

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MEIO
AMBIENTE**

**ESTUDO DOS FLUXOS SUPERFICIAIS DE VAPOR
D'ÁGUA NA ÁREA DA REPRESA DO RIO MANSO/MT:
MODELAGEM E SIMULAÇÕES**

NELSON LUIZ GRAF ODI

ORIENTADOR: PROF. DR. GERALDO LÚCIO DINIZ

CUIABÁ – MT, DEZEMBRO DE 2005

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA E MEIO
AMBIENTE**

**ESTUDO DOS FLUXOS SUPERFICIAIS DE VAPOR
D'ÁGUA NA ÁREA DA REPRESA DO RIO MANSO/MT:
MODELAGEM E SIMULAÇÕES**

NELSON LUIZ GRAF ODI

*Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Física e Meio
Ambiente da Universidade Federal de
Mato Grosso, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em
Física e Meio Ambiente.*

ORIENTADOR: PROF. DR. GERALDO LÚCIO DINIZ

CUIABÁ – MT, DEZEMBRO DE 2005

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
Programa de Pós-Graduação em Física e Meio Ambiente

FOLHA DE APROVAÇÃO

**Título: ESTUDO DOS FLUXOS SUPERFICIAIS DE VAPOR D'ÁGUA NA
ÁREA DA REPRESA DO RIO MANSO/MT: MODELAGEM E
SIMULAÇÕES**

Autor: NELSON LUIZ GRAF ODI

Dissertação defendida e aprovada em 16 de dezembro de 2005, pela comissão
juladora:

Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer
Instituto de Matemática Estatística e Computação - UNICAMP
Examinador Externo

Dr. Sérgio Roberto de Paulo
Instituto de Ciências Exatas e da Terra – UFMT
Examinador Interno

Prof. Dr. Geraldo Lúcio Diniz
Instituto de Ciências Exatas e da Terra – UFMT
Orientador

Aos meus filhos
Alexandre
Bruna
Lucas

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos familiares e amigos que direta ou indiretamente me auxiliaram na elaboração deste trabalho, em especial, à minha companheira Lindinalva pelas palavras de incentivo. Obrigado!

Aos meus filhos pelas recepções calorosas. Obrigado!

Ao Professor Geraldo que com paciência, amizade e sabedoria soube conduzir a orientação. Obrigado!

Aos Professores da PGFM pela contribuição na formação acadêmica.

Aos colegas da turma pela amizade, pelo convívio e ensinamentos, em especial ao Marcelo e Rebelatto.

A CAPES pelo apoio financeiro que muito contribuiu para a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABELAS	ii
LISTA DE SÍMBOLOS	iii
RESUMO	iv
ABSTRACT	v
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1	
MODELAGEM AMBIENTAL	4
1.1 Metodologia da Modelagem Ambiental	4
1.2 Modelagem e simulação por Computador	7
1.3 Impactos Ambientais de Hidrelétricas	11
1.4 Localização e Caracterização da Área de Estudo	15
1.4.1 Histórico da Construção da UHE de MANSO	15
1.4.2 Bacia de Contribuição do Rio Manso	17
1.4.3 Características Climáticas	17
CAPÍTULO 2	
MODELO MATEMÁTICO	19
2.1 Modelo conceitual	20
2.2 Formulação analítica do modelo	23
CAPÍTULO 3	
MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	28
3.1 MEF – Técnica Galerkin Standard	29
3.2 Funções teste	31
3.3 Formulação variacional	33
3.4 Existência e unicidade de solução	37
3.5 Discretização do problema	39
3.6 Técnica Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG)	41
3.6.1 O método SUPG	42
3.6.2 Construção das funções teste ‘upwind’ bidimensionais para elementos triangulares	44
3.6.2.1 Funções teste ‘upwind’	46
3.7 Nova discretização espacial e temporal	50

CAPÍTULO 4	
RESULTADOS E ANÁLISES	53
4.1 Resultados Numéricos: Técnica Galerkin Standard	55
4.2 Resultados Numéricos: Técnica Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG)	57
4.2.1 Ensaio 1 – SUPG	59
4.2.2 Ensaio 2 – SUPG	61
4.2.3 Ensaio 3 – SUPG	62
4.2.4 Ensaio 4 – SUPG	64
4.3 Discussão	65
CONSIDERAÇÕES FINAIS	67
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69
APÊNDICE	
1 CÓDIGOS PARA MATLAB®	73
1.1 Códigos para Matlab® - Técnica Galerkin Standard	73
1.2 Códigos para Matlab® - Técnica SUPG	77
2 CÓDIGOS PARA MATHEMATICA®	83
2.1 Códigos para Mathematica® - Técnica Galerkin Standard	83
2.2 Códigos para Mathematica® - Técnica SUPG	87

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Processo de discretização de um modelo contínuo em modelo discreto	8
Figura 2	Localização geográfica e foto de satélite da UHE de Manso, no Estado de Mato Grosso, Centro-Oeste Brasileiro	15
Figura 3	Modelo de circulação atmosférica sobre uma superfície retangular	19
Figura 4	Definição do domínio aéreo retangular (Ω) por um plano horizontal limitado pelas fronteiras Γ_k	21
Figura 5	Elemento de área e principais fluxos de massa a ele relacionado	23
Figura 6	Enumeração do triângulo inferior (T_1) e superior (T_2) e respectivos nós $N_j^{(i)}$.	30
Figura 7	Discretização espacial do plano por triângulos (Elementos Finitos)	31
Figura 8	Gráfico 2D da função base $\phi_i(x, y)$	32
Figura 9	Triângulo superior (T_s) e Triângulo inferior (T_i)	32
Figura 10	Definição e caracterização do sentido dos fluxos aéreos sobre o domínio discretizado	44
Figura 11	Representação para o caso linear das funções teste, em (a) Galerkin standard e em (b), (c) função de peso ‘upwind’ Petrov-Galerkin com indicação do sentido do fluxo advectivo	44
Figura 12	Enumeração dos vértices no triângulo inferior (T_1) e triângulo superior (T_s) para construção local das novas funções teste	46
Figura 13	Gráficos das funções base $\phi_i(x, y)$, peso $F_i(x, y)$ e teste $\psi_i(x, y)$ para triângulos superiores	48
Figura 14	Gráficos das funções base $\phi_i(x, y)$, peso $F_i(x, y)$ e teste $\psi_i(x, y)$ para triângulos inferiores	48
Figura 15	Representação da emenda dos triângulos pelo j-ésimo nó comum do hexágono sobre o qual se verifica a continuidade das novas funções teste $\psi_j(x, y)$	49
Figura 16	Mapa digital obtido com a discretização espacial do domínio Ω delimitado pelas fronteiras Γ_k por uma malha de 14.729 triângulos. A parte mais clara representa a região da represa e a cor cinza a área circundante.	54
Figura 17	Distribuição espacial da concentração de vapor d’água para $t = 0, t = 1, t = 1.5, t = 2$, n° Peclet = 1,48	55
Figura 18	Variação temporal da concentração sobre os pontos nodais (nó médio e nó na fronteira) para o ensaio 1.	55
Figura 19	Mapa digital obtido com a discretização espacial do domínio Ω delimitado pelas fronteiras Γ_k por uma malha de 59.168 triângulos. A parte mais clara representa a região da represa e a cor cinza a área circundante.	57
Figura 20	Distribuição da concentração da massa de vapor d’água no domínio em $t = 0, t = 5, t = 10$ e $t = 15$ horas, para o ensaio 1.	59
Figura 21	Resultados numéricos do ensaio 1, do processo evolutivo para dois nós	59
Figura 22	Distribuição da concentração de vapor d’água ao longo do domínio em $t = 0, t = 5, t = 10$ e $t = 15$ horas, para o ensaio 2.	60
Figura 23	Resultados numéricos do ensaio 2 do processo evolutivo para dois nós	60
Figura 24	Distribuição da concentração de vapor d’água ao longo do domínio em $t = 0, t = 5, t = 10$ e $t = 15$ horas, para o ensaio 3.	62
Figura 25	Resultados numéricos do ensaio 3 do processo evolutivo para dois nós	62
Figura 26	Distribuição da concentração de vapor d’água ao longo do domínio em $t = 0, t = 5, t = 10$ e $t = 15$ horas para o ensaio 4.	63
Figura 27	Resultados numéricos do ensaio 4 do processo evolutivo para dois nós	63

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Parâmetros utilizados na simulação do ensaio 1 - Galerkin Standard	54
Tabela 2:	Parâmetros utilizados nos ensaios da simulação 2 para SUPG	57

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	Ômega	Domínio bidimensional fechado
Γ_κ	Gama (maiúsculo)	Fronteira κ
η	Eta	Vetor normal exterior unitário
α	Alfa	Difusividade efetiva
δ_0	Delta zero	Operador delta de Dirac
σ	Sigma	Decaimento global da propriedade
φ	Fi	Função base linear
ψ	Psi	Função teste upwind
δ	Delta	Constante positiva
θ	Teta	Ângulo para o sentido do fluxo advectivo
μ	Mi	Medida (no sentido de Lebesgue)
γ	Gama (minúsculo)	Linha de contorno
c		Concentração da propriedade no domínio
∇		Operador nabla
V		Componente advectivo
f		Termo fonte
t		Tempo
T_n		Triângulo (e-nésimo)
N_j^i		Nó do j-ésimo vértice e i-ésimo triângulo
$\vec{V}$		Campo dos fluxos aéreos
A_{ij}		Matriz de rigidez
B		Componente do vetor carga
d		Componente do vetor carga
ℓ		Segmento de reta
$\mathcal{V}_1$		Espaço vetorial
$\mathcal{V}_h$		Sub-espaço de $\mathcal{V}_1$
v		Função teste Standard
F		Função peso para técnica upwind
$\mathcal{L}^2$		Espaço de Banach (funções de quadrado integrável)
$\mathcal{H}^l$		Espaço de Sobolev
$\mathcal{A}$		Espaço métrico

RESUMO

ODI, N. L. G. *Estudo dos fluxos superficiais de vapor d'água na área da represa do Rio Manso/MT: modelagem e simulações*. Cuiabá. MT. 2005. p.90. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Exatas e da Terra. Universidade Federal do Estado de Mato Grosso.

Neste trabalho investigamos a dispersão do vapor d'água atmosférico oriundo do lago formado a partir do represamento do Rio Manso. É proposto um modelo matemático para simular e avaliar os fluxos superficiais de umidade na região da Usina Hidroelétrica do Rio Manso (UHE de Manso). O objetivo é a proposição de um modelo matemático e simulação de cenários da dinâmica da dispersão do vapor d'água junto à superfície. O modelo foi elaborado a partir de uma equação geral de transporte com difusão para o vapor d'água atmosférico e a solução numérica obtida por computador com o uso do método de elementos finitos (MEF) via técnica Galerkin Standard e Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG). A abordagem proporcionou a obtenção de cenários para os campos direcionais dos fluxos de umidade e os resultados indicam que a presença do lago pode estar afetando o micro-clima local.

Palavras-chave: Fluxos de umidade; modelagem ambiental; elementos finitos; simulação por computador.

ABSTRACT

ODI, N. L. G. *Study of the superficial water vapor flows in the area of the dam of the River Manso/MT: modeling and simulation*. Cuiabá, MT. 2005. p 90. Master's thesis – Instituto de Ciências Exatas e da Terra. Universidade Federal de Mato Grosso.

In this paper, we investigate the dispersion of atmospheric water vapor originating from the Manso river lake dam. A mathematical model is presented to simulate and to evaluate the superficial flows of humidity in the region of the Manso's UHE. The objective is to propose a mathematical model and simulate of scenes of the dynamics of dispersion for the water vapor to the surface. The model was elaborated from advective-diffusive partial differential equation model for the transport of atmospheric water vapor and the numeric approximation was obtained by computer simulations using the finite elements method (FEM) with Galerkin standard and Streamline Upwind Petrov/Galerkin (SUPG) technique. This approach provided the resulting scenarios for the directional fields of the humidity flows and the results indicate that the presence of this lake can be affecting the local microclimate.

Key words: Flows of humidity; environmental modeling; finite elements; computer simulations.

INTRODUÇÃO

As atividades humanas, principalmente aquelas baseadas na exploração dos recursos naturais disponíveis, promovem alterações significativas na paisagem e nos mais variados ecossistemas do planeta. A alteração da concentração de algumas substâncias gasosas na atmosfera é apontada como uma das mais preocupantes.

As constatações atuais são de que as interferências sofridas pela natureza estão alterando os fluxos de matéria e energia entre os sistemas naturais. Tais mudanças ocasionam alterações nos processos naturais do meio ambiente. Prova disso é que a velocidade e a intensidade observadas no aumento da temperatura global nas últimas décadas são incompatíveis com os tempos necessários à adaptação natural dos ecossistemas (NOBRE, 1992).

O vapor d'água atmosférico, apesar de ter uma baixa concentração (máxima de 4% do volume total), desempenha um papel importante na preservação da vida no planeta. Ele é responsável por parte do efeito estufa da atmosfera ao absorver o calor irradiado pela superfície terrestre, contribuindo para que não ocorram variações bruscas de temperatura no ar da camada superficial. Além disso, participa do ciclo hidrológico, alimentando chuvas e tempestades e está relacionado a processos vitais dos seres vivos na troca de energia com o meio (SAPUCCI, 2001).

As características do clima de uma localidade são afetadas pela localização, seja um vale ou uma encosta ou pelo desenvolvimento local e regional. A transformação do uso da terra, por exemplo, de floresta para algum cultivo, ou no represamento de um rio, para a construção de um lago artificial. A mudança do uso do solo afeta drasticamente o balanço de energia local. A consequência mais imediata do desflorestamento é que a mudança do uso do solo leva a uma menor utilização da energia disponível na evapotranspiração – mecanismo de resfriamento

da superfície. Assim sobra mais energia para aquecer o ar, isto é, temperaturas locais aumentam após o desflorestamento (MOLION, 1995).

O aumento da temperatura do ar aumenta exponencialmente a capacidade deste de reter vapor d'água. Dessa maneira, avalia-se que um empreendimento hidrelétrico pode produzir a alteração de características climáticas regionais. Isto pode afetar negativamente o clima local, bem como a regulação e a produtividade do ecossistema. Alterações que levam a efeitos negativos da mudança do clima são definidas na ecologia relativas ao meio ambiente físico ou biota - conjunto de seres vivos, como aquelas que tenham efeitos significativos sobre a composição, resistência ou produtividade de ecossistemas naturais e administrados ou sobre a saúde e o bem-estar humano (ODUM, 1988).

O alcance ambiental e ecológico das alterações é fator dependente da vulnerabilidade do sistema (no caso bacia hidrográfica) a jusante e a montante da região onde se formou o lago (MÜLLER, 1995). A vulnerabilidade está associada a conjunção de fatores ambientais, suscetíveis a impactos em maior ou menor grau.

A problemática que se vislumbra diante do represamento do Rio Manso é que, em havendo um incremento no volume de vapor d'água na atmosfera local e regional, significa um aumento da umidade relativa. Desse modo, o estudo da circulação atmosférica regional torna-se fator preponderante na investigação de variações que estejam ocorrendo nos índices climáticos e seus possíveis impactos no ambiente local.

A extensão da área inundada e o volume de água represada nos levam a crer que, neste ambiente, poderão ocorrer alterações nos processos ambientais do ecossistema terrestre e na atmosfera, podendo afetar as características do clima local. A maneira como isto afeta o clima local poderá ser estabelecido a partir do estudo dos fluxos de calor e umidade associados ao comportamento dos ventos, através da simulação de cenários sobre aquela realidade.

Neste trabalho, investigamos a dispersão do vapor d'água atmosférico oriundo do lago formado a partir do represamento do Rio Manso. O objetivo é a proposição de um modelo matemático que possa representar a dinâmica da trajetória do vapor d'água na atmosfera local. O modelo foi elaborado a partir de uma equação

geral de transporte com difusão e proporcionou a obtenção de cenários para os campos direcionais dos fluxos de umidade.

No primeiro capítulo, serão descritos o processo de modelagem ambiental com ênfase na modelagem matemática, a metodologia adotada na construção de modelos matemáticos do meio ambiente e a caracterização da área de estudo. No segundo capítulo, será proposto um modelo matemático simplificado para a circulação atmosférica na região da represa do Rio Manso e seu entorno. Mediante a escolha do método de aproximação para a solução do problema, será feita no terceiro capítulo, a descrição do método de elementos finitos e obtenção da formulação variacional (também denominada fraca) para o problema. Por fim, no último capítulo, serão apresentados alguns resultados, através da simulação de cenários com base neste modelo matemático para avaliar a evolução da dispersão superficial do vapor d'água.

CAPÍTULO 1

MODELAGEM AMBIENTAL

Neste capítulo, apresentamos um estudo sobre a modelagem ambiental com uma abordagem geral da tendência e enfoques atuais em torno dos procedimentos nesta área, que engloba um conjunto numeroso de possibilidades nas mais diversas áreas das ciências aplicadas. Para objetivar a apresentação serão enfocadas, principalmente, as metodologias que abordam a modelagem matemática e aplicações na avaliação de impactos ambientais com base na literatura consultada.

1.1 METODOLOGIA DA MODELAGEM AMBIENTAL

O objetivo principal da modelagem não é produzir uma cópia exata do problema em estudo (alteração no ecossistema, poluição do ar, mudança do clima, etc), mas tentar reproduzir as características relevantes para o tratamento de uma determinada questão específica, podendo ser modelado de diferentes maneiras, de acordo com as informações disponíveis e os propósitos do projeto. Para JAMES e HUNTLEY (1990), a utilização de um modelo nem sempre dispensa o usuário de conhecimentos maiores a respeito dos processos e eventos que estão sendo simulados e, se necessário, a sua intervenção para que a simulação seja a mais próxima possível da realidade.

Um modelo matemático é uma abstração da realidade, projetado para realizar uma tarefa específica. Por terem reconhecido as propriedades e técnicas de construção, os modelos matemáticos são técnicas que permitem representar alternativas propostas e simular condições reais que poderiam ocorrer em uma dada realidade. Estes modelos utilizam equações, geralmente equações diferenciais parciais (EDP's), que simulam vários cenários ou eventos e prevêem ou simulam impactos sendo os mesmos, de acordo com as hipóteses sobre o sistema que representam, resultantes do que é incluído e do que é excluído.

As várias metodologias e modelos de avaliação de impactos ambientais podem ser classificados da seguinte forma: sistemas de redes e gráficos; Sistemas cartográficos; modelagem e análises de sistemas; métodos baseados em indicadores e integração da avaliação; métodos quantitativos (BOLEA, 1984). Para uma visão geral destas metodologias e respectivos procedimentos consultar SOUSA (2000). Nos deteremos um pouco na metodologia por modelagem e análises de sistemas, abordagem esta que orienta e é o foco da presente pesquisa.

As técnicas de análise de sistema buscam uma forma de representar a realidade estudada e compreender o funcionamento global do sistema homem-ambiente. As principais características destes métodos são: definir *a priori* o objetivo a ser alcançado de modo a se resolver o problema apresentado; definir soluções alternativas para alcançar os objetivos; introduzir estas soluções alternativas em um quadro formalizado, que pode ser um modelo de simulação, programa matemático ou modelo físico-matemático; e, por fim, determinar a solução ótima (SOUSA, 2000).

A dinâmica de sistemas “é um método de lidar com questões sobre as tendências dinâmicas de sistemas complexos, ou seja, estuda os padrões de comportamento que são gerados no tempo e tenta desvendar a sua estrutura causal. A idéia principal por trás da estrutura causal é o ‘feedback loop’(dupla causalidade) - toda ação leva a uma reação. As decisões são tomadas com base em um estado ou nível do sistema ou ambiente que envolve a tomada de decisão. Essas decisões levam a ações que tendem a alterar o estado inicial do sistema - taxas ou fluxos. Este estado alterado (ou não, se a ação não teve efeito) produz nova decisão e mais alterações. Os modelos são formados de muitos desses elos ligados entre si” (LEGEY, 1998).

A modelagem em dinâmica de sistemas não se detém na obtenção de variáveis numéricas precisas em anos específicos. A preocupação primordial está em identificar as tendências dinâmicas gerais do sistema, se é estável ou não, se oscila, se está em crescimento ou declínio.

Os modelos em dinâmica de sistemas são construídos, de início, como retratos de modelos mentais sobre o funcionamento geral do sistema. Todo elemento e relação estabelecida devem ter uma contrapartida no mundo real, nada sendo adicionado apenas por conveniência matemática ou devido a dados históricos (LEGEY, 1998).

Os modelos ambientais são técnicas úteis na organização das relações causa efeito e na ponderação de aspectos críticos. Estes modelos são representações aproximadas e simplificadas da realidade, cujos componentes e inter-relações são de algum modo semelhantes aos componentes e inter-relações da realidade. Segundo REVORA (1987), os modelos matemáticos ao mesmo tempo em que representam uma das melhores ferramentas disponíveis para a realização de estudos ambientais, podem ser complexos e custosos. O que, muitas vezes, inviabiliza a utilização dos mesmos. Uma recomendação feita pelo autor é a de que se utilize primeiramente um modelo conceitual simples, adotando modelos mais complexos nas etapas posteriores onde seja necessário maior aprimoramento na investigação.

BORREGO e MIRANDA (2000) e REVORA (1987) alertam para o risco de se considerar os modelos de simulação como a verdadeira representação da realidade. Na verdade, aqueles serão sempre incompletos, uma vez que a realidade envolve sempre dados qualitativos, não passíveis de serem quantificáveis e que são tão importantes quanto os dados mensuráveis quantitativamente. Os modelos sempre serão uma forma de representar a realidade e poderá acontecer da estruturação da realidade feita pelo modelo não ser representativa dela. Ao trabalhar com modelos, esta questão deve estar sempre presente.

Quanto à formulação dos modelos, JØRGENSEN (2002) afirma que um modelo consiste de cinco componentes, sendo estas: as funções de força ou variáveis externas que influenciam as condições do ecossistema; as variáveis de estado; as equações para a representação dos processos biológicos, químicos e físicos que

ocorrem dentro do ecossistema; os parâmetros ou coeficientes e finalmente, o modelo ou diagrama conceitual.

1.2 MODELAGEM E SIMULAÇÃO POR COMPUTADOR

Os primeiros modelos implementados e resolvidos com o aporte de ferramentas computacionais para geração de cenários numéricos, por volta de 1940, tiveram como principal objetivo a modelagem da qualidade da água, tendo como principal enfoque o oxigênio dissolvido. A partir da década de 1960, a popularização dos computadores possibilitou o desenvolvimento de modelos mais dinâmicos. As mudanças nos modelos, que passaram a inserir além de fontes pontuais de poluição, possibilitaram a avaliação do todo, a bacia de drenagem passou a ser enfocada como um sistema. O foco ainda era o oxigênio dissolvido, mas o computador permitia análises envolvendo geometrias mais complicadas, cinéticas e simulações com variações temporais.

O mais recente estágio do desenvolvimento da modelagem deve-se à crise de energia em meados da década de 1970, quando o maior avanço foi o reconhecimento da importância do material sólido e o transporte e destinação de substâncias tóxicas, ocasionando um avanço considerável na modelagem e simulação de cargas difusas.

Um dos aspectos mais importantes, associado à complexidade dos processos ambientais, é reconhecer a natureza interdisciplinar das ciências do ambiente. Para compreender os fenômenos ambientais e resolver as suas conseqüências é indispensável o suporte matemático, quer na qualificação dos dados resultantes da experimentação, quer na sua descrição científica. De fato, os sistemas naturais são função de diversos fatores não lineares, sendo o seu estudo mais bem sucedido, quando ocorre em sistemas experimentais e numéricos, o que implica forçosamente em simplificações. Apesar destas, o modelo mental que cada “engenheiro do ambiente” tem de um sistema apenas necessita de ser formalizado matematicamente para se tornar uma ferramenta poderosa (BORREGO e MIRANDA, 2000).

Em geral, o problema é discretizado e tratado em espaço funcional de dimensão finita de tal forma que sua solução numérica é a solução de um sistema linear, caminho que será tomado neste trabalho. O sistema de equações diferenciais, válido em todo o domínio do problema é complementado pelas respectivas condições de fronteira e condições iniciais, ficando assim completamente definido o modelo matemático contínuo.

Os modelos discretos obtêm-se com o auxílio de hipóteses simplificadoras que, introduzidas nos modelos contínuos, permitem exprimir as variáveis de campo em termos de um número finito de parâmetros. Deste modo, os modelos discretos são naturalmente aproximados e têm um número finito de graus de liberdade. Os métodos que conduzem à determinação da solução destes modelos utilizam as ferramentas da análise numérica, pelo que se podem designar por métodos numéricos. É bom salientar que o processo da discretização (fig. 1) permite, em última instância, substituir o problema da resolução de um sistema de equações diferenciais, pelo problema equivalente da resolução de um sistema de equações algébricas, cuja solução se obtém, naturalmente, com o auxílio de computadores.

