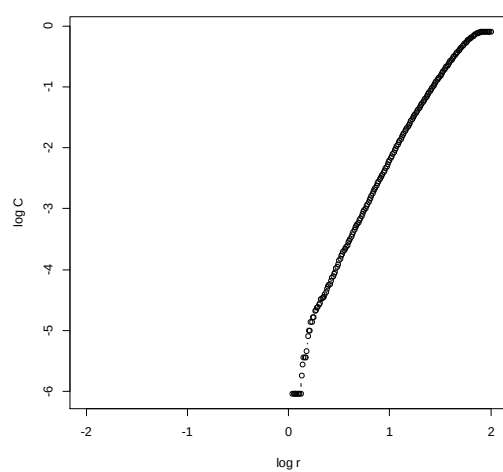
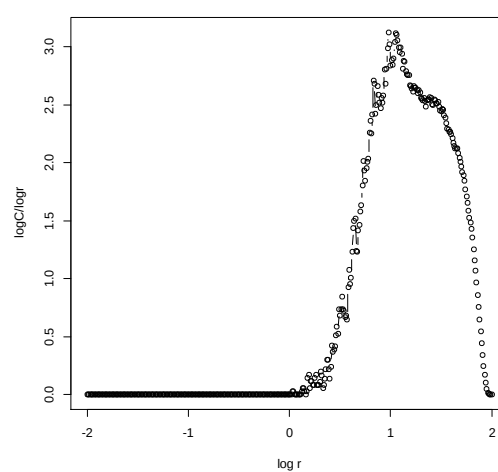
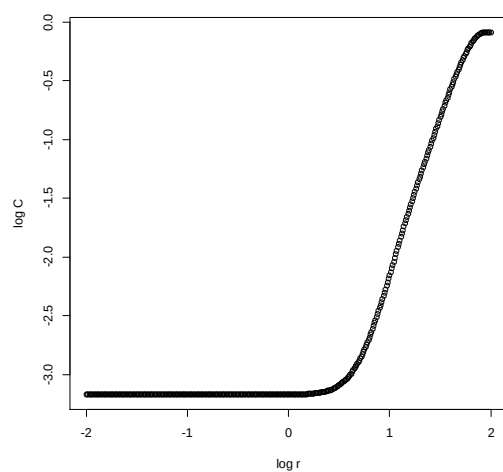
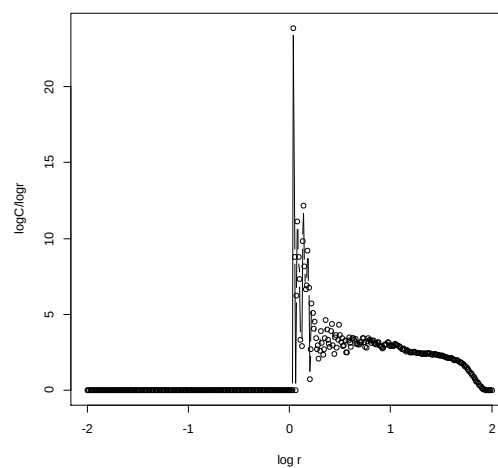
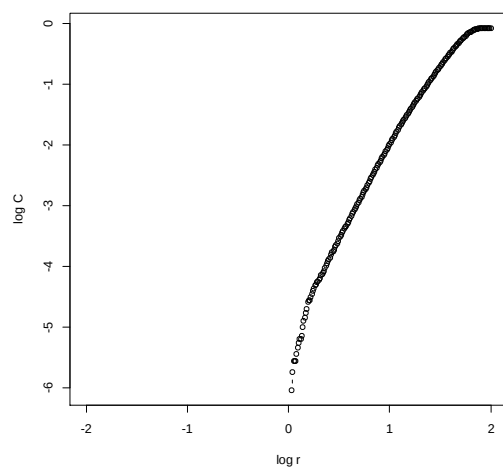