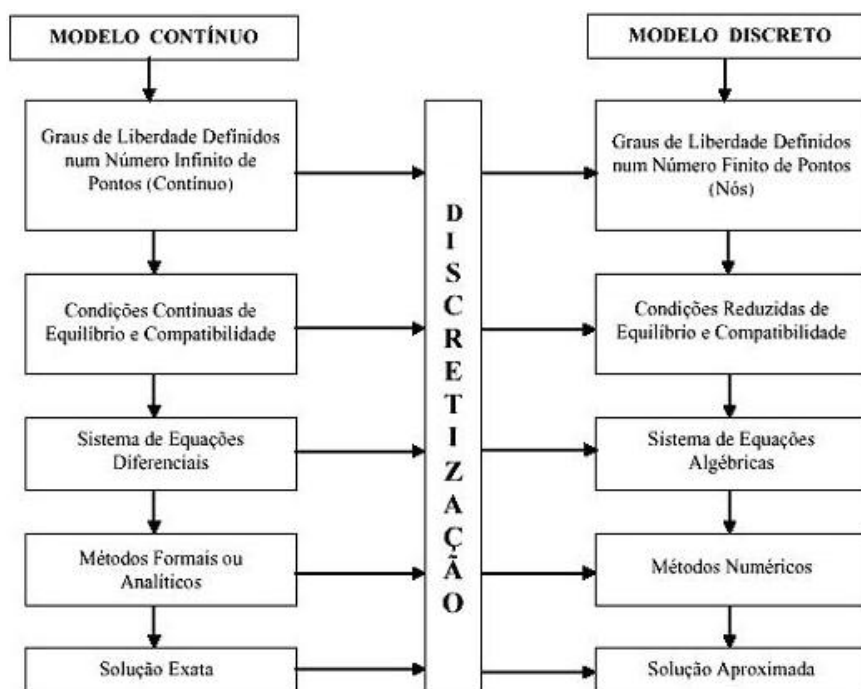


Figura 01: Processo de discretização de um modelo contínuo em modelo discreto. Adaptado de BORREGO e MIRANDA (2000).

A solução particular das equações diferenciais não pode ser obtida sem o conhecimento das condições particulares do problema a que se referem. Estas condições, designadas por condições definidas, são em geral de dois tipos: condições iniciais e condições de fronteira.

As condições iniciais, aplicáveis às equações em que intervém explicitamente a variável temporal, como é o caso das equações parabólicas e hiperbólicas, são impostas em todo o domínio do problema. As condições de fronteira são impostas, em todos os instantes no contorno do domínio do problema. Assim, enquanto nos modelos estacionários só aparecem condições de fronteira, nos modelos de propagação e de difusão, alvo desta pesquisa aparecem não só condições de fronteira, mas também condições iniciais.

Uma vez que não se pode medir uma variável espacialmente contínua em todas as posições, devem-se usar técnicas de aquisição de informações para capturar um número finito, mas representativo de valores que descreva a variável de estudo. Os computadores disponíveis são máquinas finitas, discretas, que só podem armazenar valores com precisão finita, não permitindo o armazenamento ou a manipulação de duas variáveis espacialmente contínuas e ter como resultado uma terceira variável, também espacialmente contínua. Assim sendo, devido às limitações de aquisição e de manipulação em um ambiente computacional, a continuidade espacial presente em algumas variáveis ambientais requer discretização.

As pesquisas que utilizam modelos de propagação e difusão de alguma espécie de contaminante na poluição do solo, da água ou do ar, são bastante amplas. O uso da análise numérica para discretizar o domínio e de ferramentas computacionais para obter soluções aproximadas são parte do processo de modelagem do sistema investigado. A partir da discretização espacial e temporal, chega-se à denominada formulação variacional ou fraca do problema (ver capítulo 3).

A procura do suporte matemático para compreender o ambiente está associada aos instrumentos disponíveis para a resolução de modelos, isto é, quer os métodos numéricos, quer os computadores modernos. Os dados simulados resultam da aplicação de métodos numéricos na resolução de sistemas de equações a derivadas parciais que representam os processos dinâmicos na atmosfera. Estes complexos

sistemas de equações necessitam de condições iniciais e de fronteira que têm de ser fornecidas ao modelo para que os resultados da simulação sejam tão precisos quanto possíveis (BORREGO e MIRANDA, 2000). Estes dados podem ser o resultado de outras simulações ou podem provir de observações.

A obtenção de resultados numéricos de um modelo matemático gera imprecisões devidas às simplificações impostas ao modelo. A estas imprecisões numéricas, relacionadas com os métodos numéricos e com as capacidades computacionais, dever-se-ão associar as incertezas das observações referentes à precisão dos equipamentos, tempos de amostragem, médias temporais, etc. O valor final, denominado valor "real", resulta do uso de muitas e diferentes técnicas matemáticas, tais como métodos variacionais, técnicas analíticas, estatística aplicada, etc. (BORREGO e MIRANDA, 2000).

Qualquer problema que envolva a resolução de equações a derivadas parciais levanta três questões fundamentais as quais, no seu conjunto, definem o que se chama um problema bem posto; são elas: *a)* a existência de solução, *b)* a unicidade da solução e *c)* a estabilidade da solução, isto é, que a solução dependa continuamente das condições definidas, de modo que as pequenas variações destas correspondam a pequenas variações da solução (BORREGO e MIRANDA, 2000).

Estes aspectos distintos do problema da determinação da solução não só ocuparam como continuam ainda a ocupar a atenção dos matemáticos que procuram aumentar o número de demonstrações relativas, principalmente, à existência e à unicidade de solução, que são do maior interesse para a conveniente interpretação dos problemas a elas relacionados.

A modelagem matemática está permitindo o estudo de diversos fenômenos relacionados à qualidade do ar. Foi usada para analisar o ponto de alcance das emissões aéreas, oriundas de chaminés de indústrias (HEIN e BONA, 2004) com a aplicação de equações de difusão unidimensional no estudo de diferentes características das emissões. MARQUES FILHO (2002) propõe a deposição de poluentes em regiões costeiras a partir das emissões de plataformas de petróleo; outro enfoque dado na modelagem da qualidade do ar é o transporte de gases traço e aerossóis (cf. WANG e OSTOJA-STARZEWSKI, 2004; ARTACHO, 1993; FREITAS, 1999; SANTOS, 1998 e LONGO, 1999) e as emissões aéreas provocadas

por pontos móveis, tais como aeronaves no lançamento de agrotóxicos em lavouras, descarga de automóveis.

Acidentes ambientais, principalmente aqueles relacionados à poluição de mananciais de água doce (pantaneais, lagos e bacias hidrográficas), por agrotóxicos, derrames de petróleo e esgoto não tratado, geralmente causam impactos preocupantes de difícil recuperação. A modelagem destes acidentes permite que se simulem situações reais e que se avaliem os possíveis danos em ensaios que não teríamos condições de observar num acidente real, além de permitir avaliar possíveis estratégias de contenção.

O estudo do funcionamento da modelagem matemática e simulação numérico-computacional para acidentes ambientais pode ser visto pelos trabalhos de DINIZ (2003) que descreve um problema de dispersão de poluente num sistema ar-água, com o detalhamento das características reais do poluente e a especificação do ingresso do poluente por lançamento aéreo e terrestre na área estudada, seu comportamento no meio ambiente (decaimento, solubilidade, etc) e influência das condições ambientais na dispersão e deposição no solo e na água. BERNARDES (1998) e CANTÃO (1998) apresentam a modelagem de derrames de petróleo. Nestes estudos, os modelos matemáticos utilizados consistem de equações de transporte e dispersão de hidrocarbonetos em meio aquoso. NETO e HORITA (2003) apresentam um modelo para o estudo do padrão de circulação hidrodinâmica de águas rasas para a Enseada do Balneário Camboriú, através da aplicação de um modelo numérico hidrodinâmico bidimensional.

1.3 IMPACTOS AMBIENTAIS DE HIDRELÉTRICAS

Obras hidrelétricas causam, em geral, grandes impactos ao meio ambiente, que são verificados ao longo e além do tempo de vida da usina e do projeto, bem como ao longo do espaço físico envolvido. Os impactos mais significativos e complexos ocorrem nas fases de construção e de operação da usina. A avaliação dos

impactos no espaço físico atingido é feita por um conjunto de avaliações e estudos, denominados de “Estudo de Impacto Ambiental” (EIA) e “Relatório de Impacto Ambiental” (RIMA). Os estudos visam antever os riscos para o meio ambiente e desenvolver ações que minimizem tais impactos. São considerados relevantes: (i) impactos sobre o meio físico: estabilidade da zona do projeto, aumento da vazão do rio, redução da vazão do rio, qualidade da água, qualidade do ar. (ii) impactos sobre o meio biótico: biota terrestre, biota aquática e outros biomas; (iii) desalojamento da população.

“Os impactos físicos mais comuns são a diminuição da correnteza do rio alterando a dinâmica do ambiente aquático, com isso o fluxo de sedimentos é alterado favorecendo a deposição deste no ambiente lótico; a temperatura do rio também é modificada, tendendo a dividir o lago da represa em dois ambientes: o primeiro, onde a temperatura é mais baixa (o fundo do lago) e o outro, onde a temperatura é mais alta (superfície do lago)” (SOUSA, 2000). Este fato repercute também em outros impactos, uma vez que essa disposição produz pouca mistura na água do ambiente represado, criando condições anóxicas e favorecendo a eutrofização e a ocorrência de reações químicas, entre elas, emissões de metano e dióxido de carbono (LIMA, 2001) que contribuem para o agravamento do efeito estufa, entre outros compostos nocivos ao interesse humano, sendo estes os principais impactos químicos observados.

Os impactos biológicos relacionam-se à barreira física representada pela barragem para as espécies aquáticas, constituindo um fator de isolamento das populações antes em contato. Além deste fato, a barragem pode impedir ou dificultar a piracema de algumas espécies de peixe, além do que, modifica o habitat (de rio para lago), imposto pela construção de barragens (ver CHONG *et al.*, 2005 e DIAS, 1999). A transformação da dinâmica do rio, bem como as alterações na qualidade da água, afetam tanto a região a montante quanto a jusante da barragem. Tais impactos, geralmente, afetam a biodiversidade do rio.

Os impactos ambientais decorrentes do represamento do Rio Manso, a partir de 1999, causaram modificações que foram rapidamente observadas após o fechamento da barragem. A partir do represamento das águas do rio Manso,

registrou-se alteração da vazão em todo o trecho à jusante, provocando condições desfavoráveis à sobrevivência de inúmeros cardumes (LIMA, 2001).

MÜLLER (1995) já apontava que a jusante as consequências das alterações no regime hidrológico tanto poderiam ser observadas logo após o fechamento da represa, como também muitos anos após, devido à alteração dos períodos sazonais, já que, após a implantação da usina, o rio passa a ter uma vazão regularizada. Aponta também que a geração de energia hidroelétrica acarreta impactos significativos sobre o meio ambiente, cuja dinâmica espacial e temporal de propagação se manifesta tanto na área do lago artificial, como no rio a jusante da represa. Em ambos os estudos existem elementos que poderiam servir de aporte para ações que mitigassem os impactos sobre os meios físico, biótico, social e econômico que apresentam uma propagação a curto, médio e longo prazo.

O Estudo de Impacto Ambiental da UHE de Manso previu que os impactos por ela causados, desde o início das obras até o enchimento do reservatório em dezembro de 2000, causariam modificações significativas ao meio ambiente em toda a área inundada (SONDOTÉCNICA, 2000). O principal motivo de preocupação relatado refere-se à captura de animais silvestres, alertando para o fato de que um grande número não sobreviveria por vários fatores, como a não-captura e pela modificação de seu habitat natural. Outros impactos significativos também são apontados: a desapropriação da população moradora a montante da barragem; desmatamento das áreas verdes e desaparecimento de sítios arqueológicos existentes na área.

No fechamento das comportas da usina, o Rio Manso teve suas características alteradas drasticamente, principalmente a jusante, onde a sua vazão foi diminuída para o enchimento do reservatório. Apesar de FURNAS desenvolver vários programas ambientais tais como: Climatológico, Sismológico, Recursos Minerais; do Lençol Freático, Hidrológico, Limnológico e da Qualidade da Água e da Ictiofauna, a empresa, diante das intensas críticas, manteve restrição na divulgação das informações e dados gerados por esses programas que tinham como objetivo acompanhar e minimizar esses impactos.

A construção de represas sobre áreas florestadas, a exemplo do que ocorreu no reservatório de Manso, tem gerado condições peculiares quanto à concentração e

distribuição de oxigênio nesses ambientes. Nessas represas, a fitomassa inundada, ao se decompor, consome grande parte do oxigênio dissolvido, gerando altos déficits, especialmente no hipolímnio¹.

Os primeiros anos após a inundação correspondem ao período de maior déficit de oxigênio. Assim, não raramente, toda a coluna d'água pode tornar-se desoxigenada, fator que independe dos ciclos de estiagem e chuvas e também do padrão de estratificação térmica do ecossistema.

Essa fase ocorreu de forma tão intensa na região de Manso que as comunidades ribeirinhas, aliadas a Organizações Não-Governamentais e à Associação dos Pescadores protestaram e entraram com uma ação civil para impedir a continuidade da obra. Alegaram que a água a jusante e a montante da barragem também apresentava péssima qualidade e um forte cheiro proveniente desse processo de decomposição, provocando doenças de pele e afugentado os cardumes, tirando-lhes, assim, a principal fonte de alimento e a principal alternativa de renda.

Além dos problemas vivenciados pelos ribeirinhos, relacionados com a qualidade da água e a drástica queda do estoque pesqueiro, outros foram constatados, tais como: restrições na divulgação das análises químicas de qualidade da água; programa de educação ambiental em regiões fora da área de alagamento da usina; assentamento das famílias desalojadas em áreas de solo extremamente ácido, impróprio para a agricultura de subsistência; a coleta de animais silvestres, realizada de forma precária.

Os efeitos prejudiciais são potencializados pelo represamento máximo da água, desde o fechamento da barragem, em novembro de 1999, para acelerar a formação do lago, a estatal 'FURNAS' vem retendo o máximo de água e, desde então, por 11 vezes, o nível do rio Cuiabá ficou abaixo da quota zero, inclusive no período chuvoso. Dessa maneira, a "regularização" das cheias do rio Cuiabá vai "regularizar" também as cheias no Pantanal, vitais para a preservação daquele frágil ecossistema que só existe em razão do livre e natural fluxo e defluxo das águas.

¹ A parte fria, deplecionada de oxigênio de um lago ou outro corpo de água, que se situa abaixo da zona da troca rápida de temperatura da água (RICKLEFS, 1993).

1.4 LOCALIZAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DA ÁREA DE ESTUDO

O local utilizado para modelar e simular os efeitos de construção de barragens nas características da circulação atmosférica local e regional para estudo das alterações nos fluxos de umidade e análise dos possíveis impactos nos ambientes adjacentes foi a UHE de Manso, localizado na sub-bacia 1, conforme classificação proposta pelo relatório preliminar do PCBAP (1997). A área está localizada a montante da cidade de Cuiabá no rio Manso, afluente do rio Cuiabá e contribuinte para a bacia do rio Paraguai (fig. 2), formador do Pantanal Mato-grossense.

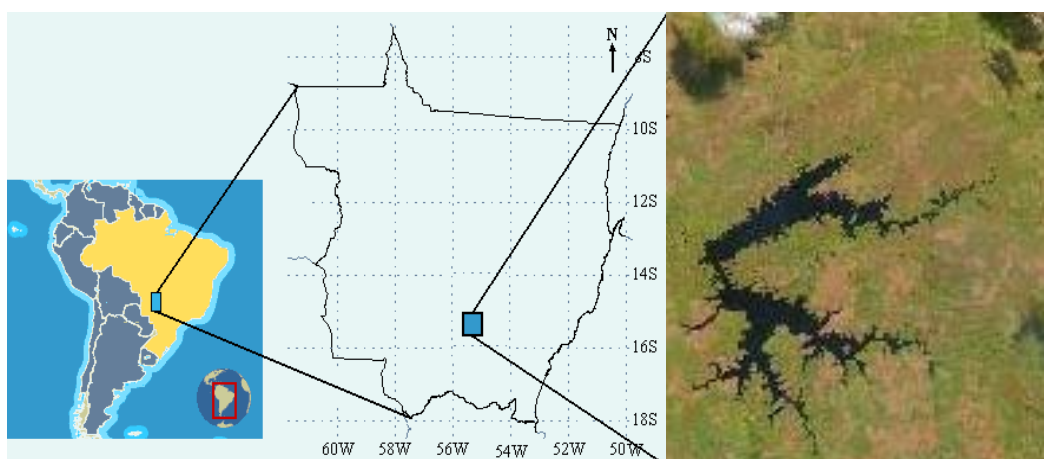


Figura 02: Localização geográfica e foto de satélite da UHE de Manso, no Estado de Mato Grosso, Centro-Oeste Brasileiro.

1.4.1 HISTÓRICO DA CONSTRUÇÃO DA UHE DE MANSO

A barragem foi originalmente concebida em 1975, pelo extinto Departamento Nacional de Obras Contra a Seca – DNOCS, como uma obra específica para irrigação, redução de cheias em Cuiabá e regularização de vazões com fins de

navegação. Seu principal motivo foi a grande enchente ocorrida em março de 1974 em oito municípios ribeirinhos, entre eles as cidades de Várzea Grande e Cuiabá. Com a crescente demanda por energia elétrica na região, o projeto incorporou a instalação de turbinas para geração de energia, visando manter os benefícios do projeto original.

Duas fases distintas da construção foram registradas. A primeira, em setembro de 1988, quando se deu início a construção. A segunda, após paralisação por quase uma década, marcada pela retomada da construção, a essa altura com a participação da iniciativa privada em parceria com a ELETRONORTE, dado o processo de privatização do setor elétrico brasileiro.

O arranjo concebido para a usina hidrelétrica de Manso compreende uma barragem principal de terra e enrocamento, com 3.660m de extensão e altura máxima de 72 m, em cujo corpo, separados por um muro do tipo gravidade, está o vertedouro principal de superfície, controlado por três comportas de segmento e tomada d'água do tipo gravidade que promove a captação e a adução da água através de quatro condutos forçados até as unidades de geração.

A potência instalada total é de 210 MW, com quatro unidades de 52,5 MW cada. O nível máximo normal do reservatório encontra-se na cota 287,00 m, correspondendo a uma área inundada de 427 km² e um volume estimado de $7.337 \times 10^6 \text{ m}^3$. O lago ocupa cerca de 263 km² do município de Chapada dos Guimarães, 58 km² de Nova Brasilândia e 66 km² de Cuiabá e se estende a partir do local da barragem, por cerca de 50 km a leste e sudeste, em direção às nascentes do rio Manso e Casca.

Até cerca de 30 km do local da barragem, na direção desses rios, o reservatório é mais amplo, com largura média de 4,5 km. Ainda nesse trecho, nas imediações da confluência dos rios Casca/Quilombo e Palmeiras/Manso, atinge larguras da ordem de 15 km e 9 km, respectivamente. A montante desse trecho, as faixas são mais estreitas, com larguras inferiores a 2,5 km.

O enchimento do reservatório se iniciou em 30 de novembro de 1999, a entrada em operação da primeira unidade geradora em novembro de 2000, seguida das outras três entre janeiro e março de 2001.

1.4.2 BACIA DE CONTRIBUIÇÃO DO RIO MANSO

A Chapada do Guimarães e a Serra Azul são os divisores de águas entre as bacias do Alto Paraguai e da Amazônia. A falha Geológica entre a Serra Azul e a Chapada dos Guimarães permitiu que entre as duas surgisse a bacia hidrográfica do Rio Manso. As características geográficas constam de altitude média de 474,22 m, sendo que a mínima registrada é de 250 m e a máxima de 880 m, com declividade média de 3,87% e uma área de drenagem estimada em 1.367,16 km². No local da Barragem, o rio Manso controla uma área de drenagem de 9.183,86 km² e representa cerca de 40% da bacia do rio Cuiabá.

O principal afluente do rio Manso é o rio Casca cuja área de drenagem representa aproximadamente 45% da área de drenagem total do rio Manso no APM Manso. A bacia do rio Casca é formada por uma camada de solo conlúvio/residual arenoso com alta porosidade – porosidade efetiva da ordem de 20%, alta permeabilidade e por formações areníticas, subjacentes, com porosidade mais reduzida e baixa permeabilidade (SONDOTÉCNICA, (1999) e (2000)). Em razão destas características geológicas, com solos de grande porosidade, o rio Casca apresenta no período da estiagem, descargas específicas extremamente elevadas em comparação com as dos outros rios da região. A sub-bacia do rio Manso, montante da foz do rio Casca, com área de drenagem de 4.251 km², cerca de 55% da área controlada pela barragem, possui solos de baixa permeabilidade que, durante o período chuvoso, contribuem para a formação de cheias nos rios Manso e Cuiabá e, no período da estiagem, proporcionam descargas extremamente reduzidas.

1.4.3 CARACTERÍSTICAS CLIMÁTICAS

Os aspectos climatológicos na bacia do Alto Paraguai caracterizam-se pelas oscilações que ocorrem nas variáveis hidrológicas e outras grandezas meteorológicas. Entre essas grandezas, destacam-se: precipitação anual entre 800 e

1600 mm, com as máximas precipitações ocorrendo na cabeceira; evapotranspiração potencial média anual entre 3,6 mm/dia e 4,3 mm/dia; temperatura média de 22 a 26°C; temperatura mínima média anual entre 17 e 20°C e temperatura máxima média anual entre 29 e 32°C (MUSIS, 1997).

O clima da região de influência mostra variação anual que vai de 22,7°C a 27,5°C, com as menores temperaturas no mês de julho e as maiores em outubro. A temperatura tem valor médio anual próximo aos 26°C, sendo as máximas de 34,2°C registradas em outubro e as mínimas 16,4°C, em julho. Pesquisadores da PCBAP (1997), analisando os valores médios mensais de temperatura e precipitação, concluíram que toda a bacia do rio Cuiabá se enquadra no tipo climático Aw (clima quente e úmido com chuvas de verão), de acordo com a classificação de Köpen. MUSSIS (1997) identificou, com maior nível de detalhamento, oito tipos de clima na bacia do Alto Paraguai. Para o presente estudo, torna-se representativa a identificação do clima B4rA'a', encontrado em altitudes superiores a 600m, abrangendo as cidades de Nova Brasilândia, Chapada dos Guimarães e Campo Verde, sendo o clima mais úmido encontrado na região, com índice hídrico de 80 a 100, pouca deficiência de água no inverno e evapotranspiração anual superior a 1140 mm.

CAPÍTULO 2

MODELO MATEMÁTICO

O volume de vapor d'água presente em uma dada região é função da localização geográfica do clima e das características locais da cobertura do solo. A circulação geral da atmosfera é determinante na caracterização do clima local e da orientação dos fluxos gerais das massas de ar e, conseqüentemente, da composição do ar atmosférico. Massas de ar em movimento transportam grandes quantidades de vapor d'água de uma região a outra. A demanda atmosférica, geralmente, é alta em função do déficit de saturação².

Um esquema usual de representação da circulação geral da atmosfera está representado abaixo (fig. 3).

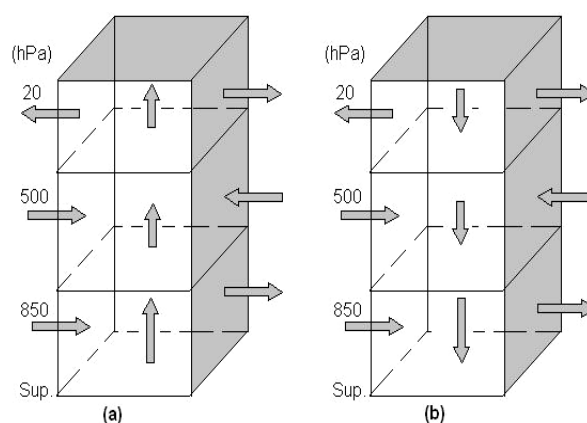


Figura 03: Modelo de circulação atmosférica sobre uma superfície retangular. Em (a) fluxo ascendente e horizontal e (b) fluxo descendente e horizontal.

² Déficit de saturação: refere-se ao volume de vapor d'água presente na atmosfera num dado momento e a capacidade máxima de reter vapor d'água numa dada temperatura que em volume total pode chegar a 4%.

O desafio que se apresenta é a obtenção de um modelo matemático capaz de simular o transporte e a difusão de vapor d'água atmosférico. Este modelo será estabelecido a partir de algumas considerações sobre a dinâmica atmosférica, bem como dos fenômenos que definem o ingresso e saída do vapor d'água num domínio retangular limitado.

2.1 MODELO CONCEITUAL

Inicialmente, será proposta uma aproximação da solução, adotando um domínio bidimensional, sendo o aspecto matemático de uma disposição tridimensional por agora desprezado. O que motiva a abordagem bidimensional é a possibilidade de fazer um estudo por camadas sobrepostas, tomando planos horizontais representativos em alguma camada que contenha as características do comportamento médio do fenômeno (fig. 4).

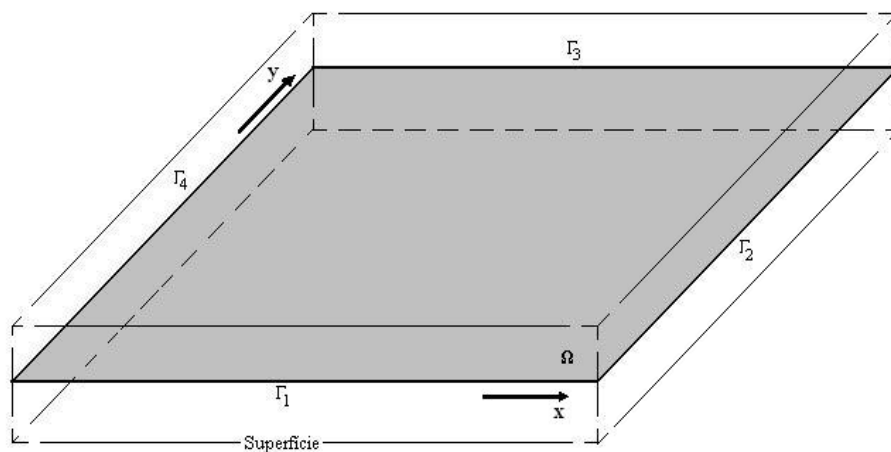


Figura 04: Definição do domínio aéreo retangular (Ω) por um plano horizontal limitado pelas fronteiras Γ_{κ} .

Por outro lado, as dimensões naturais do domínio escolhido se estendem por aproximadamente 50 km nos sentidos Norte/Sul e Leste/Oeste e, considerando que o vapor d'água concentra-se em maior volume próximo à superfície e tendo em vista que estamos interessados em descrever o processo concentração/dispersão em

camadas sobrepostas, com uma espessura de cerca de 100 m, a partir da superfície, é possível a adoção de planos bidimensionais nesta primeira abordagem.

Os processos atmosféricos são governados por uma série de variáveis difíceis de serem estabelecidas tanto nos aspectos qualitativos quanto nos quantitativos. Assim, torna-se difícil estabelecer as contribuições de cada variável em cada momento da evolução do sistema. Para que o modelo possa produzir cenários aceitáveis e para que seja matematicamente tratável, a concepção do sistema deverá sofrer algumas simplificações com a escolha dos processos mais significativos que nos possibilitem tratá-lo sem que perca a condição de explicar o processo evolutivo.

Vamos assumir que a teoria subjacente aos processos atmosféricos é a dinâmica laminar dos fluidos e que a formulação do modelo será pautada nestes princípios.

As leis da dinâmica dos fluidos são bem estabelecidas e podem ser formuladas de muitos modos equivalentes. Por exemplo, elas podem ser deduzidas lembrando que o comportamento de um sistema físico é completamente determinado pelas leis da conservação. Isto corresponde à idéia de que, durante a evolução de um fluido, certas propriedades, como massa, quantidade de movimento e energia, são conservadas. Informações adicionais necessárias são as especificações da natureza do fluido (por exemplo, fluido incompressível, gás perfeito, fluido viscoso, etc.) e o coeficiente de difusividade (MARCHUK, 1986).

O conceito de conservação significa que a variação do fluxo da propriedade que se conserva, a saber, a massa, quantidade de movimento ou energia, também chamada de propriedade extensiva, no interior de um dado volume, deve-se ao efeito pontual de algumas fontes internas e ao saldo dos fluxos através da fronteira (OMETTO, 1976). Este saldo é chamado de fluxo, e sua expressão resulta das propriedades mecânicas e termodinâmicas do fluido. Semelhantemente, as fontes ligadas ao fluxo, também são assumidas como conhecidas a partir da discretização espacial. Os fluxos e as fontes são, em geral, dependentes das coordenadas espaço tempo, assim como do movimento do fluido.

A transferência natural de água no estado líquido da superfície do globo para o gasoso na atmosfera interpreta-se pela teoria cinética da matéria. Nos sólidos e líquidos, predominam as forças de atração (energia de ligação) entre as partículas do

corpo. Nos líquidos, a energia de ligação média das partículas é menor do que nos sólidos, mas uma partícula que se liberta da atração daquelas que a rodeia é logo capturada por um grupo de partículas vizinhas.

A evaporação de água no estado líquido ou sólido para a atmosfera consiste na libertação das partículas da camada superficial, cuja energia interna de agitação é maior que a energia de ligação das moléculas da camada sub-superficial, ou seja, suficiente para vencer as forças de tensão superficial que impedem as moléculas de vapor de água escaparem para a atmosfera. O número de moléculas que escapam durante a unidade de tempo aumenta com a energia cinética média das partículas e, portanto, com a temperatura do corpo evaporante.

Simultaneamente, com o escape de moléculas de água para a atmosfera, dá-se o fenômeno inverso. Moléculas de água na fase gasosa, que existem na atmosfera, chocam-se com a superfície de separação água/atmosfera e são captadas pelo corpo evaporativo. A evaporação mantém-se até atingir o estado de equilíbrio que corresponde à saturação do vapor de água.

O vapor de água formado é removido pela difusão turbulenta ocasionada pelas correntes de convecção provocadas pelas diferenças de densidade e do deslocamento do ar na camada atmosférica junto à superfície. O fenômeno é, por isso, condicionado pela temperatura, déficit de saturação e estado de agitação do ar junto à superfície evaporante e, portanto, pelo estado de equilíbrio (estável, instável ou indiferente) da atmosfera local e no instante considerado.

Os parâmetros que estabelecem estas condições são: a temperatura na camada limite junto à superfície evaporante, a pressão atmosférica, a diferença entre tensões de vapor reinantes na superfície evaporante e a velocidade do vento que modifica a camada limite, estabelecendo a importância dos gradientes superficiais de tensão de vapor e da temperatura.

As causas externas que atuam na evaporação e sua conseqüente concentração em um elemento de área são a temperatura, a umidade do ar atmosférico, a velocidade de deslocamento da massa de ar advectiva e a radiação solar aquecendo a superfície evaporante.

Para estabelecer o modelo conceitual do processo de dispersão, consideremos um domínio horizontal (Ω) (cf. figura 4), fixado acima da superfície e

destaquemos um elemento de área de dimensões $\Delta x \times \Delta y$. Consideremos, ainda, que estamos interessados em descrever o comportamento de um grupo de moléculas de vapor d'água que tenham sido injetadas neste elemento de área por algum processo natural (evaporação superficial ou pela ação do vento). Se considerarmos que o fornecimento é constante, então, a variação da concentração de vapor d'água de um ponto a outro será afetada principalmente por gradientes de concentração, pelo transporte ocasionado pelo vento e pela perda de alguma parcela para a atmosfera adjacente (fig. 5).

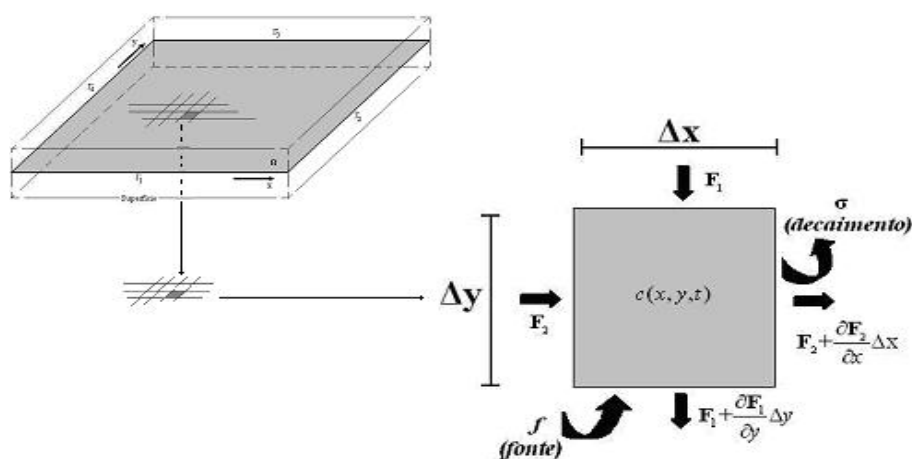


Figura 05: Elemento de área e principais fluxos de massa a ele relacionado.

2.2 FORMULAÇÃO ANALÍTICA DO MODELO

O modelo conceitual permite que se equacione analiticamente os fluxos. Denominando de $c(x, y, t)$ a concentração de massa num ponto do domínio ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$) então, a variação da concentração neste ponto, em um dado instante, deverá considerar todos os fluxos em conjunto. A interpretação de como cada componente do fluxo total age no processo de dispersão e como interfere na concentração conduz a formulação do modelo matemático. De fato, a variação total da concentração inicial no tempo é dada pela soma de todos os fluxos parciais:

$$\frac{d}{dt}c(x,y,t)dxdy = \mathbf{F}_1 dx + \mathbf{F}_2 dy - \left[\left(\mathbf{F}_1 + \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} dy \right) dx + \left(\mathbf{F}_2 + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} dx \right) dy \right] + f(x,y,t)dxdy - \sigma(x,y,t)dxdy$$

onde f é a função relacionada com a fonte e σ com o decaimento. Simplificando, obtemos:

$$\frac{d}{dt}c(x,y,t)dxdy = -\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} dydx - \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} dxdy + f(x,y,t)dxdy - \sigma(x,y,t)dxdy$$

Tomando $\mathbf{F}$ como vetor fluxo, com componentes $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$ e considerando que a equação deve ser válida para todo $(\Omega \subset \mathbb{R}^2)$, obtemos uma primeira formulação analítica para o nosso modelo que é dado nos seguintes termos:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{F}) + \sigma = f \quad (2.1)$$

Os fluxos que tomaremos como relevantes são gerados a partir de duas contribuições: uma devido ao transporte advectivo do fluido e outra devido à difusão dada pelo movimento molecular que sempre está presente até mesmo quando o fluido está em repouso. Então, a equação que rege o processo deve obedecer à formulação genérica dada a seguir, a qual representa uma generalização do modelo que buscamos:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \{ \text{difusão} \} + \left\{ \begin{array}{l} \text{transporte} \\ \text{advectivo} \end{array} \right\} + \{ \text{decaimento} \} = \{ \text{fonte} \}$$

Se considerarmos aceitável este modelo, resta investigar se, a partir da equação (2.1), podemos atingir uma formulação adequada que represente os fenômenos mais relevantes envolvidos. Assim, é necessário especificar analiticamente os fluxos $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)$, o decaimento, a fonte e as condições de fronteira.

Para tanto, vamos considerar que o efeito do movimento molecular expressa a tendência de um fluido em alcançar o equilíbrio e a uniformidade, já que a diferença na magnitude do fluxo da propriedade extensiva que está sendo considerada gera sua transferência no espaço de forma a reduzir a não homogeneidade, ou seja, existe um fluxo de matéria das regiões de maior concentração para as de menor. A contribuição dessa componente do fluxo age como um efeito difusivo que, aqui, denominaremos de difusão efetiva (ou dispersão), tomando um vetor na direção do próprio gradiente da concentração, com sinal trocado ($\mathbf{F}_1 = -\alpha(x, y, t)\nabla c$). A função α serve como parâmetro de intensidade. Quanto maior o seu valor, maior a norma de $\mathbf{F}_1$, mais facilmente a matéria se desloca e, conseqüentemente, maior o fluxo na direção de $-\nabla c$ (CANTÃO, 1998).

O outro fluxo refere-se ao transporte advectivo, proporcionado por um agente de movimento externo. Seja então $V = (V_1(x, y, t), V_2(x, y, t))$ um campo de velocidades. Neste caso, a movimentação se dá na mesma direção do campo de velocidade e a quantidade movida é a própria concentração no ponto. Assim, teremos esse fluxo como $\mathbf{F}_2 = \text{div}[\vec{V}c]$.

O decaimento será considerado proporcional à própria concentração no ponto podendo ser caracterizado por captura de moléculas pela superfície evaporante, condensação, precipitação e reações químicas ocorrentes na atmosfera.

Em termos de modelagem clássica destes fenômenos, tem-se:

$$\begin{aligned} \{\text{difusão}\} &= \text{div}[-\alpha \nabla c] && (\text{cf. OKUBO, 1980}) \\ \{\text{transporte advectivo}\} &= \text{div}[\vec{V}c] && (\text{cf. EDELSTEIN-KESHET, 1988}) \\ \{\text{decaimento}\} &= \text{constante } c = \sigma c && (\text{cf. BASSANEZI e FERREIRA, 1988}) \end{aligned}$$

A modelagem do termo fonte deve considerar uma superfície livre de água. Dada a irregularidade da geografia do lago da represa e a ramificação dos canais alagados, a fonte será estabelecida a partir da discretização espacial, considerando presença e ausência de pontos de contribuição (evaporação). Voltaremos a isto mais adiante, quando discutiremos a discretização espacial por elementos finitos.

Resulta, portanto, que a equação adotada para modelar o processo de dispersão efetiva do vapor de água no domínio aéreo é dado por:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(-\alpha \nabla c) + \text{div}(\vec{V}c) + \sigma c = f \quad (2.2)$$

onde,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha = \alpha(x, y, t) & \text{(aproxima a difusividade efetiva no meio aéreo),} \\ \vec{V} = \langle V_1(x, y, t); V_2(x, y, t) \rangle; & \text{com} \\ \text{div}(\vec{V}) = 0 & \text{(aproxima um campo bem comportado no} \\ & \text{sentido dos fluxos aéreos)} \\ \sigma & \text{(aproxima linearmente o decaimento total} \\ & \text{no meio aéreo)} \\ f & \text{(é o termo fonte)} \end{array} \right.$$

Seja η o vetor normal exterior unitário ao longo do contorno Γ_κ , as condições de fronteira serão consideradas assintoticamente estacionárias (condição de Neumann) (BASSANEZI e FERREIRA JR., 1988) genericamente indicadas por:

$$-\alpha \frac{\partial c}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_\kappa} = 0 \quad \forall t \in (0, T], \kappa = 1, 2, 3, 4. \quad (2.3)$$

Assim é imposta uma condição simplificadora para o modelo que está sendo proposto. Ou seja, nesta primeira abordagem, o ingresso e a saída de vapor d'água no domínio pelas fronteiras será considerado nulo, pelo fato de assumirmos fronteiras suficientemente distantes de modo que os processos difusivo e advectivo não influenciam a concentração da propriedade no domínio considerado, o que pode ser visto como um balanço nulo entre o que entra e o que sai pelas fronteiras.

Estas condições são estabelecidas de modo que se possa restringir a análise a uma única condição de fronteira, permitindo uma descrição do processo de dispersão no interior do domínio que seja tratável do ponto de vista matemático, a partir dos fenômenos que interferem significativamente na evolução do fenômeno, porém sem perda de generalidade.

Estas equações (2.1 – 2.4) constituem a formulação clássica ou “forte” do problema. Conforme assinalado anteriormente, nem sempre é fácil, ou possível estabelecer a solução analítica do problema. Para o caso em estudo, não perseguiremos a solução exata, mas uma aproximação via métodos numéricos, assunto no qual nos deteremos doravante.

Tendo em vista a necessidade de demonstrar e obter, de algum modo, a existência e unicidade de solução do problema e visando a aplicação do método de Elementos Finitos, via método de Galerkin para a discretização espacial, de modo a obter as aproximações numéricas adequadas da solução para cada instante $t \in [0, T]$, faz-se necessária a obtenção da formulação variacional ou “fraca” do problema. No próximo capítulo, apresenta-se a descrição do Método de Elementos Finitos, a discretização e respectiva formulação variacional para o problema da distribuição do vapor d’água em um domínio retangular.

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Desenvolvido originalmente para utilização em engenharia civil, o Método de Elementos Finitos (MEF) é atualmente utilizado para aproximar soluções das equações diferenciais parciais (EDP's) que surgem em muitos campos da matemática aplicada.

O primeiro método numérico, com o intuito de resolver EDP's, foi o método das diferenças finitas. Nesse método, o domínio da solução é dividido em uma malha de pontos ou nós discretos. A solução é, então, aplicada para cada nó e suas derivadas substituídas por diferenças finitas divididas. Embora tal aproximação seja, conceitualmente, de fácil compreensão, registram-se alguns inconvenientes. Em particular, torna-se difícil sua aplicação em sistemas com geometria irregular, condições de contorno não usuais ou composição heterogênea (LIRA, 2003).

O MEF que fornece uma alternativa melhor a tais sistemas teve sua formulação estabelecida da forma como hoje é conhecida com a publicação do trabalho de TURNER *et al.*, em 1956. Uma vantagem desse método com relação aos de diferenças finitas é a facilidade relativa com que se manejam as condições de limite do problema. Muitos problemas físicos têm esse tipo de condição, incluindo derivadas e limites de forma irregular. Esse tipo de condição de limite é difícil de manusear utilizando-se os métodos de diferenças finitas, já que cada condição que contenha uma derivada deve ser aproximada por meio de um quociente de diferenças nos pontos de rede, e a forma irregular do limite dificulta a colocação dos pontos da rede (LIRA, 2003).

Em contraste à técnica das diferenças finitas, o MEF divide o domínio da solução em formas simples de regiões ou “elementos”. Uma solução aproximada da EDP pode ser desenvolvida para cada um desses elementos. A solução total é então gerada, colocando-as juntas ou montando-as. Utilizando-se as soluções individuais, toma-se o cuidado de assegurar a continuidade dos contornos entre os elementos.

O uso de elementos triangulares, em vez de malhas retangulares, fornece melhor aproximação em sistemas com formatos irregulares, além de valores desconhecidos que possam ser gerados continuamente, por meio do domínio da solução inteira, em vez de pontos isolados.

O MEF é bem mais recente que o anterior, sendo mais genérico e, podendo ser aplicado a complexas estruturas geométricas e ambientes com várias mudanças de meio. Ele possui uma formulação matemática mais trabalhada, sendo, portanto, um conjunto de técnicas e métodos que se baseia na discretização do problema em elementos pequenos e na aproximação de cada elemento por um conjunto de polinômios (SAAD, 2000).

Apresentamos a seguir uma breve descrição da abordagem conceitual e matemática do método.

3.1 MEF – TÉCNICA GALERKIN STANDARD

Para iniciar o procedimento, dividimos a região Ω em um conjunto de triângulos $T_1, T_2, \dots, T_n$ em que o i -ésimo triângulo (fig. 6) têm três vértices, ou nós, indicados com:

$$N_j^{(i)} = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)}), \text{ para } j = 1, 2, 3 \text{ e } i = 1, 2, \dots, n.$$

O conjunto de funções usadas para a aproximação é um conjunto de polinômios seccionados de grau de fixo em x e y , e a aproximação requer que os polinômios sejam seccionados conjuntamente, de tal forma que a função resultante seja mensurável, ou de quadrado integrável no sentido de Lebesgue na região inteira.

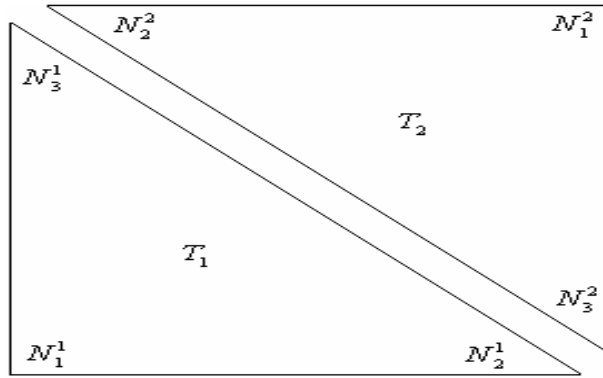


Figura 06 – Enumeração do triângulo inferior (T_1) e superior (T_2) e respectivos nós $N_j^{(i)}$.

A cada nó N_j associamos um polinômio linear em x e y

$$\varphi_j^{(i)}(x, y) \equiv \varphi_j(x, y) = a_j + b_j x + c_j y,$$

onde,

$$\varphi_j(x_k, y_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad (3.1)$$

são comumente utilizados com elementos triangulares (BURDEN, 2003).

Neste polinômio, φ é a variável dependente, e a, b, c representam os coeficientes, e (x, y) são as variáveis independentes. Essa função deve passar pelos valores de $\varphi(x, y)$ nos nós do triângulo (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) .

Pela condição 3.1, isso produz sistemas lineares da forma:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= a_j + b_j x_1 + c_j y_1 \\ \varphi_2(x, y) &= a_j + b_j x_2 + c_j y_2 \\ \varphi_3(x, y) &= a_j + b_j x_3 + c_j y_3 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ou na forma matricial, onde o elemento 1 ocorre na j -ésima linha do vetor da direita (nesse caso, $j = 2$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_j \\ b_j \\ c_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

No problema em tese, consideremos que Ω seja uma poligonal e ℓ seja um conjunto contínuo de linhas retas. Sejam $E_1, \dots, E_n$ marcações dos nós que se encontram em $\Omega \cup \ell$. A cada nó E_k associamos uma função φ_k que é linear em cada triângulo que tem o valor 1 em E_k e que, no resto dos nós, é zero. Essa opção faz φ_k idêntica a $\varphi_j^{(i)}$ no triângulo T_i quando o nó E_k é o vértice denotado por $N_j^{(i)}$.

3.2 FUNÇÕES TESTE

A escolha das funções teste φ_i será de elementos finitos triangulares de primeira ordem que consiste em:

- construir uma malha (dos Elementos Finitos) sobre o Domínio Ω : (Ω_T) , conforme ilustrado na figura 7, abaixo
- a escolha das funções base $\{\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_n(x, y)\}$ definidas globalmente são do tipo linear por partes e satisfazendo a condição (3.1).

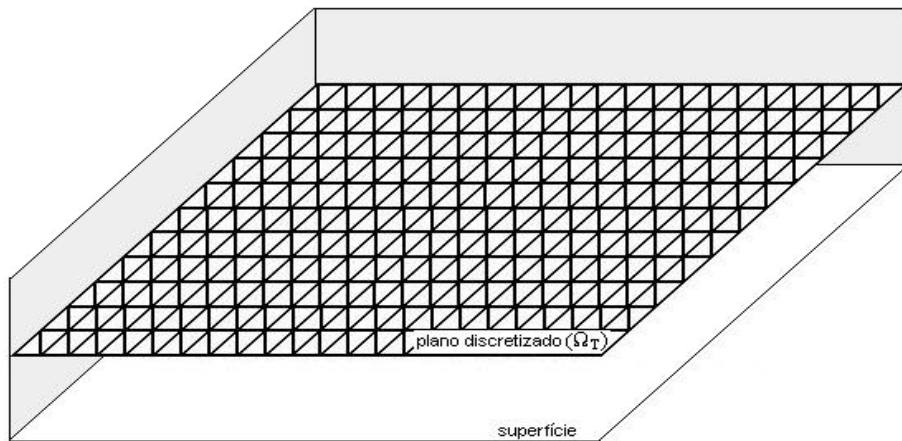


Figura 07: Discretização espacial do plano horizontal por triângulos (Elementos Finitos).

Dessa forma, obtemos sobre cada nó uma função pirâmide conforme (fig. 8) a seguir, que é linear por partes, assumindo o valor UM no j-ésimo nó e ZERO nos demais.

A função definida a partir da definição por partes, em cada triângulo da discretização do domínio, é trabalhada localmente usando a sistemática de enumeração dos vértices para cada triângulo, chamando de $\hat{1}$ o vértice do ângulo reto e enumerando os seguintes no sentido anti-horário; daí definimos localmente as três funções base, ou seja, sobre cada triângulo.

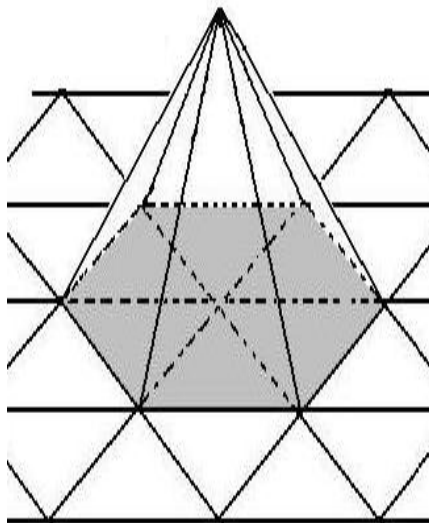


Figura 08: Gráfico 2D da função base $\phi_i(x,y)$.