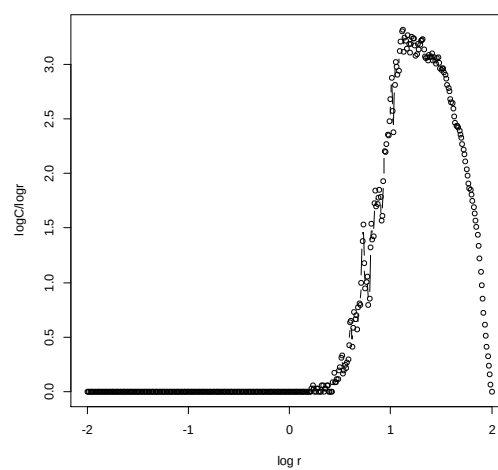
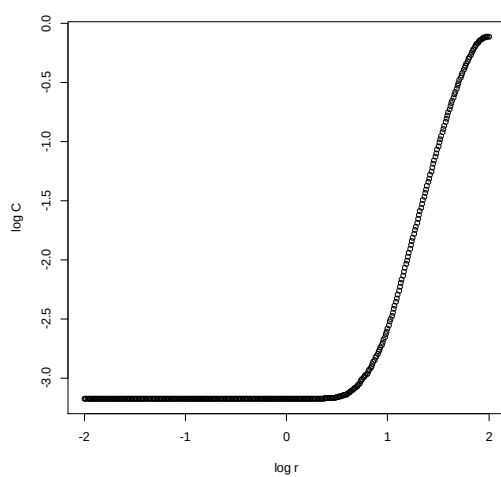
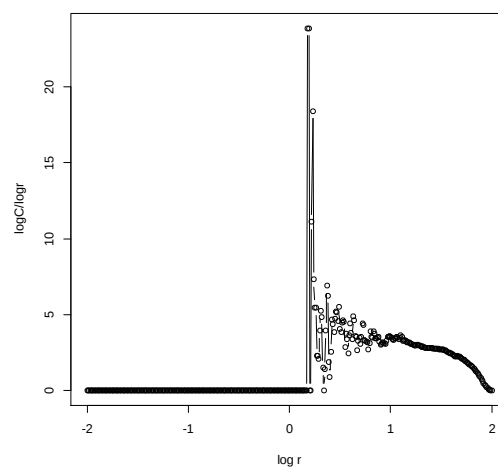
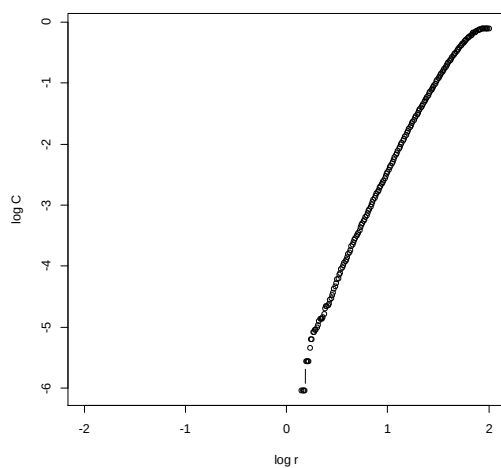
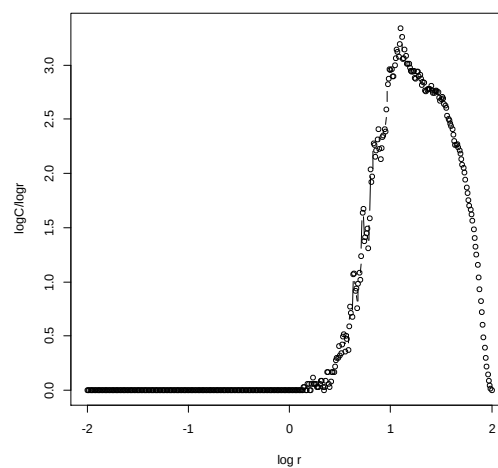