Para esta discretização serão considerados distintamente os triângulos inferiores T_i e triângulos superiores T_s . Em cada triângulo, teremos as funções base definidas localmente conforme representado na figura abaixo:

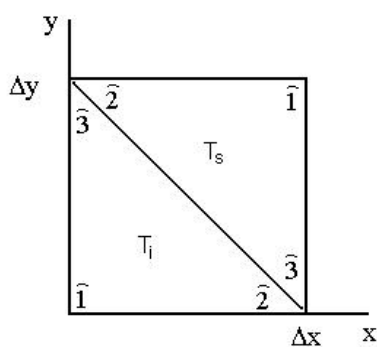


Figura 09: Triângulo superior (T_s) e Triângulo inferior (T_i)

$$\text{Em } T_i \text{ temos: } \begin{cases} \varphi_1(x, y) = 1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \\ \varphi_2(x, y) = \frac{x}{\Delta x} \\ \varphi_3(x, y) = \frac{y}{\Delta y} \end{cases} \quad \text{e em } T_s \text{ temos: } \begin{cases} \varphi_1(x, y) = \frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \\ \varphi_2(x, y) = 1 - \frac{x}{\Delta x} \\ \varphi_3(x, y) = 1 - \frac{y}{\Delta y} \end{cases}$$

Pode ser verificado que, desta forma, as funções base, definidas localmente, $\varphi_i(x, y)$, assumem valor 1 no vértice “ $\hat{1}$ ” e zero nos outros dois, de modo que satisfazem a propriedade imposta para as funções base.

Outra propriedade importante é que está garantida a continuidade das funções na fronteira de cada elemento, portanto, contínua no domínio Ω_T discretizado, o que torna $\varphi_i(x, y)$ de quadrado integrável, condição necessária para a construção das aproximações por elementos finitos.

3.3 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Consiste em obter uma outra formulação da equação

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}[-\alpha \nabla c] + \text{div}[\vec{V}c] + \sigma c = f \quad (3.4)$$

cujas soluções devem ser procuradas num espaço métrico conveniente.

Iremos propor uma solução fraca do problema, ou uma solução no sentido das distribuições, optando por métodos de aproximação de Elementos Finitos via o Método de Galerkin.

Uma justificativa para a solução fraca consiste na possibilidade de poder usar funções que modelem fenômenos descontínuos. A formulação variacional do problema consiste em:

- 1 – considerar as derivadas do modelo clássico no sentido das distribuições;
- 2 – efetuar o produto interno de cada termo da formulação clássica por uma função v , denominada função teste, sendo esta pertencente a um espaço conveniente de (MEYER e DINIZ, 2004),

$$H^1(\Omega) = \left\{ v(x, y) \in \mathcal{L}^2(x, y) : \frac{\partial v}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y} \in \mathcal{L}^2(\Omega) \right\} \quad (3.5)$$

que será denotado por $\mathcal{A}$, sendo:

$$\mathcal{A} = \{c \in H^1(\Omega)\} \quad (3.6)$$

onde $\mathcal{L}^2$ é o espaço das funções de quadrado integrável no sentido de Lebesgue. Em seguida, fazemos a integração no sentido de Lebesgue sobre Ω .

Em $\mathcal{A}$, o produto interno é definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (f | g)_{0,\Omega} &:= \iint_{\Omega} f \cdot g d\mu, \\ (\vec{f} | \vec{g})_{0,\Omega} &:= \iint_{\Omega} (\vec{f}) \cdot (\vec{g}) d\mu, \\ \langle f | g \rangle_{0,\Gamma} &= \int_{\Gamma} f \cdot g d\gamma \end{aligned}$$

Considerando a definição de produto interno e ainda, tomando a fonte genérica com distribuição em boa parte do domínio tomado na horizontal, ou seja, a fonte não é pontual e considerando entrada/saída (por deriva e difusão) assintoticamente estacionária em todas as fronteiras. Além disso, considerando a densidade do ar praticamente constante na faixa horizontal do domínio, permite uma aproximação por uma constante do coeficiente de difusão aérea α na equação (3.4). Desse modo temos:

$$\frac{\partial c}{\partial t} v - \alpha \operatorname{div}(\nabla c) v + \operatorname{div}(\vec{V} c) v + \sigma c v = f v \quad (3.7)$$

Considerando o produto interno definido em $\mathcal{A}$, obtemos:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} \middle| v \right) - \alpha \left(\nabla(\nabla c) \middle| v \right) + \left(\nabla(\vec{V} c) \middle| v \right) + \left(\sigma c \middle| v \right) = \left(f \middle| v \right) \quad (3.8)$$

$$\forall v \in \mathcal{V}, \forall t \in (0, T]$$

Dessa forma, considerando funções e derivadas primeiras de quadrado integráveis, no sentido fraco, e tomando $\vec{V} = \langle V_1, V_2 \rangle$, obtém-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \middle| v \right)_{0;\Omega} - \alpha \left(\nabla(\nabla c) \middle| v \right)_{0;\Omega} + V_1 \left(\frac{\partial c}{\partial x} \middle| v \right)_{0;\Omega} + V_2 \left(\frac{\partial c}{\partial y} \middle| v \right)_{0;\Omega} + \\ + \left(\sigma c \middle| v \right)_{0;\Omega} = \left(f \middle| v \right)_{0;\Omega} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\forall v \in \mathcal{V}, \forall t \in (0, T]$$

Ao fazer uso de uma identidade de Green (IÓRIO JR., 1988) para operadores (cf. LIONS, 1961), aplicando ao termo $-\alpha(\Delta c \| v)_{0;\Omega}$ da equação precedente, obtemos $-\alpha(\Delta c \| v)_{0;\Omega} = \alpha(\nabla c | \nabla v)_{0;\Omega} - \alpha \langle c | v \rangle_\Gamma$, substituindo vem:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \middle| v \right)_{0;\Omega} + \alpha \left(\nabla c \middle| \nabla v \right)_{0;\Omega} + V_1 \left(\frac{\partial c}{\partial x} \middle| v \right)_{0;\Omega} + V_2 \left(\frac{\partial c}{\partial y} \middle| v \right)_{0;\Omega} + \left(\sigma c \middle| v \right)_{0;\Omega} + \\ - \alpha \left\langle \frac{\partial c}{\partial \eta} \middle| v \right\rangle_\Gamma = \left(f \middle| v \right)_{0;\Omega} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\forall v \in \mathcal{V}, \forall t \in (0, T]$$

Considerando, ainda, constante o decaimento global σ e sejam definidas as componentes advectivas: $V_1 = V \cos \theta$ e $V_2 = V \sin \theta$, onde V representa uma primeira aproximação do campo de velocidade para a componente horizontal do vento predominante, tomada aqui como a resultante entre as direções V_1 e V_2 , correspondentes ao eixo x e y , respectivamente. Daí, a equação que buscamos se torna:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \middle| v \right)_{0;\Omega} + \alpha \left(\nabla c \middle| \nabla v \right)_{0;\Omega} + V \cos \theta \left(\frac{\partial c}{\partial x} \middle| v \right)_{0;\Omega} + V \sin \theta \left(\frac{\partial c}{\partial y} \middle| v \right)_{0;\Omega} + \\ + \sigma \left(c \middle| v \right)_{0;\Omega} - \alpha \left\langle \frac{\partial c}{\partial \eta} \middle| v \right\rangle_\Gamma = \left(f \middle| v \right)_{0;\Omega} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\forall v \in \mathcal{V}, \forall t \in (0, T].$$

Por fim, introduzindo a condição de contorno dada (equação 2.3) na página 25, o último termo do lado esquerdo da equação se anula, assim a formulação variacional almejada se torna:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial c}{\partial t} \middle| v \right)_{0;\Omega} + \alpha \left(\nabla c \middle| \nabla v \right)_{0;\Omega} + V \cos \theta \left(\frac{\partial c}{\partial x} \middle| v \right)_{0;\Omega} + V \sin \theta \left(\frac{\partial c}{\partial y} \middle| v \right)_{0;\Omega} + \\ + \sigma \left(c \middle| v \right)_{0;\Omega} = \left(f \middle| v \right)_{0;\Omega} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\forall v \in \mathcal{V}, \forall t \in (0, T].$$

O problema fica assim formulado, com a vantagem de, em (3.12), aparecerem apenas as derivadas de primeira ordem, no sentido de distribuições da solução $c = (x, y, t)$, enquanto que, na formulação clássica, aparecem as derivadas de segunda ordem.

O próximo passo no decurso de proposição, elaboração, fundamentação e construção do modelo matemático é demonstrar a existência e unicidade da solução “fraca”. Conforme argumentação anterior, a modelagem matemática carece deste recurso para que se possa verificar a coerência lógica do argumento.

Porém, a demonstração da existência e unicidade da solução fraca não será aqui apresentada por compreendermos que os procedimentos, adotados em (DINIZ, 2003), (CASTRO, 1993) e (MISTRO, 1992), garantem a existência e unicidade de solução, uma vez que o modelo advecção-difusão aqui proposto recai sobre a tipologia do modelo proposto por estes autores e demonstrado por (DINIZ, 2003).

Na próxima seção, obteremos a discretização espacial e temporal do problema. Para orientar o desenvolvimento algébrico que adotaremos ali, apresentamos, a seguir, o enunciado do referido teorema da existência e unicidade de solução, transcrito mais abaixo e algumas escolhas e notações necessárias, procedendo conforme em (DINIZ, 2003).

3.4 EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO

Para estabelecer a existência e unicidade da solução de (3.12), deve ser utilizado o Teorema de Lions (LIONS, 1961, Teorema 1.1 – Cap. IV, pág 46). Deverá ser provado que o problema (3.12), apresentado na sua formulação variacional satisfaz as hipóteses do citado teorema. Para uma verificação da Existência e Unicidade de Solução, recomendamos a consulta ao trabalho de DINIZ (2003-Cap II, págs. 34-39).

Primeiramente, agrupando os termos de (3.12) na forma abaixo e adotando a notação usada no citado teorema (LIONS, 1961) tem-se:

$$\hat{\mathbf{A}}(t; \bullet) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{A}_{ij}(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{A}_i(x, t) + \mathbf{A}_0 \quad (3.13)$$

O que em (3.12), mediante as escolhas indicadas mais abaixo fornece:

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} | v \right)_{0;\Omega} + \left(\hat{\mathbf{A}}(t; c) | v \right)_{0;\Omega} = \left(f | v \right)_{0;\Omega} + \left(c_0 | v \right)_{0;\Omega} \delta_0(t) \quad (3.14)$$

$$\forall v \in \mathcal{V}, \forall t \in (0, T]$$

ou numa notação mais compacta

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t}, v \right) + \mathbf{A}(t, c, v) = L_f(v) \quad (3.15)$$

onde:

$$\mathbf{A}(t, c, v) = \iint_{\Omega} \hat{\mathbf{A}}(t; c) v d\mu$$

e

$$L_f(v) = \iint_{\Omega} f v d\mu + \left(\iint_{\Omega} c_0 v d\mu \right) \delta_0(t)$$

dadas as escolhas em (3.15) de

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{cases} V \cos \theta & \text{se } i = 1 \\ V \sin \theta & \text{se } i = 2 \end{cases}$$

$$\mathbf{A}_0 = \sigma$$

O operador $\delta_0(t)$ é o operador de Dirac que fixa a condição inicial.

Teorema (Lions). Dado o conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, considere os espaços $H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$ e $\mathcal{V}_1$ tais que: $H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{V}_1 \subset H^1(\Omega)$ para $w = w(\mathbf{x}, t)$ e $v = v(\mathbf{x}, t)$ seja o operador A dado por:

$$A(t; w, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial w}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial w}{\partial x_j} v dx + \int_{\Omega} a_0(\mathbf{x}, t) w v dx$$

Se

i) a_{ij}, a_i e $a_0 \in \mathcal{L}^2(\Omega \times (0, T))$

ii) $\forall w, v \in \mathcal{V}_1$, a função: $\Lambda : t \mapsto A(t; w, v)$ é mensurável;

iii) $\exists \lambda \in \mathcal{L}$ tal que: $|A(t; w, w)|^2 + \lambda \|w\|_{\mathbb{L}^2}^2 \geq \delta \|w\|_{H^1(\Omega)}^2$, $\delta > 0$, $w \in \mathcal{V}_1$, quase todo

ponto;

iv) $|A(t; w, v)| \leq M \|w\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$;

v) $L_f(v) = \int_{\Omega} f v dx + \left(\int_{\Omega} w_0 v dx \right) \delta_0(t)$ é contínuo;

vi) $f \in \mathcal{L}((-\infty, T); \mathcal{L}^2(\Omega))$ e $w_0(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$

então existe uma função $w \in \mathcal{L}((-\infty, T); \mathcal{L}^2(\Omega))$ e $\{w: (-\infty, 0) \rightarrow 0\}$ que é solução do problema variacional (3.12).

3.5 DISCRETIZAÇÃO DO PROBLEMA

Será apresentada a discretização do modelo, para a formulação obtida na equação (3.12), através do Método de Elementos Finitos (discretização espacial) e Crank-Nicolson (discretização temporal).

Para obter a discretização espacial via MEF, deve-se trabalhar com a formulação variacional do problema dada pela equação (3.12).

Denominando de $\mathcal{V}_h$ o subespaço de $\mathcal{V}_l$ gerado pelas N_h funções φ_i (SIMMONS, 1963) (chamadas funções teste). Assim, $\forall v_h \in \mathcal{V}_h$, é da forma:

$$v_h = \sum_{j=1}^{N_h} v_j(t) \varphi_j(x, y) \quad (3.16)$$

Considerando o subespaço $\mathcal{V}_h \in \mathcal{V}_l$, a equação (3.12) pode ser reescrita na forma do seguinte sistema de EDO's:

$$\left(\hat{A}(t, c_h) | v_h \right)_{0;\Omega} + \left(\frac{\partial c_h}{\partial t} | v_h \right)_{0;\Omega} = (f | v_h)_{0;\Omega}, \quad (3.17)$$

$$\forall v \in \mathcal{V}, \forall t \in (0, T]$$

O que mediante as escolhas de $\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{A}_i, \mathbf{A}_0$ e a notação de produto interno indicados anteriormente nos fornece o seguinte sistema de EDO's discretizado:

$$\left\{ \sum_{j=1}^{N_h} \frac{dc_j(t)}{dt} + \sigma \sum_{j=1}^{N_h} c_j(t) \right\} \left(\varphi_j | \varphi_i \right)_{0;\Omega} + \sum_{j=1}^{N_h} c_j(t) \left\{ \alpha \left(\nabla \varphi_j | \nabla \varphi_i \right)_{0;\Omega} + V \cos \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} | \varphi_i \right)_{0;\Omega} + V \sin \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} | \varphi_i \right)_{0;\Omega} \right\} = (f | \varphi_i)_{0;\Omega} \quad (3.18)$$

$$\forall \varphi_i \text{ da base de } \mathcal{V}_h, \forall t \in (0, T]$$

Conforme segue, a discretização da variável temporal será obtida pelo método Crank-Nicolson, com diferenças centradas em $t_n + \frac{\Delta t}{2}$, fazendo as seguintes aproximações:

$$\frac{dx_j}{dt}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}\right) \cong \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t} \quad \text{onde} \quad c_j^{n+1} = c_j(t_{n+1}) \quad (3.19)$$

e

$$c_j(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \cong \frac{c_j^{n+1} + c_j^n}{2}. \quad (3.20)$$

Daí levando (3.20) e (3.21) em (3.19) obtém-se o sistema linear:

$$\mathbf{A}\mathbf{c}^{(n+1)} = \mathbf{B}\mathbf{c}^{(n)} + \mathbf{d}^{(n+\frac{1}{2})} \quad \text{dado } \mathbf{c}^{(0)}, \quad (3.21)$$

onde:

$$a_{ij} = \left\{1 + \frac{\Delta t}{2}\sigma\right\} \left(\varphi_j \middle| \varphi_i\right)_{0;\Omega} + \frac{\Delta t}{2}\alpha \left(\nabla \varphi_j \middle| \nabla \varphi_i\right)_{0;\Omega} + \frac{\Delta t}{2}V \cos \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \middle| \varphi_i\right)_{0;\Omega} + \frac{\Delta t}{2}V \sin \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \middle| \varphi_i\right)_{0;\Omega}$$

$$b_{ij} = \left\{1 - \frac{\Delta t}{2}\sigma\right\} \left(\varphi_j \middle| \varphi_i\right)_{0;\Omega} - \frac{\Delta t}{2}\alpha \left(\nabla \varphi_j \middle| \nabla \varphi_i\right)_{0;\Omega} - \frac{\Delta t}{2}V \cos \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \middle| \varphi_i\right)_{0;\Omega} - \frac{\Delta t}{2}V \sin \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \middle| \varphi_i\right)_{0;\Omega}$$

$$d_i^{n+\frac{1}{2}} = \Delta t \left(f(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \middle| \varphi_i\right)_{0;\Omega}$$

$$\left(c^{(0)} \middle| \varphi_i\right) = \sum_{j=1}^{N_h} c_j^{(0)} \left(\varphi_j \middle| \varphi_i\right) \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_h.$$

A matriz $\mathbf{A}$ é chamada de matriz de rigidez e o vetor resultante das operações $\mathbf{B}\mathbf{c}^{(n)} + \mathbf{d}^{(n+\frac{1}{2})}$, para cada instante $t_n + \frac{\Delta t}{2}$, é denominado vetor carga.

A ordem das aproximações temporais é localmente $O(\Delta t^2)$.

3.6 TÉCNICA STREAMLINE ‘UPWIND’ PETROV-GALERKIN (SUPG)

A aproximação numérica para a solução de equações de transporte, como a apresentada, pode trazer sérias dificuldades quando o termo advectivo/convectivo é preponderante na equação.

Isso pode ser observado por uma comparação entre os parâmetros α e V (caso constantes), se V for bem maior que α , certamente aparecerão oscilações numéricas na aproximação para os casos em que o tamanho da malha usada excede um certo valor crítico (HEINRICH *et al.*, 1977).

Ao adotarmos o MEF, para obtermos uma solução aproximada, com elementos lineares através de uma malha uniforme, com intervalos (Δx e Δy) relativamente grandes, tais oscilações indesejáveis aparecem.

A razão principal destes problemas é que, a matriz associada ao termo advectivo/convectivo é não simétrica, podendo gerar sistemas mal condicionados (MOREIRA e WROBEL, 1983). Uma maneira de suprimir as oscilações é usando malhas bastante refinadas, de tal forma que a convecção/advecção perca a sua preponderância ao nível de elemento. Esta estratégia tem um custo operacional alto, já que, para uma malha muito refinada, a ordem do sistema obtido deverá ser bem maior, o que torna o sistema mais pesado do ponto de vista computacional.

Um critério, onde se possa verificar a possibilidade do aparecimento dessas oscilações, denominada condição de “Peclet”, é dado por:

$$Pe = \frac{V_i \Delta x_i}{\alpha} \leq 2$$

O valor Pe , denominado número de Peclet, fornece uma condição sobre a discretização do domínio de modo a reprimir as oscilações numéricas inerentes ao método utilizado.

No uso da técnica streamline ‘upwind’ Petrov-Galerkin (SUPG), ou resumidamente, ‘upwind’ a idéia é aproximar as derivadas convectivas/advectivas com um esquema do tipo diferenças regressivas, só que, com isso, perde-se em precisão, já que para diferenças centrais a precisão é de segunda ordem, enquanto para diferenças regressivas tem-se precisão de primeira ordem (DINIZ, 1994).

3.6.1 O Método SUPG

O método SUPG consiste na troca da função teste $\varphi_i(x, y)$ por outra função $\psi_i(x, y)$ com certo peso, tendo em vista que a escolha de tais funções teste pode ser arbitrária. Isto significa que as funções teste pertencem a um espaço diferente do espaço de funções geradoras $\mathcal{V}_h$ onde a solução discreta c_h é obtida.

O método é chamado de Método de Petrov-Galerkin e leva a uma abordagem aerodinâmica. Diversos autores (CHRISTIE *et al.*, 1976; HEINNICH *et al.*, 1977; BROOKS e HUGES, 1982, HUGHES e MIZUKAMI, 1985) sugerem a seguinte forma para a função teste no caso unidimensional.

$$\psi_i(x) = \varphi_i(x) + \delta F(x)$$

Onde δ é um peso, e $F(x)$ é uma função positiva, sendo nula em cada nó, satisfazendo a seguinte condição em cada elemento (MISTRO, 1992), no caso de malha uniforme.

$$\int_0^{\Delta x} F(x) dx = \frac{\Delta x}{2}$$

Uma ilustração do problema unidimensional em que o fluxo V é constante no sentido positivo de x (b) e no negativo (c) é dado na figura 10 a seguir.

A forma usual de introduzirmos a curvatura na função teste linear é escolher a função $F(x)$, quadrática, que se anula nos pontos nodais e, tomando o peso δ ,

positivo à esquerda do i -ésimo nó quando a velocidade estiver no sentido crescente do eixo x (ver figura 11).

Na abordagem deste trabalho, temos componentes tanto na direção x , quanto y , logo devemos construir as funções teste observando o sentido do fluxo, de modo a acrescentar a função quadrática antes do nó e subtraí-la após o nó, fazendo assim com que ela fique encurvada como se estivesse acompanhando o movimento do fluxo, daí o nome ‘upwind’.

O fluxo advectivo é caracterizado a seguir. Conforme ilustrado na figura 10 a seguir, vamos assumir a direção positiva do eixo x como direção leste e a direção positiva do eixo y como direção norte, atendendo a direção real do domínio. Vamos denominar de situação-1 aquela em que a direção (θ) dos fluxos for no sentido positivo dos eixos x e y , aí teremos $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$;

A construção das novas funções teste deverá observar estas variações com as devidas condições de contorno descritas mais adiante. A função peso será definida com o valor ótimo para δ :

$$\delta = \max \left\{ 0; 1 - \frac{2\alpha}{V\Delta x} \right\}$$

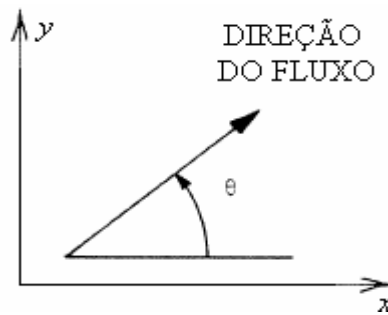


Figura 10: Definição e caracterização do sentido do fluxo aéreo sobre o domínio discretizado (Ω).

Conforme sugerem HEINNICH (1977) e CAREY e ODEN (1983), onde α é o coeficiente de difusão, V a componente da velocidade (do termo advectivo) e Δx

o tamanho de cada subintervalo (no caso da malha uniforme), tal que, caso seja satisfeita a condição de Peclet, o valor de δ será zero.

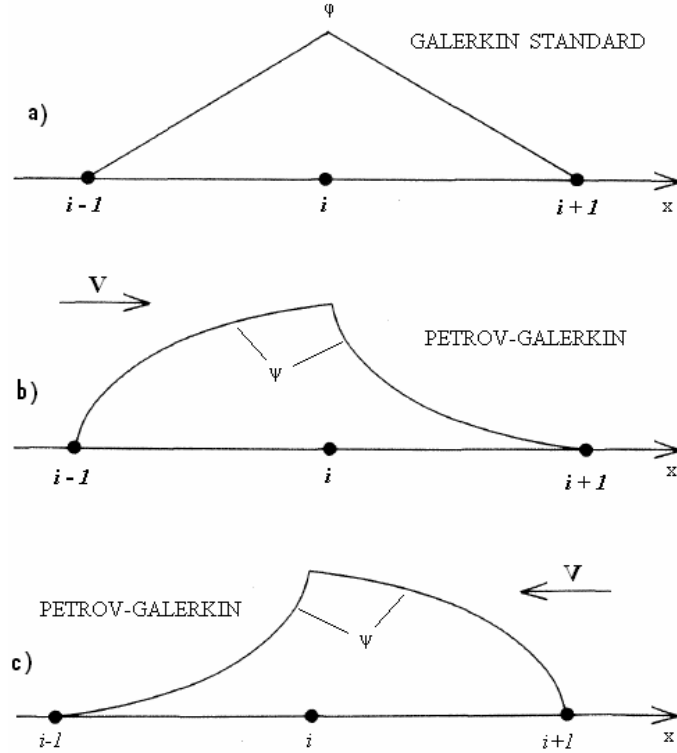


Figura 11: Representação para o caso linear das funções teste, em (a) Galerkin Standard e em (b) e (c) função de peso ‘upwind’ Petrov-Galerkin com indicação do sentido do fluxo advectivo.

3.6.2 Construção das funções teste ‘upwind’ bidimensionais para elementos triangulares

Para esta nova discretização, vamos considerar o efeito do termo advectivo de (3.4), tanto na direção x , quanto na direção y . A construção das funções teste deverá considerar a direção do fluxo, conforme ilustrado anteriormente na figura 11.