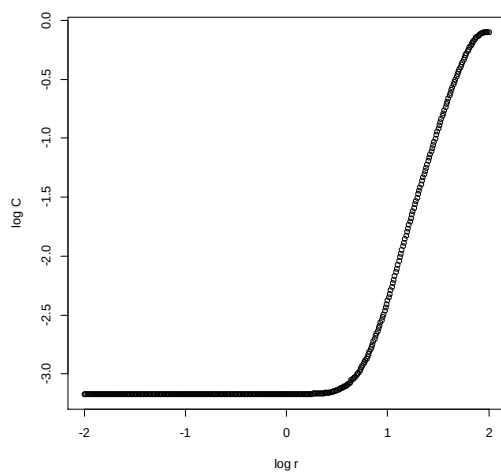
RH dez/03

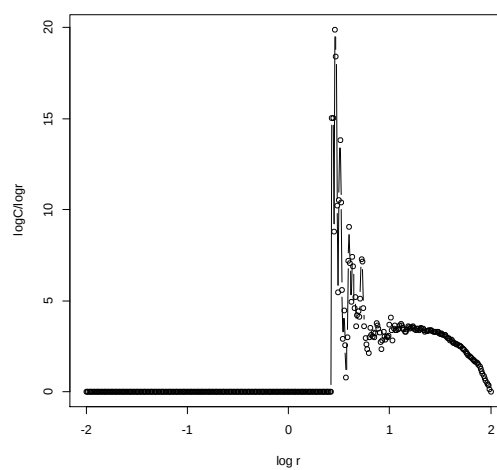
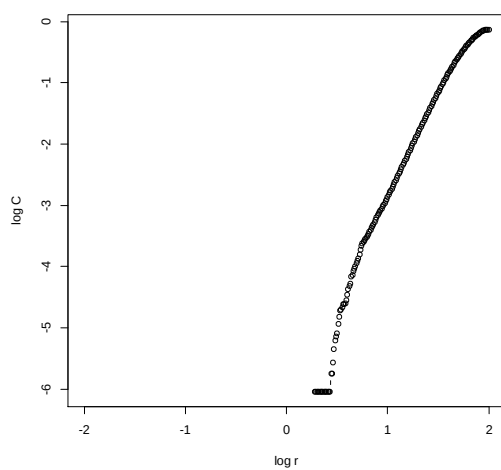
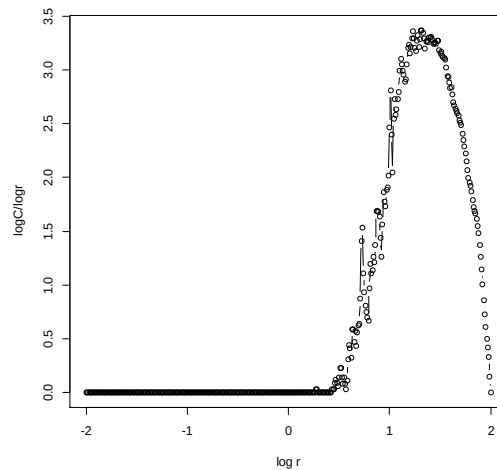
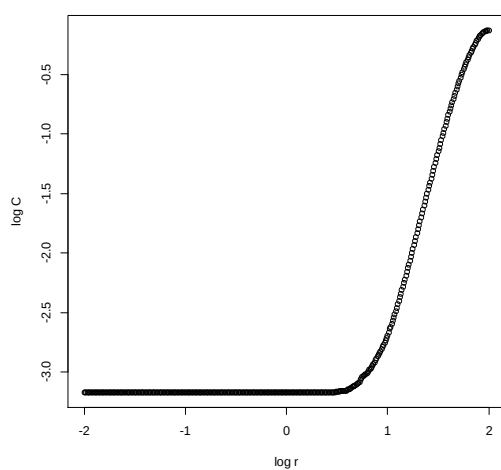