Na formulação variacional do problema, as funções base lineares serão as mesmas, $\{\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots, \varphi_N(x, y)\}$, consideradas no caso linear e tomaremos como funções teste $\psi(x, y)$, aqui, da forma apresentada por DINIZ (1994), baseada

na formulação sugerida por HEINNICH *et al.* (1977) adaptada ao caso bidimensional.

$$\psi_i(x, y) = \varphi_i(x, y) + \delta F(x, y)$$

Onde δ é um peso que será obtido de acordo com os parâmetros provenientes da “condição de Peclet”, da forma seguida por CAREY e ODEM (1983), onde $F(x, y)$ é uma função positiva que se anula em cada nó e satisfaz a seguinte condição, como em MISTRO (1992), sobre cada elemento:

$$\iint_{\Omega_i} F(x, y) ds = \iint_{\Omega_i} \varphi(x, y) ds = \frac{\Delta x \Delta y}{6}$$

no caso de uma malha uniforme, com Ω_i sendo o i -ésimo elemento triangular da discretização.

Em face do método adotado, vamos trabalhar sobre cada triângulo definindo localmente as funções teste, de forma a diferenciar apenas para triângulos superiores e inferiores, como em CHONG (2005), conforme ilustrado na figura 12 a seguir.

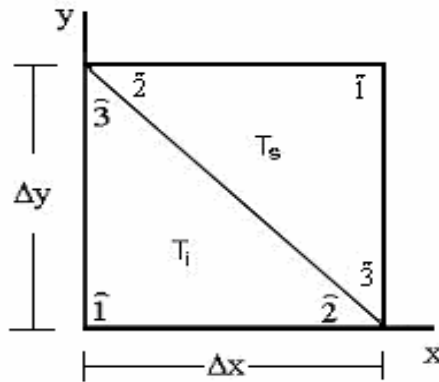


Figura 12: Enumeração dos vértices no triângulo inferior (T_i) e triângulo superior (T_s) para construção local das novas funções teste.

$$\text{Em } T_i \text{ temos: } \begin{cases} \psi_1(x, y) = \varphi_1(x, y) + F_1(x, y) \\ \psi_2(x, y) = \varphi_2(x, y) + F_2(x, y) \\ \psi_3(x, y) = \varphi_3(x, y) + F_3(x, y) \end{cases}$$

$$\text{Em } T_s \text{ temos: } \begin{cases} \psi_1(x, y) = \varphi_1(x, y) + F_1(x, y) \\ \psi_2(x, y) = \varphi_2(x, y) + F_2(x, y) \\ \psi_3(x, y) = \varphi_3(x, y) + F_3(x, y) \end{cases}$$

3.6.2.1 Funções teste ‘upwind’

As novas funções teste deverão ser construídas de modo a atender ao sentido do fluxo advectivo. Uma situação se caracteriza pelo regime de ventos que atuam na direção SO $\square$ NE, ou seja, no sentido positivo e crescente do primeiro quadrante.

Para esta situação, escolheremos as funções teste, localmente, tornando $F(x, y)$ quadrática, atribuindo os devidos sinais de forma a assumir δ_x e δ_y como constantes positivas para que as funções quadráticas sejam somadas ou subtraídas para obtenção da curvatura desejada.

Para os triângulos inferiores (T_i) (fig. 12), escolhemos:

$$\varphi_1(x, y) = 1 - \frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} \quad (3.22)$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{x}{\Delta x} \quad (3.23)$$

$$\varphi_3(x, y) = \frac{y}{\Delta y} \quad (3.24)$$

$$F_1(x, y) = -\frac{4\delta_x x}{\Delta x} \left[1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right] - \frac{4\delta_y y}{\Delta y} \left[1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right] \quad (3.25)$$

$$F_2(x, y) = \frac{4\delta_x x}{\Delta x} \left[1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right] \quad (3.26)$$

$$F_3(x, y) = \frac{4\delta_y y}{\Delta y} \left[1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right] \quad (3.27)$$

$$\text{onde } \delta_x = \max \left\{ 0; 1 - \frac{2\alpha}{V_1 \Delta x} \right\} \text{ e } \delta_y = \max \left\{ 0; 1 - \frac{2\alpha}{V_2 \Delta y} \right\}$$

Para os triângulos superiores (T_s) (fig. 13), temos:

$$\varphi_1(x, y) = \frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1 \quad (3.28)$$

$$\varphi_2(x, y) = 1 - \frac{x}{\Delta x} \quad (3.29)$$

$$\varphi_3(x, y) = 1 - \frac{y}{\Delta y} \quad (3.30)$$

$$F_1(x, y) = -4\delta_x \left[1 - \frac{x}{\Delta x} \right] \left[1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right] - 4\delta_y \left[1 - \frac{y}{\Delta y} \right] \left[1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right] \quad (3.31)$$

$$F_2(x, y) = 4\delta_x \left[1 - \frac{x}{\Delta x} \right] \left[1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right] \quad (3.32)$$

$$F_3(x, y) = 4\delta_y \left[1 - \frac{y}{\Delta y} \right] \left[1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y} \right] \quad (3.33)$$

onde δ_x e δ_y são tomados como no caso anterior.

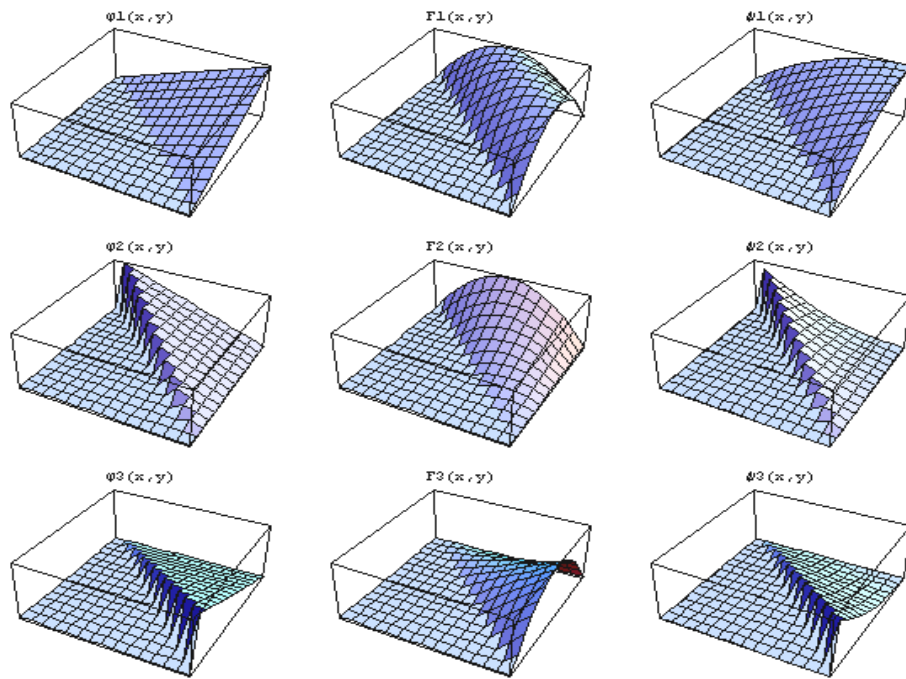


Figura 13: Gráficos das funções base $\varphi_i(x, y)$, peso $F_i(x, y)$ e teste $\psi_i(x, y)$ para triângulos superiores

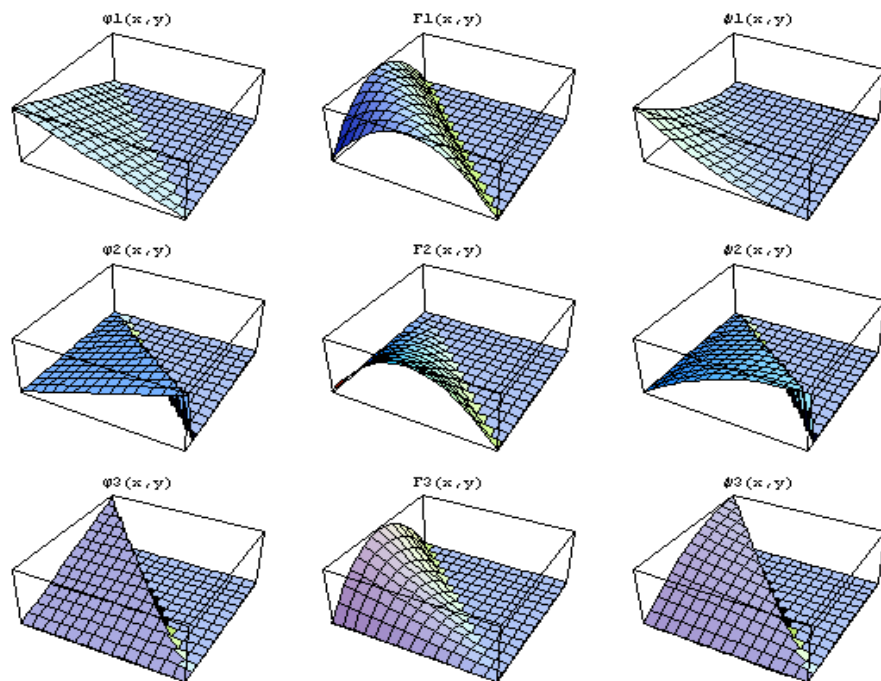


Figura 14: Gráficos das funções base $\varphi_i(x, y)$, peso $F_i(x, y)$ e teste $\psi_i(x, y)$ para triângulos inferiores

Ficam assim definidas, localmente, as novas funções teste que serão “emendadas” de forma a estabelecer globalmente as novas funções teste

$$\{\psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \psi_3(x, y), \dots, \psi_N(x, y)\}$$

as quais deverão ser contínuas no domínio discretizado.

Para verificar a continuidade destas funções $\psi_i(x, y)$, é suficiente verificarmos para uma $\psi_j(x, y)$ definida sobre um j -ésimo nó central, conforme figura 15 a seguir. Iremos considerar, sem perda alguma de generalidade, $\hat{x} = x - x_j$ e $\hat{y} = y - y_j$, isto é, todas as operações serão num triângulo dito de referência.

A continuidade de $\psi_j(x, y)$ deve ser verificada nas fronteiras dos triângulos destacados da figura 15. Para comprovarmos as emendas basta notarmos as seguintes igualdades entre as funções em cada fronteira:

- na fronteira T_1T_2 , entre $\psi_{\hat{1}}(x, y)$ (definida sobre T_1 , com $x = \Delta x$ y percorrendo intervalo $[0, \Delta y]$) e $\psi_{\hat{3}}(x, y)$ (definida sobre T_2 com $x = 0$ e y percorrendo intervalo $[0, \Delta y]$).

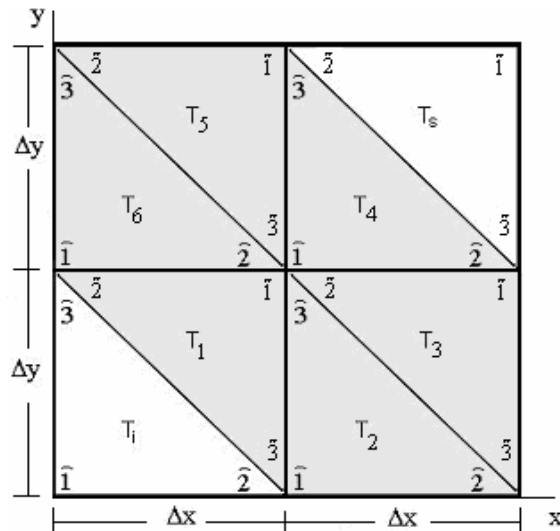


Figura 15: Representação da emenda dos triângulos pelo j -ésimo nó comum do hexágono sobre o qual se verifica a continuidade das novas funções teste $\psi_j(x, y)$

- na fronteira T_2T_3 , entre $\psi_3(x, y)$ (definida sobre T_2 com $y = \Delta y(1 - x/\Delta x)$ e x percorrendo intervalo $[0, \Delta x]$) e $\psi_2(x, y)$ (definida sobre T_3 com $y = \Delta y(1 - x/\Delta x)$ e x percorrendo intervalo $[0, \Delta x]$).
- na fronteira T_3T_4 , entre $\psi_2(x, y)$ (definida sobre T_3 com $y = \Delta y$ e x percorrendo intervalo $[0, \Delta x]$) e $\psi_1(x, y)$ (definida sobre T_4 com $y = 0$ e x percorrendo intervalo $[0, \Delta x]$).
- na fronteira T_4T_5 , entre $\psi_1(x, y)$ (definida sobre T_4 com y percorrendo intervalo $[0, \Delta y]$ e $x = 0$) e $\psi_3(x, y)$ (definida sobre T_5 com $x = \Delta x$ e y percorrendo intervalo $[0, \Delta y]$).
- na fronteira T_5T_6 entre $\psi_3(x, y)$ (definida sobre T_5 com x percorrendo intervalo $[0, \Delta x]$ e $y = \Delta y(1 - x/\Delta x)$ e $\psi_2(x, y)$ (definida sobre T_6 com x percorrendo o intervalo $[0, \Delta x]$ e $y = \Delta y(1 - x/\Delta x)$).
- na fronteira T_6T_1 entre $\psi_2(x, y)$ (definida sobre T_6 com x percorrendo intervalo $[0, \Delta x]$ e $y = 0$) e $\psi_1(x, y)$ (definida sobre T_1 com x percorrendo intervalo $[0, \Delta x]$ e $y = \Delta y(1 - x/\Delta x)$).
- nas fronteiras T_1T_i T_4T_s e as funções ψ_1, ψ_i são definidas identicamente nulas nestas diagonais, o que conclui a verificação da continuidade das funções $\{\psi_1(x, y), \psi_2(x, y), \psi_3(x, y), \dots, \psi_N(x, y)\} \quad \forall (x) \in [0, \Delta x], \forall (y) \in [0, \Delta y]$ sobre o domínio discretizado.

3.7 NOVA DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL E TEMPORAL

Uma nova discretização se torna necessária pela introdução de ‘upwind’. Esta introdução não requer que se introduzam modificações no domínio, de modo que não

se alteram as condições de contorno estabelecidas em 2.3. Para a nova formulação variacional discretizada denotando

$$c(x, y, t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) \varphi_i(x, y)$$

e substituindo v_h pelas novas funções teste, $\mathcal{V}_h \in \mathcal{V}$, como na formulação variacional dada no título 3.6, podemos reescrever a equação 3.18 na forma

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} \frac{dc_j(t)}{dt} + \sigma \sum_{j=1}^{N_h} c_j(t) \right\} \left(\varphi_j \mid \psi_i \right)_{0;\Omega} + \sum_{j=1}^{N_h} c_j(t) \left\{ \alpha \left(\nabla \varphi_j \mid \nabla \psi_i \right)_{0;\Omega} \right. \\ & \quad \left. + V \cos \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \mid \psi_i \right)_{0;\Omega} + V \sin \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \mid \psi_i \right)_{0;\Omega} \right\} = \left(f \mid \psi_i \right)_{0;\Omega} \end{aligned} \quad (3.34)$$

$\forall \psi_i$ da base de $\mathcal{V}_h$ e $\forall t \in (0, T]$

Para simplificar a notação, usaremos a mesma notação do produto interno, a saber

$$(f \mid g)_{0;\Omega} := \iint_{\Omega} f \cdot g d\mu;$$

$$(\vec{f} \parallel \vec{g})_{0;\Omega} := \iint_{\Omega} (\vec{f}) \cdot (\vec{g}) d\mu;$$

$$\langle f \mid g \rangle_{0;\Gamma} = \int_{\Gamma} f \cdot g d\gamma$$

A discretização da variável temporal, de modo a transformar o sistema de equações diferenciais ordinárias (3.34) – via Crank-Nicolson – num sistema de algébrico implicitamente definido, fazendo

$$\frac{dc_j}{dt} \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) = \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t}, \quad \text{onde} \quad c_j^{n+1} = c_j(t_{n+1}) \quad (3.35)$$

$$c_j \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \cong \frac{c_j^{n+1} + c_j^n}{2} \quad (3.36)$$

obtemos, assim, de (3.35) e (3.36) em (3.34) o sistema linear

$$\mathbf{A} \mathbf{c}^{(n+1)} = \mathbf{B} \mathbf{c}^{(n)} + \mathbf{d}^{(n+\frac{1}{2})} \quad \text{dado} \quad \mathbf{c}^{(0)} \quad (3.37)$$

onde:

$$a_{ij} = \left\{1 + \frac{\Delta t}{2} \sigma\right\} \left(\varphi_j \middle| \psi_i\right)_{0;\Omega} + \frac{\Delta t}{2} \alpha \left(\nabla \varphi_j \middle| \nabla \psi_i\right)_{0;\Omega} + \frac{\Delta t}{2} V \cos \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \middle| \psi_i\right)_{0;\Omega} + \frac{\Delta t}{2} V \sin \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \middle| \psi_i\right)_{0;\Omega}$$

$$b_{ij} = \left\{1 - \frac{\Delta t}{2} \sigma\right\} \left(\varphi_j \middle| \psi_i\right)_{0;\Omega} - \frac{\Delta t}{2} \alpha \left(\nabla \varphi_j \middle| \nabla \psi_i\right)_{0;\Omega} - \frac{\Delta t}{2} V \cos \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \middle| \psi_i\right)_{0;\Omega} - \frac{\Delta t}{2} V \sin \theta \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \middle| \psi_i\right)_{0;\Omega}$$

$$d_i^{n+\frac{1}{2}} = \Delta t \left(f(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \middle| \psi_i \right)_{0;\Omega}$$

$$\left(c^{(0)} \middle| \psi_i\right) = \sum_{j=1}^{N_h} c_j^{(0)} \left(\varphi_j \middle| \psi_i\right), \quad \text{a concentração inicial de vapor d'água.}$$

No próximo capítulo, serão apresentados alguns resultados numéricos, obtidos tanto pelo método Galerkin Standard, quanto pela técnica de ‘upwind’, com alguns comentários dos resultados.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E ANÁLISES

Neste capítulo, são apresentados alguns resultados numéricos para simulações obtidas a partir do modelo matemático proposto no estudo da dispersão de vapor d'água atmosférico na região próxima da UHE de Manso.

Os parâmetros utilizados foram estimados dentro de espectros plausíveis para o modelo matemático em discussão na simulação de cenários e teste dos códigos numéricos desenvolvidos.

Os códigos foram desenvolvidos para utilização em ambiente MATLAB[®], cuja facilidade de interface gráfica permite a obtenção de animações que descrevem o processo evolutivo da dispersão no domínio discretizado, num determinado intervalo de tempo, previamente determinado. As integrais das matrizes envolvidas foram calculadas com o auxílio do software Mathematica[®].

A discretização do domínio foi obtida a partir de uma malha de triângulos sobre a imagem aérea da represa (ver fig. 2, pg. 15). Após estabelecido o número de nós nas direções x e y , foi gerado o arquivo de coordenadas dos nós $N_j^{(i)} = (x_j^{(i)}, y_j^{(i)}, k)$, onde $j = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e $k = 1$ se o nó se encontra sobre o lago e $k = 0$, caso contrário. Este procedimento proporcionou a obtenção dos 'mapas' representativos do lago (figuras 16 e 19) e entorno, sobre os quais desenvolvemos as simulações da dispersão do vapor d'água.

4.1 RESULTADOS NUMÉRICOS: TÉCNICA GALERKIN STANDARD

A simulação do ensaio 1 apresentado nos gráficos da figura 17, a seguir, foi desenvolvida sobre o mapa obtido a partir da discretização do domínio por uma malha de 14.729 triângulos (fig. 16). A simulação foi desenvolvida em um PC – Pentium IV, 1 GB de RAM. O tempo para geração do ensaio foi de 6,54 minutos para 6.000 passos no tempo para um tempo real de animação de 2 horas e gerado pelos parâmetros listados a seguir e os respectivos resultados apresentados nos gráficos.

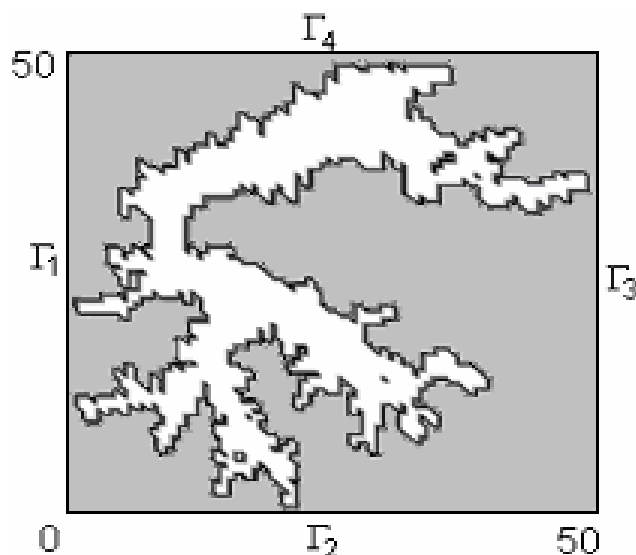


Figura 16: Mapa digital obtido com a discretização espacial do domínio (Ω) delimitado pelas fronteiras (Γ_k) por uma malha de 14.729 triângulos. A parte mais clara representa a região da represa e a cor cinza, a área circundante. Suprimimos a malha da discretização para não prejudicar a visualização

Tabela 1: Parâmetros utilizados na simulação do ensaio 1 – Galerkin Standard

Parâmetros do modelo	Valores	Unidades
α	0,025	m^2/h
σ	$1 \cdot 10^{-4}$	h^{-1}
θ	$\pi/4$	radianos
V	0,09	Km/h
Parâmetros da discretização	Valores	Unidades
Δx	0,5814	Km
Δy	0,5814	Km
Δt	$2,5 \cdot 10^{-4}$	h

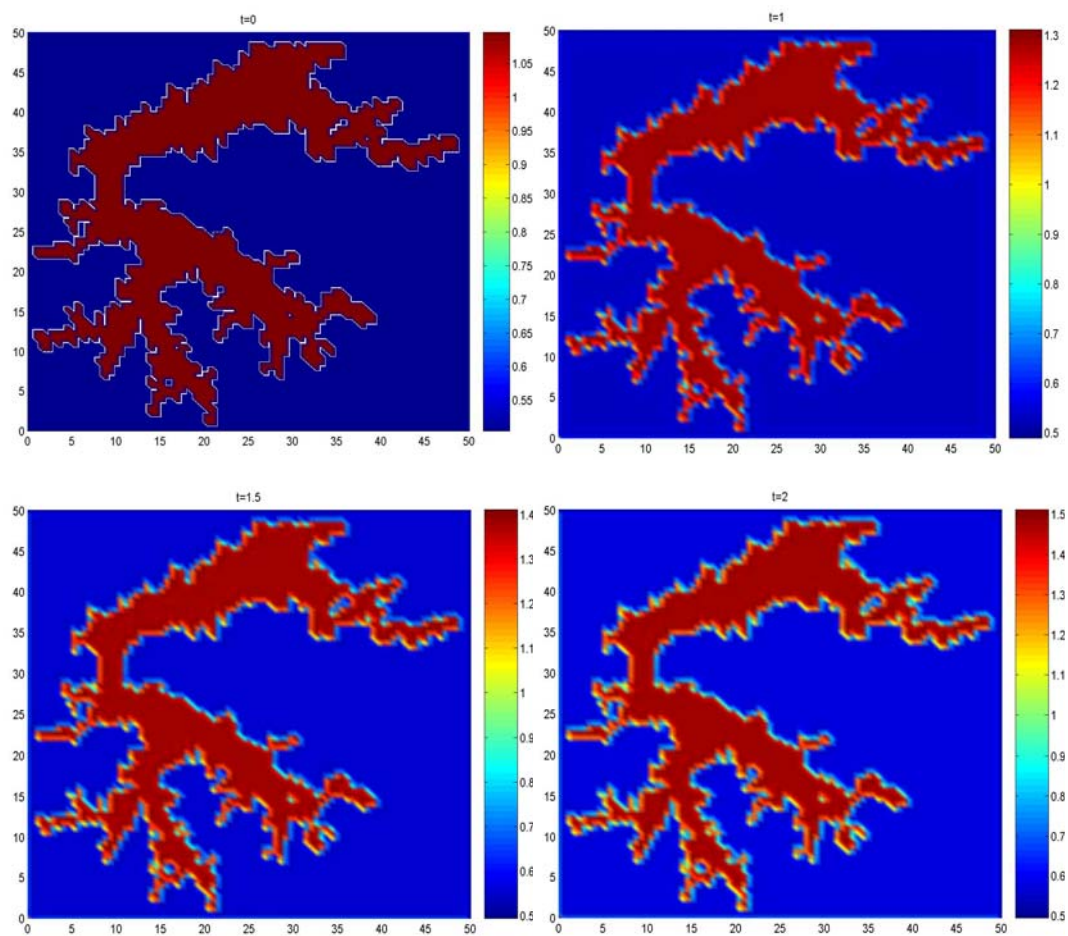


Figura 17: Distribuição espacial da concentração de vapor d'água para $t = 0$, $t = 1$, $t = 1.5$, $t = 2$ horas, N° Peclet = 1,48.

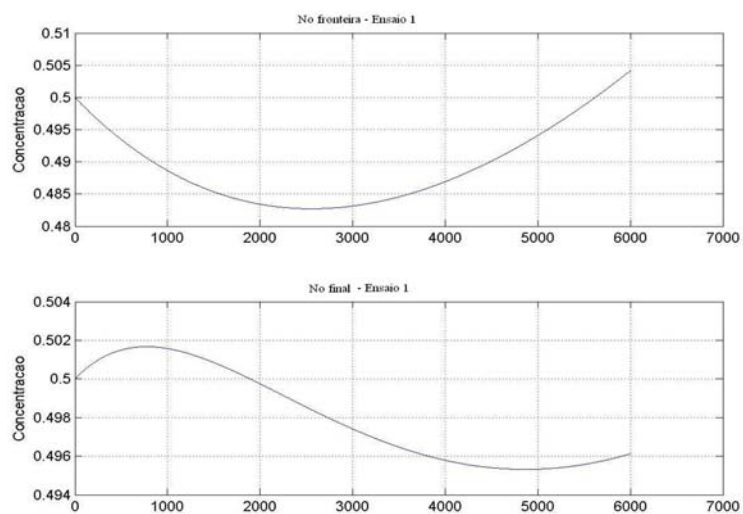


Figura 18: Variação temporal da concentração sobre os pontos nodais (nó médio e nó na fronteira (Γ_1) de Ω) para o ensaio 1.

A simulação obtida pela técnica Galerkin Standard, apresentada no gráfico da figura 17, mostram cenários compatíveis com o esperado. Nestas simulações, em face das características e limitações da técnica, o efeito do termo difusivo é predominante.

Os gráficos mostram um espalhamento lento a partir da linha da margem. É possível observar a variação da concentração – transição entre as cores, em todas as direções a partir do lago, onde a concentração foi imposta alta (condição inicial do problema).

Nesta simulação, a malha é grosseira, o que, pelas características inerentes ao método, diminui a estabilidade numérica dos resultados. A dispersão é lenta e, apesar da discretização da malha, não foi possível assegurar a estabilidade numérica com advecção predominante.

A direção do fluxo corresponde a ventos sudoeste. O efeito do termo advectivo é insignificante, apesar de se notar um lento deslocamento da massa de vapor d'água e aumento da concentração naquela direção. Este fato é devido à combinação dos termos da difusão e advecção, o que resultou em um certo equilíbrio entre estes termos (Número de Peclet 1,48), acarretando, conseqüentemente, um lento processo de dispersão no domínio.

O resultado alcançado é um reflexo da limitação do modelo que, baseado na técnica Galerkin Standard, não permite que se adote o termo advectivo predominante, ou seja, advecção forte causa instabilidade numérica e dados espúrios indesejáveis, inevitavelmente, aparecem.

Na verificação da variação da concentração sobre os pontos nodais (nó médio e nó na fronteira), verificamos um comportamento distinto nos dois gráficos apresentados na figura 18. As curvas que descrevem a concentração nestes pontos são suaves, tendendo à estabilidade após 2 horas, para o nó final, se considerarmos a escala em que a concentração é expressa.

Entretanto, as simulações apresentadas, mesmo que, para uma construção puramente acadêmica, podem trazer embasamento teórico para estudos de campo e, a partir destes, validar o modelo para esta primeira abordagem, ou, se for o caso, refutá-lo.

4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS: TÉCNICA STREAMLINE UPWIND PETROV – GALERKIN (SUPG)

A seguir, são apresentados os gráficos dos resultados numéricos obtidos com a técnica de ‘upwind’. Vamos denominar estes resultados de simulação 2, com quatro repetições intituladas de ensaio 1, ensaio 2, ensaio 3 e ensaio 4, gerados com os parâmetros constantes na tabela 2. Estes ensaios foram simulados sobre o mapa da figura 19, obtido com uma malha de 29.929 nós e 59.168 triângulos.

A simulação foi desenvolvida em um PC – Pentium IV, 1 GB de RAM. O tempo para geração de cada ensaio foi de 19,34 minutos para 2.400 passos no tempo, para um tempo real de animação de 15 horas. São apresentados os gráficos para: ‘ $t = 0$ ’, ‘ $t = 5$ ’, ‘ $t = 10$ ’ e ‘ $t = 15$ ’, além de dois pontos nodais, em cada ensaio com os respectivos resultados numéricos para análise. A barra de cores, disposta à direita dos gráficos, indica a concentração de vapor d’água, onde a cor azul indica concentração baixa e a cor vermelha, concentração alta em cada ponto do domínio discretizado.

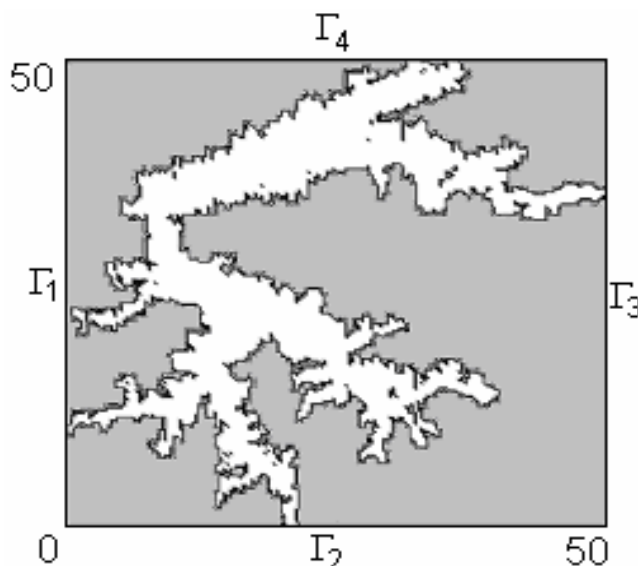


Figura 19: Mapa digital obtido com a discretização espacial do domínio (Ω) delimitado pelas fronteiras (Γ_k) por uma malha de 59.168 triângulos. A parte mais clara representa a região da represa e a cor cinza, a área circundante. A malha da discretização foi suprimida.

Tabela 2: Parâmetros utilizados nos quatro ensaios da simulação 2 para SUPG

Parâmetros do modelo	Valores	Unidades
α	0,1	m^2/h
σ	1.10^{-4}	h^{-1}
V	0.5	km/h
θ	$\pi/4$ (ensaio 1)	radianos
	$3\pi/4$ (ensaio 2)	
	$5\pi/4$ (ensaio 3)	
	$-\pi/4$ (ensaio 4)	
Parâmetros da discretização	Valores	Unidades
Δt	0.00625	h
Δx	0.29069	km
Δy	0.29069	km

4.2.1 Ensaio 1

Nos gráficos do ensaio 1 (fig. 20), o deslocamento devido aos fluxos aéreos corresponde a vento Sudoeste. Ocorre o fluxo naquele sentido, ao mesmo tempo em que a difusão se faz notar, contribuindo na dispersão para regiões de menor concentração.

Na figura 21, percebe-se um rápido aumento da concentração de vapor d'água sobre o nó final, devido ao transporte pelo vento da massa de vapor d'água vinda do lago, enquanto para o nó médio há uma ligeira variação.

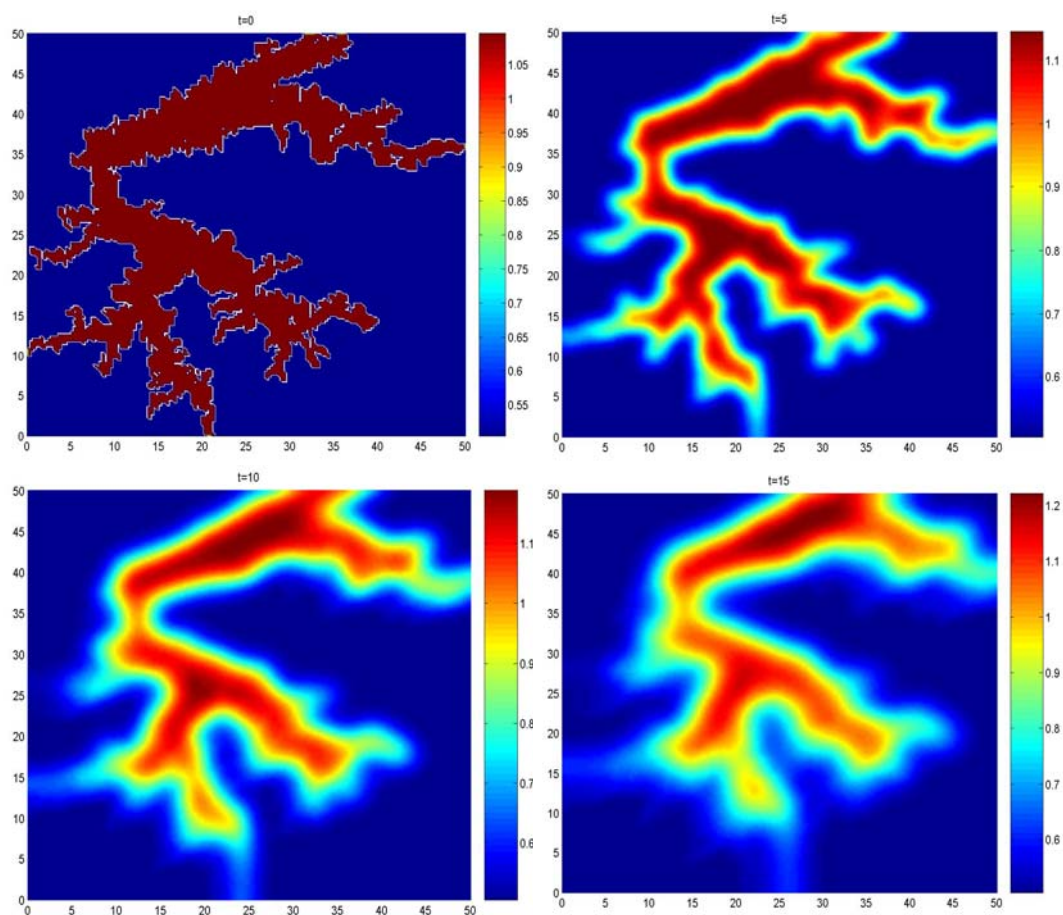


Figura 20: Distribuição da concentração da massa de vapor d'água no domínio em $t = 0$, $t = 5$, $t = 10$ e $t = 15$ horas, para o ensaio 1, n° de Peclet = 1.027.

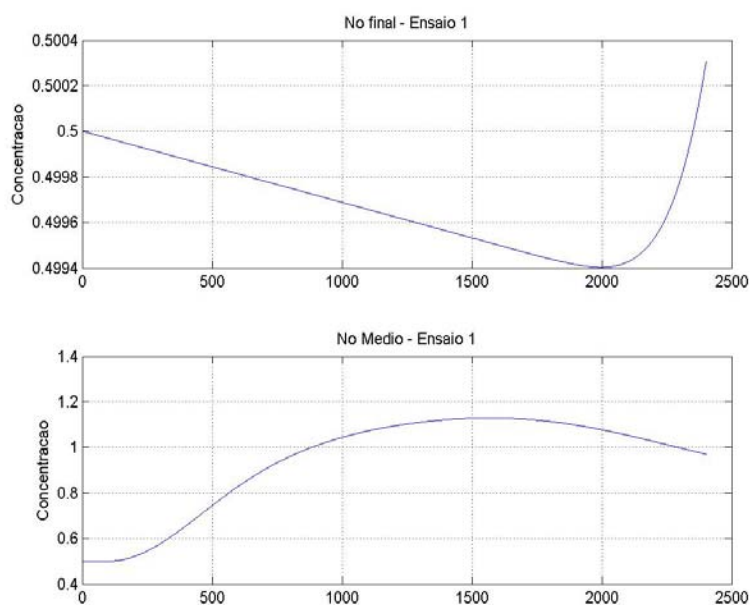


Figura 21: Resultados numéricos do ensaio 1 do processo evolutivo para dois nós da malha.

4.2.2 Ensaio 2

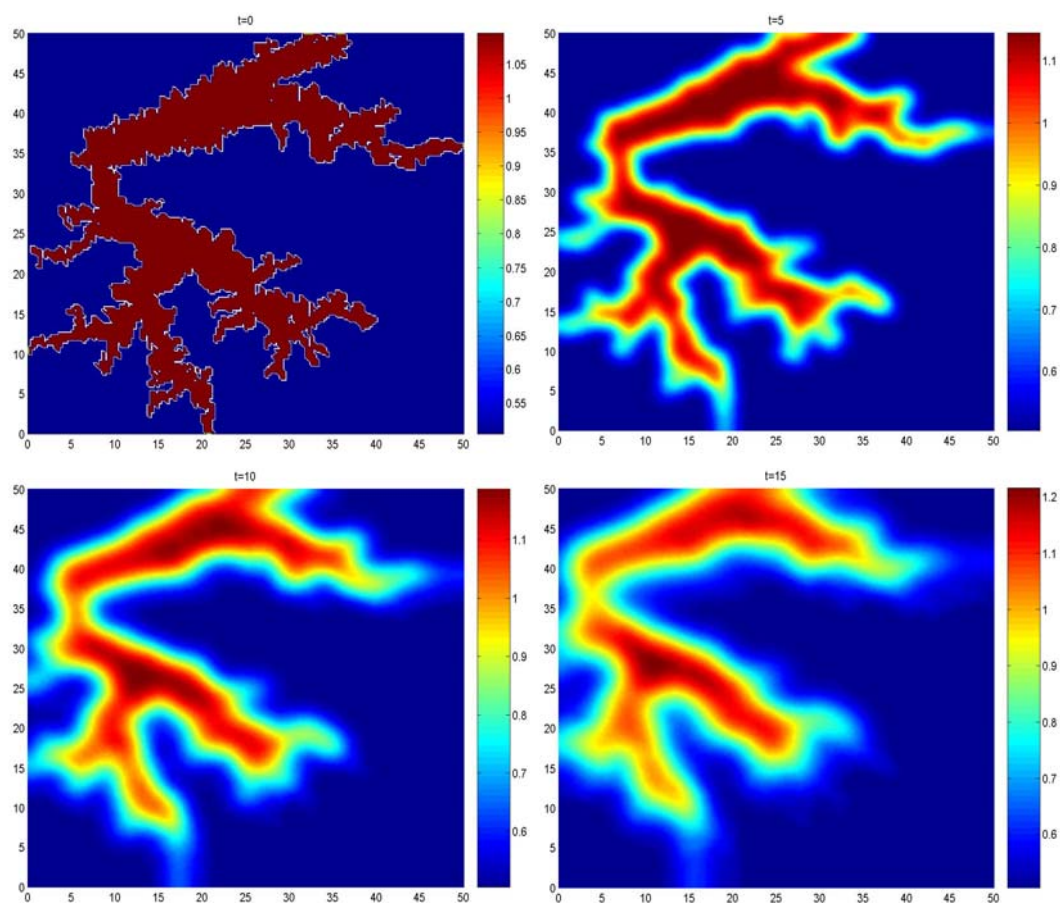


Figura 22: Distribuição da concentração de vapor d'água ao longo do domínio em $t = 0$, $t = 5$, $t = 10$ e $t = 15$ horas, para o ensaio 2, n° de Peclet = 1.027.

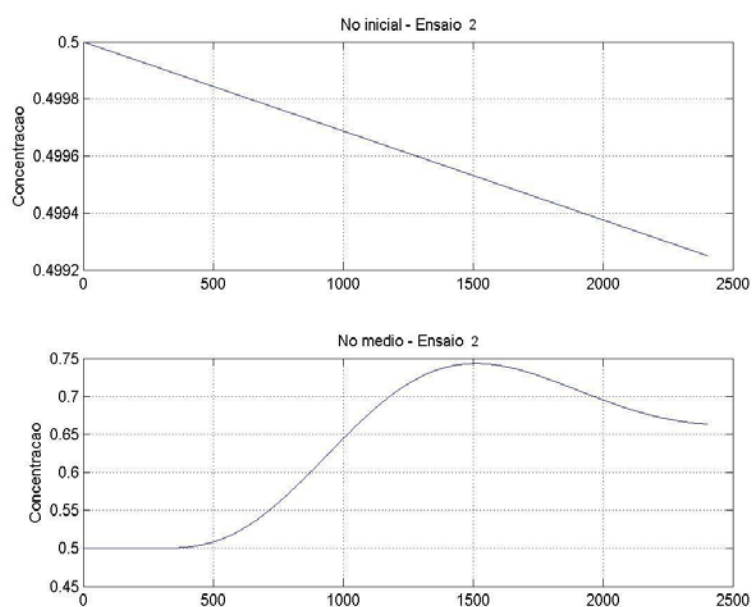


Figura 23: Resultados numéricos do ensaio 2 do processo evolutivo para dois nós da malha.

Nos gráficos do ensaio 2 (fig. 22), o deslocamento da massa de vapor d'água, devido ao termo advectivo, se dá na direção noroeste do domínio. Os pontos de concentração alta diminuem rapidamente, ao mesmo tempo em que ocorre o espalhamento para as regiões situadas entre os braços da represa. Na figura 23, percebe-se o declínio da concentração de vapor d'água no nó inicial (vento desfavorável), enquanto o nó central apresentou ligeiro aumento, estabilizando no final.

4.2.3 Ensaio 3

A figura 24 mostra o deslocamento, devido ao termo advectivo, para fluxos aéreos de nordeste. Ocorre um aumento da concentração neste sentido que podemos perceber através da massa de vapor d'água se movendo nesta direção ao longo do tempo.

A variação da concentração relativamente ao nó final e o nó médio apresenta ligeira variação durante a simulação deste ensaio (fig. 25). Sobre o nó médio a concentração apresenta uma ligeira oscilação nos primeiros instante e sofre um leve decaimento no decorrer do tempo.

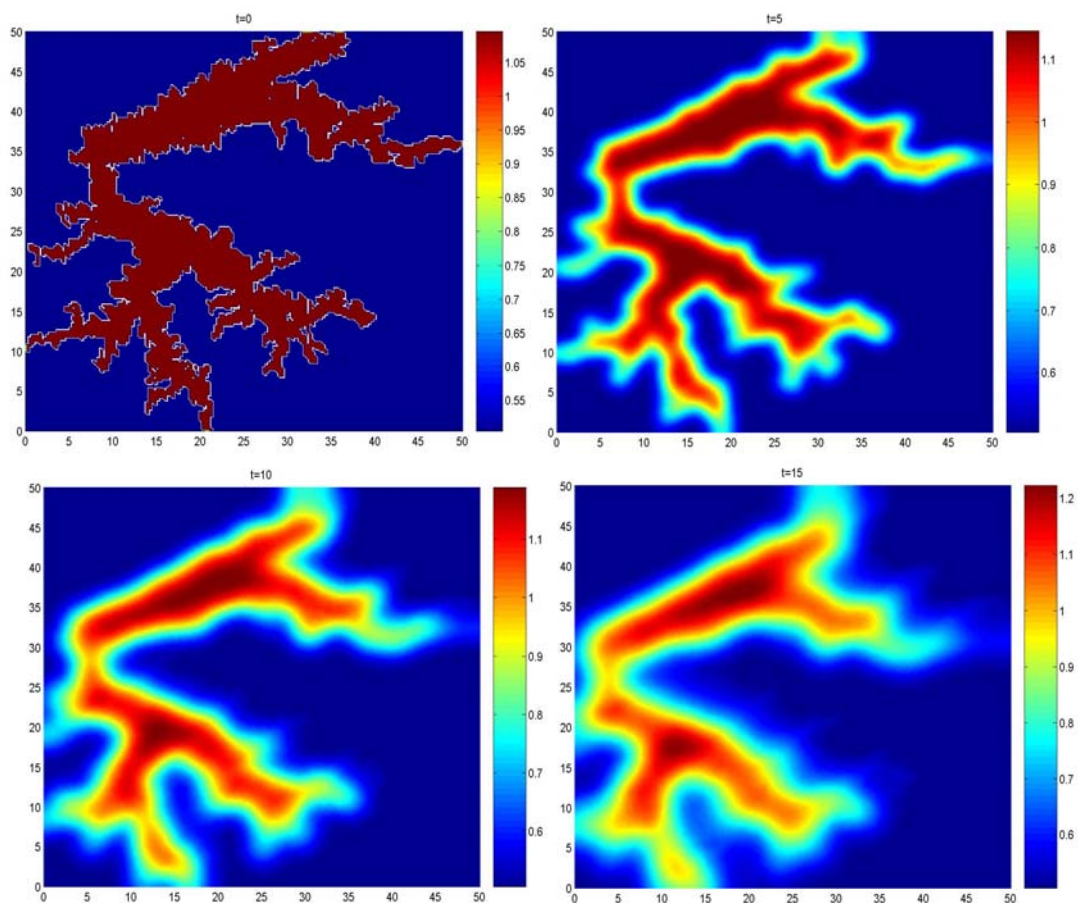


Figura 24: Distribuição da concentração de vapor d'água ao longo do domínio em $t = 0$, $t = 5$, $t = 10$ e $t = 15$ horas, para o ensaio 3, n° de Peclet = 1.027.

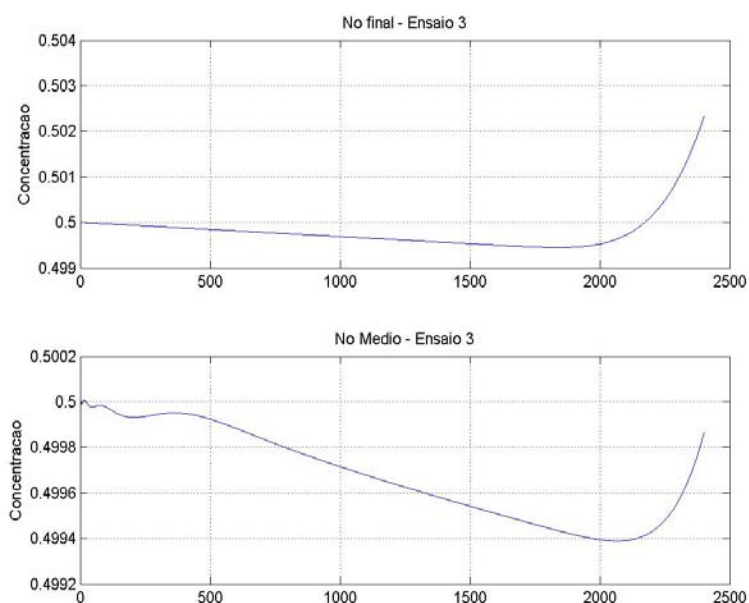


Figura 25: Resultados numéricos do ensaio 3 do processo evolutivo para dois nós da malha.

4.2.4 Ensaio 4

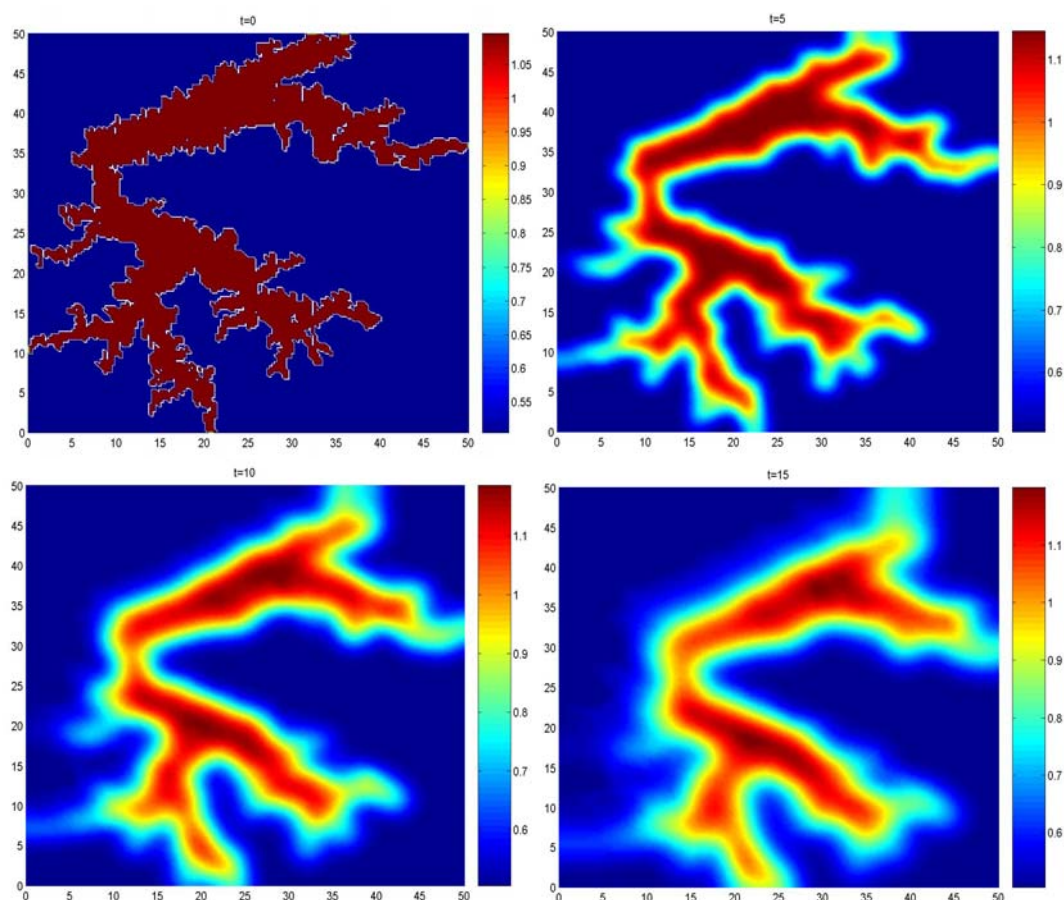


Figura 26: Distribuição da concentração de vapor d'água ao longo do domínio em $t = 0$, $t = 5$, $t = 10$ e $t = 15$ horas para o ensaio 4, n° de Peclet = 1.027.