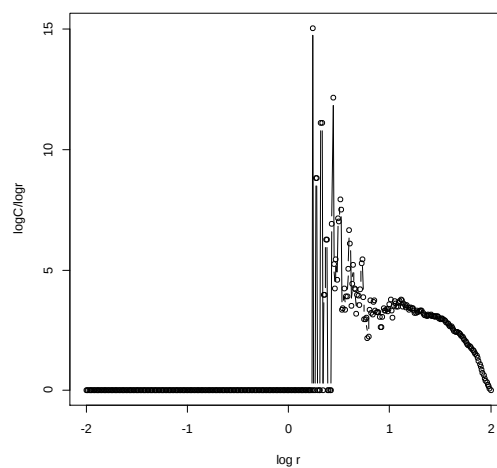
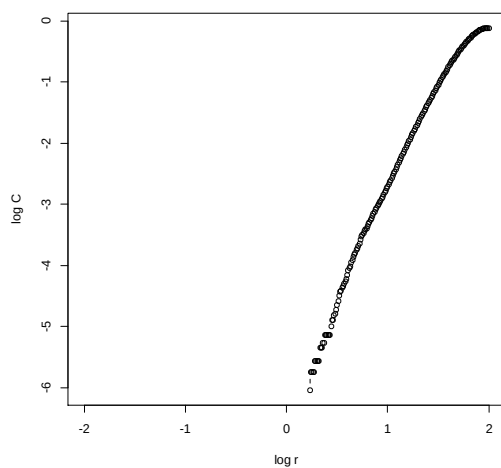


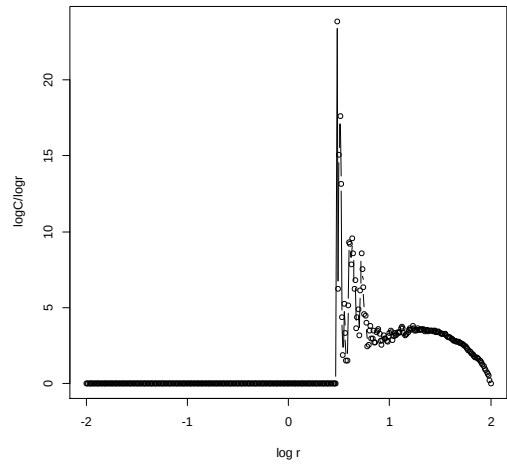
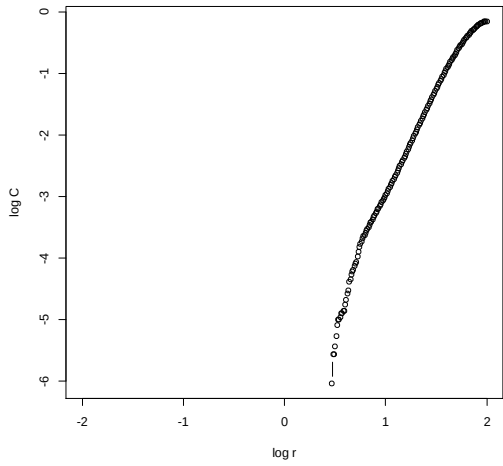
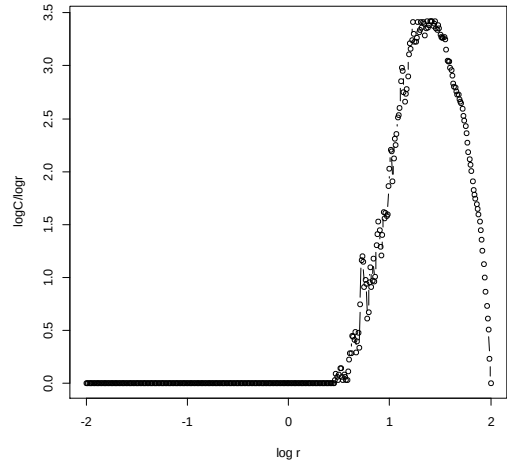
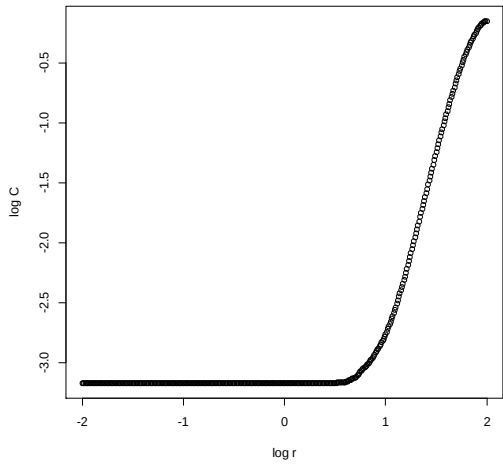


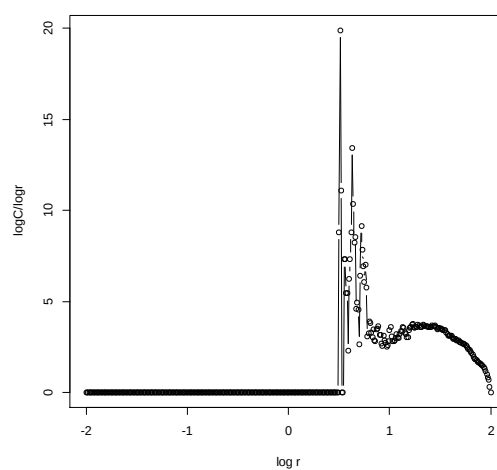
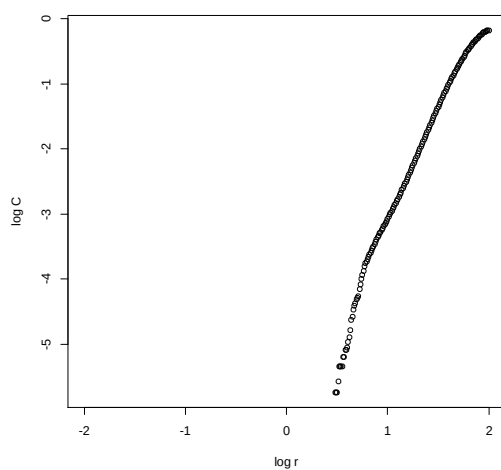
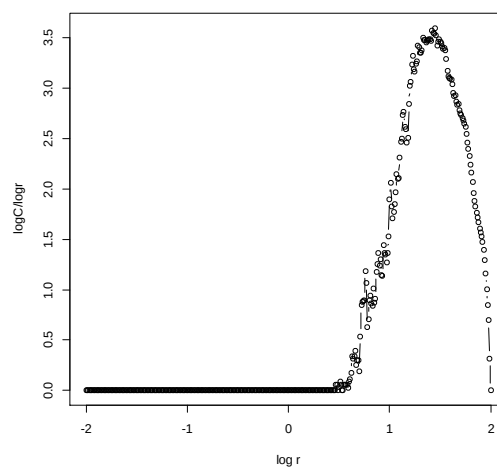
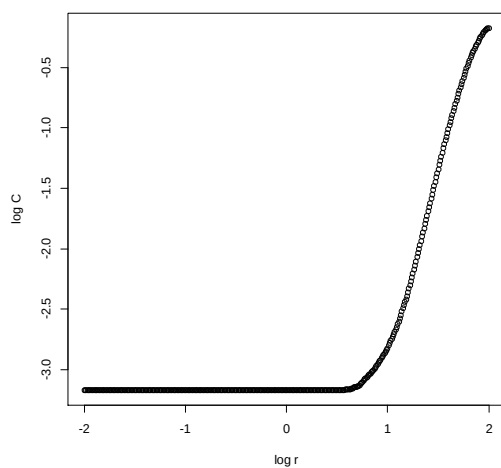












T40 dez/03