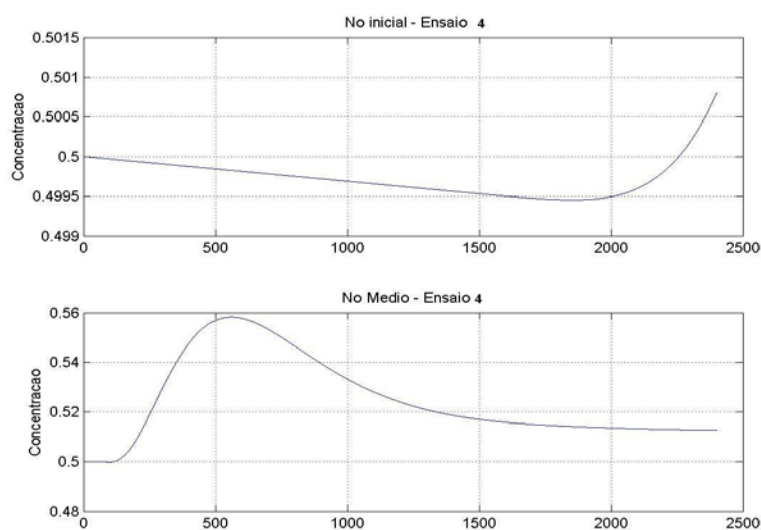


Figura 27: Resultados numéricos do ensaio 4 do processo evolutivo para dois nós da malha.

Na figura 26, a direção do fluxo é devido aos fluxos aéreos predominantes de noroeste. É interessante notar que, neste ensaio, a concentração se mantém mais elevada em um maior número de pontos, sobre o braço inferior do lago, em relação aos gráficos dos ensaios anteriores. Neste caso, a ação do vento move a massa de vapor de um ponto a outro, sem deslocá-lo para fora da área alagada. No ponto intermediário da malha (fig. 27), podemos notar a passagem da massa de vapor que se estabiliza num nível tal qual o inicial.

4.3 DISCUSSÃO

A técnica de upwind apresenta boas características de estabilidade, pois introduz uma abordagem aerodinâmica, o que praticamente elimina o aparecimento de dados espúrios. O uso dessa técnica possibilitou uma maior flexibilidade no manuseio dos parâmetros o que permitiu introduzir valores predominantes do termo advectivo. Nos ensaios apresentados, adotou-se um regime de ventos fracos e constantes. Para estas primeiras aproximações isto é aceitável, pois se considera que os ensaios serviram de teste dos códigos numéricos.

Nos quatro ensaios feitos com a técnica de upwind (figuras 20 a 27), houve uma sensível mudança nos resultados numéricos em relação à técnica anterior. Apesar de adotarmos ventos fracos, o efeito de transporte pelo vento é bastante significativo. As diferentes direções introduzidas para o fluxo advectivo geraram, cada uma, um padrão de dispersão do vapor d'água.

Os fluxos são gerados na direção pretendida e numa dinâmica bastante plausível, tendendo a se deslocar para fora do domínio considerado. Isso leva a crer que a abordagem teórica proposta foi adequada.

A linha da margem natural do lago é bastante irregular (ver, *p.e.*, fig. 20, gráfico ' $t=0$ '). A análise dos gráficos subsequentes, em ambos os ensaios, revela que

esta irregularidade, que é fruto da distribuição dos pontos de evaporação, é suplantada pelo efeito difusivo-advectivo de modo que a linha fica totalmente suavizada. Podemos interpretar este fenômeno, no caso real, como sendo resultante do processo natural da dispersão, de modo que, na região mais próxima do lago, a concentração de vapor d'água é maior.

Isso significa que uma faixa do terreno, próxima ao lago, sofre influência direta da evaporação do lago, tornando-se gradativamente mais úmida. Este resultado é relevante para a avaliação do modelo proposto, pois o resultado numérico obtido reflete um cenário compatível com a realidade.

Relativamente aos nós destacados, nos ensaios apresentados, a variação da concentração calculada se mostrou variável no tempo, onde se pode observar alguma tendência para a estabilidade ou instabilidade. É interessante notar que a concentração sobre o nó final apresentou comportamento similar em três ensaios (2, 3 e 4). A tendência no decorrer da simulação é um leve decaimento da concentração sobre este nó, porém sofre um aumento exponencial ao final.

A concentração sobre o nó médio apresenta um comportamento distinto. Nos ensaios 1, 2, e 4 mostra-se estável no início e aumentando, a semelhança de uma curva logística até alcançar um máximo e decaindo suavemente a partir deste pico. No ensaio 4, o nó médio é instável no início e depois suaviza com um decaimento leve, porém, aumentando exponencialmente ao final. Os demais pontos nodais observados não apresentaram instabilidade na tendência da concentração e por considerarmos que não acrescentariam dados relevantes não foram apresentados.

Consideramos que a variabilidade local da concentração se deve principalmente pela distância do ponto observado em relação à fonte e o sentido do fluxo advectivo em cada caso.

A elaboração do modelo e teste dos códigos numéricos foi concluída com sucesso. É importante ressaltar que as aproximações obtidas permitem uma avaliação preliminar da dispersão superficial do vapor d'água na região próxima à represa do Rio Manso.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A investigação de fluxos superficiais de umidade pela técnica de Elementos Finitos via Galerkin Standard e upwind Petrov-Galerkin é uma contribuição original do trabalho. A aplicação destas técnicas está em plena ascensão e novas propostas técnicas vêm sendo desenvolvidas atualmente.

Consideramos que isto pode revelar uma dificuldade em avaliar o modelo proposto e os resultados alcançados. Esta dificuldade nos motiva a prosseguirmos as investigações que permitam estabelecer critérios de implementação mais rigorosos do ponto de vista da análise numérica, bem como uma abordagem enriquecida com parâmetros experimentais.

A modelagem ambiental com o aporte das ferramentas aplicadas no presente trabalho adquire novas características e possibilidades de abordagem na avaliação de alterações ambientais provocadas pelas atividades decorrentes do uso e mudança do uso do solo. A técnica mostrou-se muito robusta e estudos ambientais poderão ser estabelecidos e trazer avanços significativos no estudo e análise de impactos devidos, *p. e.*, ao desflorestamento amazônico, bem como dos fluxos de matéria e energia nos mais diversos sistemas ambientais.

Este trabalho contribui de forma efetiva para a avaliação dos fluxos superficiais de vapor d'água na região da UHE de Manso, cujas simulações permitem estudar possíveis impactos no micro-clima da região, através da introdução de campos reais de ventos para a região a ser estudada.

Sob esta ótica, vislumbramos algumas possibilidades de abordagens para trabalhos futuros no sentido de aprimorar o programa apresentado:

i) inserção de um mapa de ventos da região, carregado externamente, o que não exige alteração do programa desenvolvido;

ii) inserção de parâmetros experimentais de variáveis climáticas, determinantes no fenômeno da evaporação e difusividade aérea;

iii) investigar o transporte de vapor d'água para as camadas superiores da atmosfera pelo fenômeno da difusão turbulenta, dando assim um tratamento tridimensional ao problema.

A continuidade do trabalho certamente trará uma melhor compreensão dos fenômenos atmosféricos e das características da circulação geral da atmosfera, bem como sua relação com as atuais alterações no clima que poderão ser incorporados ao presente estudo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTACHO, P., *et al.* Aerosol characteristics and sources for the Amazon basin during the wet season. **Journal of Geophysical Research**, Vol. 95, nº D10, pp. 16.971-16.985, 1990.

BASSANESI, R. C.; FERREIRA Jr, W. C. **Equações diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Ed Harbra, 1988.

BOLEA, M.T.E. **Evaluación del Impacto Ambiental**. Madrid: MAPFRE, 1984.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. Título original: Numerical Analysis. Tradutor: Ricardo Lenzi Tombi. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

BORREGO, C.; MIRANDA, A. I. **Matemática e Ambiente: a redescoberta dos fundamentos básicos**. Dep. Eng. Ambiente, Univ. Aveiro. Disponível em <<http://www.mat.uc.pt>> Acesso em 15/01/2005.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. R. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on incompressible Navier-Stokes equation. **Computed Methods in Applied Mechanics and Engineering** 32, pp.199-259. 1982.

CANTÃO, R. F. **Modelagem e Simulação Numérica de Derrames de Óleo no Canal de São Sebastião/ SP**. 1998. Dissertação (Mestrado), IMEC, UNICAMP, Campinas/SP, 1998.

CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite elements: mathematical aspects**. Vol 4. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs. 1983.

CASTRO, S. P. E. **Modelagem matemática e aproximação numérica do estudo de poluentes no ar**. 1993. Dissertação (Mestrado), IMECC, UNICAMP, Campinas/SP, 1993

CHONG, O. A. G.; DINIZ, G. L.; VILLATORO, F. R. Dispersal of fish population in dam: modeling and simulation. **Ecological Modelling**, 186, pp. 290-298, 2005.

CHRISTIE, I., *et al.* Finite elements methods for second order differential equations with significant first derivatives. **International Journal for Numerical Methods in Engineering** 10, pp. 1.389-1.396. 1976

DIAS, N. L. *et al.* Estudo dos Impactos Ambientais sobre o Clima Regional do Reservatório de Itaipú. In: **SEMINÁRIO NACIONAL DE PRODUÇÃO E TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA**. 15. 1999. Fóz do Iguaçu. Disponível em: <<http://www.itaipu.gov.br>>. Acesso em: 20/07/2004.

DINIZ, G. L. **Dispersão de Poluentes num sistema ar-água: modelagem, aproximações**. 2003. Tese (Doutorado), FEEC, Unicamp, Campinas/SP, 2003.

EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. N. York. Random-House, 1998.

FREITAS, S. R. **Modelagem Numérica do Transporte e das Emissões de Gases Traço e Aerossóis de Queimadas no Cerrado e Floresta Tropical da América do Sul**. 1999. Tese (Doutorado). Instituto de Física – Universidade de São Paulo/SP, 1999.

HEIN, N.; BONA, J. **Modelos associados à qualidade do ar**. Universidade Regional de Blumenau – FURB. (*preprint*). 2002.

HEINRICH, J. C., *et al.* An upwind finite elements scheme for two-dimensional convective transport equation. **Int. J. for Numerical Methods in Engineering** 11, pp.131-143. 1977.

HUGHES, T. J. R.; MIZUKAMI, A. A. Petrov–Galerkin finite element method for convection dominated flows: An accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle. **Computer Methods in applied Mechanics and Engineering**, v. 50, pp.181–193, 1985.

IÓRIO JR., R. J.; IÓRIO, V. **Equações diferenciais parciais: uma introdução**. Projeto Euclides, IMPA/CNPq, 1988.

JAMES, D. J. G.; HUNTLEY, I. D. Some aspects of the processes of mathematical models. In: **Mathematical Modelling – a source book of case studies**. London, 1990. pp. 1-17.

JØRGENSEN, P.R.; McKAY, L.D.; SPLIID, N.H. Evaluation of chloride and pesticide transport in a fractured clayey till using large undisturbed columns and numerical modeling. **Water Resources Research** 34, nº. 4: pp.539–553. 1998a.

KREITH, F. **Princípios da transmissão de calor**. Tradução: Eitaro Yamane, Otávio de Mattos Silveiras e Virgílio Rodrigues Lopes de Oliveira. São Paulo: Edgard Blücher, 1977.

LEGEY, L.F.L. **Modelo de Gestão Ambiental da Bacia da Bahía de Sepetipa – MGAS**. Relatório I. Rio de Janeiro, COPPE/SEMA-RJ. 1998.

LIMA, E. B. N. R. **Modelagem Integrada para Gestão da Qualidade da Água na Bacia do Rio Cuiabá**. 2001. Tese (Doutorado) – COPPE/UFRJ, COPPE, Rio de Janeiro, 2001.

LIONS, J. L. **Equations Differentielles Operationelles**. Berlim: Springer, 1961.

LIRA, A. M. **Método dos Elementos Finitos: notas históricas**. Disponível em <<http://www.albatroz.shs.eesc.usp.br>>. Acesso em 28/09/2004.

LONGO, K. M. **Estudos de Partículas de Aerossóis e Gases Traços na Atmosfera da Bacia Amazônica: Influências das Circulações Regionais e de Larga Escala**. 1999. Tese (Doutado), Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 1999.

MARCHUK, G. G. I. **Mathematical Models in Environmental Problems**. New York, Elsevier Science Publishing Company, Inc. 1986.

MARQUES FILHO, *et al.* An Investigation of pollutant dispersion in a highly convective boundary layer using large eddy simulation. **Metereology and Atmospheric Physics**, 2002.

MEYER, J. F. C. A.; DINIZ, G. L. Pollutant dispersion in wetland systems: mathematical modeling and numerical simulation. Submetido à **Ecological Modelling**, 2004.

MISTRO, D. C. **O problema de poluição em rios por mercúrio metálico: modelagem e simulação**. 1992, Dissertação (Mestrado), IMECC – UNICAMP, Campinas/SP, 1992.

MOLION, L. C. B. Um século e meio de aquecimento global. **Revista Ciência Hoje**. Vol 18. Nº 107. pp. 21–29. Março, 1995.

MOREIRA, J. C.; WROBEL L. C. **Um modelo de elementos finitos para análise de dispersão**, relatório interno COPPE-UFRJ/RJ.

MÜLLER, A.C. **Hidrelétricas, Meio Ambiente e Desenvolvimento**. São Paulo: Makron Books. 1995.

MUSSIS, C. R. **Caracterização Climatológica da Bacia do Alto Paraguai**. 1997. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Agronomia/UFMT, Cuiabá/MT, 1997.

NETO, A. P. L; HORITA, C. O. **O estudo do padrão de circulação da Enseada de Balneário Camboriú/SC**. WORKHOP DE TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO APLICADA AO MEIO AMBIENTE. 1. 2003. Itajaí. SC: UNIVALI: CBComp2003.

NOBRE, C. A. Alterações Climáticas Globais e suas implicações para o Brasil. **Revista Brasileira de Energia**. Centro de previsão de tempo e estudos climáticos. CPTEC/INPE. Especial 1. 1992.

ODUM, E. **Ecologia**. Título Original: Basic of Ecology. Tradução: Christopher J. Tribe. Rio de Janeiro: Editora Guanabarra Koogan S.A.: 1988.

OKUBO, A. **Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models**. Berlim: Springer, 1980.

OMETTO, J. **Bioclimatologia Ambiental**. Editora Agronômica Ceres, 1976.

LOBO, M. L. C. **PCBAP - Plano de Conservação da Bacia do Alto Paraguai**. Relatório Técnico. Centro Integrado de Estudos em Geoprocessamento-CIEG. Universidade Federal do Paraná. 1997. Disponível em <<http://www.cieg.ufpr.br/pcbap.cieg.html>>. Acesso em 28/09/2004.

REVORA, S. A. **Manual de Gestion Ambiental para Obras Hidráulicas de Aprovechamiento Energético**. Buenos Aires, Secretaria de Energia da República Argentina. 1987.

SAAD, Y. **Interative Methods for Sparse Linear Systems**. 2^a ed. January 3RD, 2000.

SAPUCCI, L. F. **Estimativa do vapor d'água atmosférico e avaliação da modelagem do atraso zenital troposférico utilizando GPS**. 2001. Dissertação (Mestrado). UNESP, Faculdade de Ciências Tecnologia, Presidente Prudente, 2001.

SANTOS, A. H. P. **Simulação Composicional para Transporte de Hidrocarbonetos em Aquíferos**. 1998. Dissertação (Mestrado). UNICAMP, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, 1998.

SIMMONS, G. F. **Topology and Modern Analysis**. New York: McGraw-Hill, 1963.

SONDOTÉCNICA S. A. **Diagnóstico da Qualidade da Água da Área de Influência do APM Manso/Fase Rio**. Relatório Final, APM-07-0014 RE, Rio de Janeiro – RJ, 2000.

SOUSA, W. L. **Impacto Ambiental de Hidrelétricas: Uma Análise Comparativa de Duas Abordagens**. 2000. Dissertação (Mestrado). COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2000.

WANG, G.; OSTOJA-STARZEWSKI, M. A numerical study of plume dispersion motivated by a mesoscale atmospheric flow over a complex terrain. **Applied Mathematical Modelling** 28, pp. 957–981. 2004. <<http://www.elsevier.com/locate>>. Acesso em 15/01/2005.

APÊNDICE

1 CÓDIGOS PARA MATLAB®

São apresentados os códigos numéricos utilizados na implantação do método numérico escolhido para as aproximações da solução do problema. São apresentados os códigos utilizados para gerar os diferentes ensaios, tanto para a técnica Galerkin Standard e Galerkin com Upwind. É apresentado, também, o código implantado no Mathemática® para o cálculo das integrais dadas pelos produtos internos que aparecem nas equações 3.18 e 3.34.

1.1 CÓDIGOS PARA MATLAB® - GALERKIN STANDARD

O código, a seguir, foi implementado em ambiente Windows xp – no Matlab®, para as simulações da dispersão de vapor d'água em um domínio retangular pela técnica Galerkin Standard.

```
% Aproximação de um sistema linear para simular a dispersao
%      do vapor de água num domínio retangular
%      (Técnica Galerkin Standard - Linear)
%
clear all;
warning off MATLAB:singularMatrix;
t0=clock;
%
%      parametros do modelo
%
a=0.025;           % componente do termo difusivo
sg=0.0001;         % coeficiente de decaimento
```

```

V=0.09;           % velocidade do vento
f=0.01;           % fonte devido evapotranspiração do lago
%
%   parametros do domínio(espaco tempo)
%
xmax=50; ymax=50;
tfinal=2;
%
%   parametros da discretização
%
nx=86;            % no. de subintervalos em x
ny=86;            % no. de subintervalos em y
nnx=nx+1;         % no. de nos na direção x
nny=ny+1;         % no. de nos na direção y
npt=6000;         % no. de passos no tempo
dx=xmax/nx;       % comprimento do subintervalo na direção x
dy=ymax/ny;       % comprimento do subintervalo na direção y
v1=V*cos(pi/4);   % componente horizontal advectiva em x
v2=V*sin(pi/4);   % componente vertical advectiva em y
%
%   parametros auxiliares da discretização
%
dxy=dx*dy;
dxdy=dx/dy;
dydx=dy/dx;
dt=tfinal/npt;
mdt=dt/2;
nn=nnx*nny;       % no. total de nos nao-nulos
ntr=2*nx*ny;      % no. total de triangulos
nty=2*ny;         % no. total de triangulos na direção y
npec=[v1*dx/a;v2*dy/a]
%
%   calculo dos coeficientes das submatrizes
%
cfm = sg*mdt;
cfn = a*mdt;
cfp = v1*mdt;
cfq = v2*mdt;
cff = f*dt;
%
%   submatrizes para calculo da matriz de rigidez
%
%   submatriz M = (Fi_j | Psi_i ) - inferior e superior
%
m_i = [1/12*dx*dy 1/24*dx*dy 1/24*dx*dy;1/24*dx*dy
       1/12*dx*dy 1/24*dx*dy;1/24*dx*dy 1/24*dx*dy
       1/12*dx*dy];
m_s = [1/12*dx*dy 1/24*dx*dy 1/24*dx*dy;1/24*dx*dy
       1/12*dx*dy 1/24*dx*dy; 1/24*dx*dy 1/24*dx*dy
       1/12*dx*dy];
%
%submatriz N = (Nabla Fi_j|Nabla Psi_i )inferior e superior
%
```

```

n_i = [1/2*dx/((1/dx*dx) + (1/dy*dy))*dy -dy/(2*dx) -
        dx/(2*dy);-dy/(2*dx) dy/(2*dx) 0;-dx/(2*dy) 0
        dx/(2*dy)];
n_s = [((dx*dx+dy*dy)/(2*dx*dy)) -dy/(2*dx) -dx/(2*dy);...
        (-dy/(2*dx)) dy/(2*dx) 0;-dx/(2*dy) 0 dx/(2*dy)];
%
% submatriz P =(Del_x Fi_j|Psi_i )inferior e superior
%
p_i = [-dy/6 dy/6 0;-dy/6 dy/6 0;-dy/6 dy/6 0];
p_s = [dy/6 -dy/6 0;dy/6 -dy/6 0;dy/6 -dy/6 0];
%
% submatriz P = (Del_y Fi_j | Psi_i ) - inferior e superior
%
q_i = [-dx/6 0 dx/6;-dx/6 0 dx/6;-dx/6 0 dx/6];
q_s = [dx/6 0 -dx/6;dx/6 0 -dx/6;dx/6 0 -dx/6];
%
%submatriz p/ o termo fonte ( f|Psi_i )-inferior e superior
%
f_i = [dx*dy/6;dx*dy/6;dx*dy/6];
f_s = [dx*dy/6;dx*dy/6;dx*dy/6];
%
% carregando a malha de elementos finitos via arquivo
%
load malha2.m
%
% carregando a malha de coordenadas dos nos via arquivo
%
load coord2.m
%
% condicao inicial
%
c0=.5*ones(nn,1);
for iel=1:1:ntr
    for il=1:3
        ig=malha1(iel,il);
        if coord1(ig,3)==1
            c0(ig) = c0(ig)+0.01;
        end;
    end;
end;
%
% montagem das matrizes do sistema
%
A=sparse([],[],[],nn,nn,nn*7);
B=sparse([],[],[],nn,nn,nn*7);
d=zeros(nn,1);
%
for iel=1:ntr;
    for il=1:3;
        ig=malha1(iel,il);
        for jl=1:3;
            jg=malha1(iel,jl);
            if mod(iel,2)==1

```

```

        A(ig,jg)=A(ig,jg)+(1+cfm)*m_i(il,jl)+
            cfn*n_i(il,jl)+cfp*p_i(il,jl)+
            cfq*q_i(il,jl);
        B(ig,jg)=B(ig,jg)+(1-cfm)*m_i(il,jl)-
            cfn*n_i(il,jl)-cfp*p_i(il,jl)-
            cfq*q_i(il,jl);
    else
        A(ig,jg)=A(ig,jg)+(1+cfm)*m_s(il,jl)+
            cfn*n_s(il,jl)+cfp*p_s(il,jl)+
            cfq*q_s(il,jl);
        B(ig,jg)=B(ig,jg)+(1-cfm)*m_s(il,jl)-
            cfn*n_s(il,jl)-cfp*p_s(il,jl)-
            cfq*q_s(il,jl);
    end;
end;
if mod(iel,2)==1
    if coord1(ig,3)==1
        d(ig)=d(ig)+cff*f_i(il);
    end;
else
    if coord1(ig,3)==1
        d(ig)=d(ig)+cff*f_s(il);
    end;
end;
end;
end;
nosep1(1) = c0(nny*nnx);
nosep2(1) = c0(1);
nosep3(1) = c0((nny*nnx-1)/2);
nosep4(1) = c0(nty);
%
%   fatoraao LU da matriz de rigidez
%
[ll uu] = lu(A);
%
%   abertura da janela para montagem do gráfico
%
fig=figure;
    set(fig,'DoubleBuffer','on');
    set(gca,'xlim',[-80 80],'ylim',[-80 80],...
        'NextPlot','replace','Visible','off')
    mov = avifile('nel_lin_malha1.avi')
%
%mm = max(c0);
trisurf(malha1,coord1(:,1),coord1(:,2),c0),title('Cenario
1'), view(0,90),colorbar,shading interp;
F = getframe(gca);
mov = addframe(mov,F);
%
%   resoluao dos sucessivos sistemas
for it=1:npt
    t=it*dt;
    ys=ll\ (B*c0+d);

```

```

s=uu\ys;
nosep1(it+1) = c0(nnx*nnny);
nosep2(it+1) = c0(1);
nosep3(it+1) = c0((nnny*nnx-1)/2);
nosep4(it+1) = c0(nny);
%
    if mod(it,4)==1
%
%       visualizacao e montagem dos graficos
%
trisurf(malha1,coord1(:,1),coord1(:,2),s),title('Cenario
1'), view(0,90),colorbar,shading interp;
F = getframe(gca);
mov = addframe(mov,F);
    end;
    c0=s;
end;
%
mov = close(mov);
subplot(2,1,2)
plot(nosep1),title('No final - Ensaio 1'),
ylabel('Concentracao'),grid on;
subplot(2,2,1)
plot(nosep2),title('No 01 - Ensaio 1'),
ylabel('Concentracao'),grid on;
subplot(2,2,3)
plot(nosep3),title('No Medio - Ensaio 1'),
ylabel('Concentracao'),grid on;
subplot(2,1,1)
plot(nosep4),title('No na Fronteira - Ensaio 1'),
ylabel('Concentracao'),grid on;
etime(clock,t0)

```

1.2 CÓDIGOS PARA MATLAB® - TÉCNICA UPWIND PETROV/GALERKIN

Os códigos, a seguir, foram implantados em ambiente Windows xp – no Matlab®, para simulação da dispersão do vapor d'água num domínio retangular pela técnica upwind. Os códigos foram utilizados para obter os resultados apresentados no ensaio 2, para composição dos quatro ensaios: vento na direção do 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes.

```

%
% Aproximação de um sistema linear para simular a dispersao
% do vapor de água num domínio retangular
% (vento na direção do 1o quadrante) (técnica upwind)
%
clear all;
warning off MATLAB:singularMatrix;
t0=clock;
%
% parametros do modelo
%
a=0.1; % componente do termo difusivo
sg=0.0001; % coeficiente de decaimento
V=0.5; % velocidade do vento
f=0.01; % fonte devido evapotranspiração do lago
%
% parametros do domínio(espaco tempo)
%
xmax=50; ymax=50;
tfinal=15;
%
% parametros da discretização
%
nx=172; % no. de subintervalos em x
ny=172; % no. de subintervalos em y
nnx=nx+1; % no. de nos na direção x
nny=ny+1; % no. de nos na direção y
npt=2400; % no. de passos no tempo
dx=xmax/nx; % comprimento do subintervalo na direção x
dy=ymax/ny; % comprimento do subintervalo na direção y
v1=V*cos(pi/4); % componente horizontal advectiva em x
v2=V*sin(pi/4); % componente vertical advectiva em y
%
% parametros auxiliares da dicretização
%
dxy=dx*dy;
dxdy=dx/dy;
dydx=dy/dx;
dt=tfinal/npt;
mdt=dt/2;
nn=nnx*nny; % no. total de nos nao-nulos
ntr=2*nx*ny; % no. total de triangulos
nty=2*ny; % no. total de triangulos na direção y
%
% calculo dos Pesos p/ Upwind
%
if v1~=0
    aux1 = 1 - 2*a/abs(v1*dx)
    if aux1>=0
        DELX = aux1;
    else
        DELX = 0;
    end;
end;

```

```

else
    DELX = 0;
end;
if v2~=0
    aux2 = 1 - 2*a/abs(v2*dx)
    if aux2>=0
        DELY = aux2;
    else
        DELY = 0;
    end;
else
    DELY = 0;
end;
%
%      calculo dos coeficientes das submatrizes
%
cfm = sg*mdt;
cfn = a*mdt;
cfp = v1*mdt;
cfq = v2*mdt;
cff = f*dt;
%
%      submatrizes para calculo da matriz de rigidez
%
%      submatriz M = (Fi_j | Psi_i ) - inferior e superior
%
m_i = [-1/60*(-5+4*DELX+4*DELY)*dx*dy -1/120*(-
5+8*DELX+4*DELY)*dx*dy -1/120*(-
5+4*DELX+8*DELY)*dx*dy;...
1/120*(5+8*DELX)*dx*dy 1/60*(5+4*DELX)*dx*dy
1/120*(5+4*DELX)*dx*dy;...
1/120*(5+8*DELY)*dx*dy 1/120*(5+4*DELY)*dx*dy
1/60*(5+4*DELY)*dx*dy];
m_s = [1/60*(5+4*DELX+4*DELY)*dx*dy
1/120*(5+8*DELX+4*DELY)*dx*dy
1/120*(5+4*DELX+8*DELY)*dx*dy;...
1/120*(5-8*DELX)*dx*dy 1/60*(5-4*DELX)*dx*dy
1/120*(5-4*DELX)*dx*dy;1/120*(5-8*DELY)*dx*dy
1/120*(5-4*DELY)*dx*dy 1/60*(5-4*DELY)*dx*dy];
%
%submatriz N =(Nabla Fi_j|Nabla Psi_i )-inferior e superior
%
n_i = [((3-4*DELX)*dx*dx + (3-4*DELY)*dy*dy)/(6*dx*dy) (-
3+4*DELY)*dy/(6*dx) (-3+4*DELX)*dx/(6*dy);...
(2*DELX*dx/(3*dy)-dy/(2*dx)) dy/(2*dx) -
2*DELX*dx/(3*dy); (-dx/(2*dy)+2*DELY*dy/(3*dx)) -
2*DELY*dy/(3*dx) dx/(2*dy)];
%
n_s = [((3+4*DELX)*dx*dx + (3+4*DELY)*dy*dy)/(6*dx*dy) -
(3+4*DELY)*dy/(6*dx) - (3+4*DELX)*dx/(6*dy);
(-2*DELX*dx/(3*dy) -dy/(2*dx)) dy/(2*dx)
2*DELX*dx/(3*dy); (-dx/(2*dy)-2*DELY*dy/(3*dx))
2*DELY*dy/(3*dx) dx/(2*dy)];

```

```

%
% submatriz P = (Del_x Fi_j | Psi_i ) - inferior e superior
%
p_i = [ (-1+DELX+DELY)*dy/6 (1-DELX-DELY)*dy/6 0; (-1-
        DELX)*dy/6 (1+DELX)*dy/6 0; (-1-DELY)*dy/6
        (1+DELY)*dy/6 0];
p_s = [ (1+DELX+DELY)*dy/6 (-1-DELX-DELY)*dy/6 0; (1-
        DELX)*dy/6 (-1+DELX)*dy/6 0; (1-DELY)*dy/6 (-
        1+DELY)*dy/6 0];

%
% submatriz P = (Del_y Fi_j | Psi_i ) - inferior e superior
%
q_i = [ (-1+DELX+DELY)*dx/6 0 (1-DELX-DELY)*dx/6;-
        (1+DELX)*dx/6 0 (1+DELX)*dx/6;- (1+DELY)*dx/6 0
        (1+DELY)*dx/6];
q_s = [ (1+DELX+DELY)*dx/6 0 -(1+DELX+DELY)*dx/6; (1-
        DELX)*dx/6 0 (-1+DELX)*dx/6; (1-DELY)*dx/6 0 (-
        1+DELY)*dx/6];

%
% submatriz p/ o termo fonte ( f | Psi_i ) inferior e superior
%
f_i = [ -(-1+DELX+DELY)*dx*dy/6; (1+DELX)*dx*dy/6;
        (1+DELY)*dx*dy/6];
f_s = [ (1+DELX+DELY)*dx*dy/6; -(-1+DELX)*dx*dy/6;
        -(-1+DELY)*dx*dy/6];

%
% carregando a malha de elementos finitos via arquivo
%
load malha3.m
%
% carregando a malha de coordenadas dos nos via arquivo
%
load coord3.m
%
% condicao inicial
%
c0=.5*ones(nn,1);
for iel=1:1:ntr
    for il=1:3
        ig=malha3(iel,il);
        if coord3(ig,3)==1
            c0(ig) = c0(ig)+0.01;
        end;
    end;
end;

%
% montagem das matrizes do sistema
%
A=sparse([],[],[],nn,nn,nn*7);
B=sparse([],[],[],nn,nn,nn*7);
d=zeros(nn,1);
%
for iel=1:ntr;

```

```

for il=1:3;
    ig=malha3(iel,il);
    for jl=1:3;
        jg=malha3(iel,jl);
        if mod(iel,2)==1
            A(ig,jg)=A(ig,jg)+(1+cfm)*m_i(il,jl)+
                cfn*n_i(il,jl)+cfp*p_i(il,jl)+
                cfq*q_i(il,jl);
            B(ig,jg)=B(ig,jg)+(1-cfm)*m_i(il,jl)-
                cfn*n_i(il,jl)-cfp*p_i(il,jl)-
                cfq*q_i(il,jl);
        else
            A(ig,jg)=A(ig,jg)+(1+cfm)*m_s(il,jl)+
                cfn*n_s(il,jl)+cfp*p_s(il,jl)+
                cfq*q_s(il,jl);
            B(ig,jg)=B(ig,jg)+(1-cfm)*m_s(il,jl)-
                cfn*n_s(il,jl)-cfp*p_s(il,jl)-
                cfq*q_s(il,jl);
        end;
    end;
    if mod(iel,2)==1
        if coord3(ig,3)==1
            d(ig)=d(ig)+cff*f_i(il);
        end;
    else
        if coord3(ig,3)==1
            d(ig)=d(ig)+cff*f_s(il);
        end;
    end;
end;
end;
nosep1(1) = c0(nny*nnx);
nosep2(1) = c0(1);
nosep3(1) = c0((nny*nnx-1)/2);
nosep4(1) = c0(nty);
%
%   fatoraço LU da matriz de rigidez
%
[ll uu] = lu(A);
%
%   abertura da janela para montagem do gráfico
%
fig=figure;
    set(fig,'DoubleBuffer','on');
    set(gca,'xlim',[-80 80],'ylim',[-80 80],...
        'NextPlot','replace','Visible','off')
    mov = avifile('ani_upw1.avi')
%
%mm = max(c0);
trisurf(malha3,coord3(:,1),coord3(:,2),c0),
title('Cenario 1'),view(0,90),colorbar,shading interp;
F = getframe(gca);
mov = addframe(mov,F);

```

```

%
%   resolução dos sucessivos sistemas
for it=1:npt
    t=it*dt;
    ys=ll\ (B*c0+d);
    s=uu\ys;
    nosepl(it+1) = c0(nnx*nny);
    nosep2(it+1) = c0(1);
    nosep3(it+1) = c0((nny*nnx-1)/2);
    nosep4(it+1) = c0(nny);

%
%       visualizacao e montagem dos graficos
%
    if mod(it,4)==1
        %
        %       visualizacao
        %
        trisurf(malha3,coord3(:,1),coord3(:,2),s),
        title('Cenario 1'), view(0,90),colorbar,shading interp;
        F = getframe(gca);
        mov = addframe(mov,F);
        end;
        c0=s;
    end;
    %
    mov = close(mov);
    subplot(2,2,1)
    plot(nosepl),title('No final - Ensaio 1'),
    ylabel('Concentracao'),grid on;
    subplot(2,2,2)
    plot(nosep2),title('No 01 - Ensaio 1'),
    ylabel('Concentracao'),grid on;
    subplot(2,2,3)
    plot(nosep3),title('No Medio - Ensaio 1'),
    ylabel('Concentracao'),grid on;
    subplot(2,2,4)
    plot(nosep4),title('No na Fronteira-Ensaio 1'),
    ylabel('Concentracao'),grid on;
    etime(clock,t0)

```

2 CÓDIGOS PARA MATHEMÁTICA®

Os códigos a seguir foram implantados no Mathemática®, para o cálculo das integrais dadas pelos produtos internos que aparecem nas equações 3.18 e 3.34.

2.1 CÓDIGOS PARA INTEGRAIS – TÉCNICA GALERKIN STANDARD

```

ClearAll;
FUNÇÕES TESTE INFERIORES;
phi1[x_,y_] := 1-x/dx-y/dy;
phi2[x_,y_] := x/dx;
phi3[x_,y_] := y/dy;
FUNÇÕES TESTE SUPERIORES;
psi1[x_,y_] := -1+x/dx+y/dy;
psi2[x_,y_] := 1-x/dx;
psi3[x_,y_] := 1- y/dy;
OPERADOR NABLA;
g[f_] := {∂x f, ∂y f};
CÁLCULO DAS INTEGRAIS
SUBMATRIZ - M - INFERIOR;
MI[1,1]=Simplify[Integrate[phi1[x, y]* phi1[x,
y],{x,0,dx},{y,0,-dy/dx*x + dy}]];
MI[2,1]=Simplify[Integrate[phi1[x, y]* phi2[x,
y],{x,0,dx},{y,0,-dy/dx*x + dy}]];
MI[3,1]=Simplify[Integrate[phi1[x, y]* phi3[x,
y],{x,0,dx},{y,0,-dy/dx*x + dy}]];
MI[1,2]=Simplify[Integrate[phi2[x, y]* phi1[x,
y],{x,0,dx},{y,0,-dy/dx*x + dy}]];
MI[1,3]=Simplify[Integrate[phi3[x, y]* phi1[x,
y],{x,0,dx},{y,0,-dy/dx*x + dy}]];
MI[2,2]=Simplify[Integrate[phi2[x, y]* phi2[x,
y],{x,0,dx},{y,0,-dy/dx*x + dy}]];
MI[2,3]=Simplify[Integrate[phi2[x, y]* phi3[x,
y],{x,0,dx},{y,0,-dy/dx*x + dy}]];
MI[3,1]=Simplify[Integrate[phi1[x, y]* phi3[x,
y],{x,0,dx},{y,0,-dy/dx*x + dy}]];
MI[3,2]=Simplify[Integrate[phi2[x, y]* phi3[x,
y],{x,0,dx},{y,0,-dy/dx*x + dy}]];
MI[3,3]=Simplify[Integrate[phi3[x, y]* phi3[x,
y],{x,0,dx},{y,0,-dy/dx*x + dy}]];
SUBMATRIZ - M - SUPERIOR;
MS[1,1]=Simplify[Integrate[psi1[x, y]* psi1[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];

```

```

MS[2,1]=Simplify[Integrate[φs1[x,y]* φs2[x,y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];
MS[3,1]=Simplify[Integrate[φs1[x, y]* φs3[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];
MS[1,2]=Simplify[Integrate[φs2[x, y]* φs1[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];
MS[1,3]=Simplify[Integrate[φs3[x, y]* φs1[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];
MS[2,2]=Simplify[Integrate[φs2[x, y]* φs2[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy }]];
MS[2,3]=Simplify[Integrate[φs3[x, y]* φs2[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy }]];
MS[3,1]=Simplify[Integrate[φs1[x, y]* φs3[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];
MS[3,2]=Simplify[Integrate[φs2[x, y]* φs3[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy }]];
MS[3,3]=Simplify[Integrate[φs3[x, y]* φs3[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];
SUBMATRIZ N - INFERIOR;
NI[1,1]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_0^{-dy/dx*x+dy} g[\phi1[x,y].g[\phi1[x,y]]dydx \right];$ 
NI[2,1]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_0^{-dy/dx*x+dy} g[\phi1[x,y].g[\phi2[x,y]]dydx \right];$ 
NI[3,1]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_0^{-dy/dx*x+dy} g[\phi1[x,y].g[\phi3[x,y]]dydx \right];$ 
NI[1,2]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_0^{-dy/dx*x+dy} g[\phi2[x,y].g[\phi1[x,y]]dydx \right];$ 
NI[1,3]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_0^{-dy/dx*x+dy} g[\phi3[x,y].g[\phi1[x,y]]dydx \right];$ 
NI[2,2]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_0^{-dy/dx*x+dy} g[\phi2[x,y].g[\phi2[x,y]]dydx \right];$ 
NI[2,3]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_0^{-dy/dx*x+dy} g[\phi3[x,y].g[\phi2[x,y]]dydx \right];$ 
NI[3,2]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_0^{-dy/dx*x+dy} g[\phi2[x,y].g[\phi3[x,y]]dydx \right];$ 
NI[3,3]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_0^{-dy/dx*x+dy} g[\phi3[x,y].g[\phi3[x,y]]dydx \right];$ 
SUBMATRIZ - N - SUPERIOR;
NS[1,1]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_{-dy/dx*x+dy}^{dy} g[\phi1[x,y].g[\phi1[x,y]]dydx \right];$ 
NS[2,1]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_{-dy/dx*x+dy}^{dy} g[\phi1[x,y].g[\phi2[x,y]]dydx \right];$ 
NS[3,1]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_{-dy/dx*x+dy}^{dy} g[\phi1[x,y].g[\phi3[x,y]]dydx \right];$ 
NS[1,2]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_{-dy/dx*x+dy}^{dy} g[\phi2[x,y].g[\phi1[x,y]]dydx \right];$ 
NS[1,3]= Simplify  $\left[ \int_0^x \int_{-dy/dx*x+dy}^{dy} g[\phi3[x,y].g[\phi1[x,y]]dydx \right];$ 

```

$$\begin{aligned}
\text{NS}[2, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx}^{dy/dx} g[\varphi s2[x, y]] g[\varphi s2[x, y]] dy dx \right]; \\
\text{NS}[2, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx}^{dy/dx} g[\varphi s3[x, y]] g[\varphi s2[x, y]] dy dx \right]; \\
\text{NS}[3, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx}^{dy/dx} g[\varphi s3[x, y]] g[\varphi s2[x, y]] dy dx \right]; \\
\text{NS}[3, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx}^{dy/dx} g[\varphi s3[x, y]] g[\varphi s3[x, y]] dy dx \right]; \\
\text{SUBMATRIZ} &- \text{P} - \text{INFERIOR}; \\
\text{PI}[1, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx} \partial_x (\varphi i1[x, y]) * \varphi i1[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PI}[1, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx} \partial_x (\varphi i2[x, y]) * \varphi i1[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PI}[1, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx} \partial_x (\varphi i3[x, y]) * \varphi i1[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PI}[2, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx} \partial_x (\varphi i1[x, y]) * \varphi i2[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PI}[2, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx} \partial_x (\varphi i2[x, y]) * \varphi i2[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PI}[2, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx} \partial_x (\varphi i3[x, y]) * \varphi i2[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PI}[3, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx} \partial_x (\varphi i1[x, y]) * \varphi i3[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PI}[3, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx} \partial_x (\varphi i2[x, y]) * \varphi i3[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PI}[3, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx} \partial_x (\varphi i3[x, y]) * \varphi i3[x, y] dy dx \right]; \\
\text{SUBMATRIZ} &- \text{P} - \text{SUPERIOR}; \\
\text{PS}[1, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx}^{dy/dx} \partial_x (\varphi s1[x, y]) * \varphi s1[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PS}[1, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx}^{dy/dx} \partial_x (\varphi s2[x, y]) * \varphi s1[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PS}[1, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx}^{dy/dx} \partial_x (\varphi s3[x, y]) * \varphi s1[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PS}[2, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx}^{dy/dx} \partial_x (\varphi s1[x, y]) * \varphi s2[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PS}[2, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx}^{dy/dx} \partial_x (\varphi s2[x, y]) * \varphi s2[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PS}[2, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx}^{dy/dx} \partial_x (\varphi s3[x, y]) * \varphi s2[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PS}[3, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx}^{dy/dx} \partial_x (\varphi s1[x, y]) * \varphi s3[x, y] dy dx \right]; \\
\text{PS}[3, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx}^{dy/dx} \partial_x (\varphi s2[x, y]) * \varphi s3[x, y] dy dx \right];
\end{aligned}$$

$$PS[3,3] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_x (\varphi s3[x,y]) * \varphi s3[x,y] dy dx \right];$$

SUBMATRIZ - Q - INFERIOR;

$$QI[1,1] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx \cdot x + dy} \partial_y (\varphi i1[x,y]) * \varphi i1[x,y] dy dx \right];$$

$$QI[1,2] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx \cdot x + dy} \partial_y (\varphi i2[x,y]) * \varphi i1[x,y] dy dx \right];$$

$$QI[1,3] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx \cdot x + dy} \partial_y (\varphi i3[x,y]) * \varphi i1[x,y] dy dx \right];$$

$$QI[2,1] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx \cdot x + dy} \partial_y (\varphi i1[x,y]) * \varphi i2[x,y] dy dx \right];$$

$$QI[2,2] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx \cdot x + dy} \partial_y (\varphi i2[x,y]) * \varphi i2[x,y] dy dx \right];$$

$$QI[2,3] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx \cdot x + dy} \partial_y (\varphi i3[x,y]) * \varphi i2[x,y] dy dx \right];$$

$$QI[3,1] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx \cdot x + dy} \partial_y (\varphi i3[x,y]) * \varphi i1[x,y] dy dx \right];$$

$$QI[3,2] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx \cdot x + dy} \partial_y (\varphi i2[x,y]) * \varphi i3[x,y] dy dx \right];$$

$$QI[3,3] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx \cdot x + dy} \partial_y (\varphi i3[x,y]) * \varphi i3[x,y] dy dx \right];$$

SUBMATRIZ - Q - SUPERIOR;

$$QS[1,1] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s1[x,y]) * \varphi s1[x,y] dy dx \right];$$

$$QS[1,2] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s2[x,y]) * \varphi s1[x,y] dy dx \right];$$

$$QS[1,3] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s3[x,y]) * \varphi s1[x,y] dy dx \right];$$

$$QS[2,1] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s1[x,y]) * \varphi s2[x,y] dy dx \right];$$

$$QS[2,2] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s2[x,y]) * \varphi s2[x,y] dy dx \right];$$

$$QS[2,3] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s3[x,y]) * \varphi s2[x,y] dy dx \right];$$

$$QS[3,1] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s1[x,y]) * \varphi s3[x,y] dy dx \right];$$

$$QS[3,2] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s2[x,y]) * \varphi s3[x,y] dy dx \right];$$

$$QS[3,3] = \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s3[x,y]) * \varphi s3[x,y] dy dx \right];$$

INTEGRAL - FONTE - INFERIOR;

FNI[1]=Simplify[Integrate[phi1[x, y], {x,0,dx},{y,0,-dy/dx*x + dy}]];

FNI[2]=Simplify[Integrate[phi2[x, y], {x,0,dx},{y,0,-dy/dx*x + dy}]];

FNI[3]=Simplify[Integrate[phi3[x, y], {x,0,dx},{y,0,-dy/dx*x + dy}]];

FNS[1]=Simplify[Integrate[phi1[x, y], {x,0,dx},{y,-dy/dx*x+dy, dy}]];

FNS[2]=Simplify[Integrate[phi2[x, y], {x,0,dx},{y,-dy/dx*x+dy, dy}]];

```

FNS[3]=Simplify[Integrate[φs3[x, y],{x,0,dx},{y,-dy/dx*x+dy, dy}]];
MONTAGEM DAS SUBMATRIZES;
AMi={ {MI[1,1],MI[1,2],MI[1,3]}, {MI[2,1],MI[2,2],MI[2,3]},
      {MI[3,1],MI[3,2],MI[3,3]} }
AMs={ {MS[1,1],MS[1,2],MS[1,3]}, {MS[2,1],MS[2,2],MS[2,3]},
      {MS[3,1],MS[3,2],MS[3,3]} }
ANi={ {NI[1,1],NI[1,2],NI[1,3]}, {NI[2,1],NI[2,2],NI[2,3]},
      {NI[3,1],NI[3,2],NI[3,3]} }
ANs={ {NS[1,1],NS[1,2],NS[1,3]}, {NS[2,1],NS[2,2],NS[2,3]},
      {NS[3,1],NS[3,2],NS[3,3]} }
APi={ {PI[1,1],PI[1,2],PI[1,3]}, {PI[2,1],PI[2,2],PI[2,3]},
      {PI[3,1],PI[3,2],PI[3,3]} }
APs={ {PS[1,1],PS[1,2],PS[1,3]}, {PS[2,1],PS[2,2],PS[2,3]},
      {PS[3,1],PS[3,2],PS[3,3]} }
AQi={ {QI[1,1],QI[1,2],QI[1,3]}, {QI[2,1],QI[2,2],QI[2,3]},
      {QI[3,1],QI[3,2],QI[3,3]} }
AQs={ {QS[1,1],QS[1,2],QS[1,3]}, {QS[2,1],QS[2,2],QS[2,3]},
      {QS[3,1],QS[3,2],QS[3,3]} }
AFi={FNI[1], FNI[2],FNI[3]}
AFs={FNS[1], FNS[2],FNS[3]}

```

2.2 CÓDIGOS PARA MATHEMATICA® - INTEGRAIS PARA TÉCNICA UPWIND

```

ClearAll;
FUNÇÕES BASE INFERIORES;
φi1[x_,y_]:= 1-x/dx-y/dy;
φi2[x_,y_]:= x/dx;
φi3[x_,y_]:= y/dy;
FUNÇÕES PESO INFERIORES;
fi1[x_,y_]:= -4*DELX*x/dx(1-x/dx-y/dy)-4*DELY*y/dy(1-x/dx-y/dy)
fi2[x_,y_]:= 4*DELX*x/dx(1-x/dx-y/dy);
fi3[x_,y_]:= 4*DELY*y/dy(1-x/dx-y/dy);
FUNÇÕES TESTE INFERIORES;
ψi1[x_,y_]= φi1[x, y]+ fi1[x, y];
ψi2[x_,y_]= φi2[x, y]+ fi2[x, y];
ψi3[x_,y_]= φi3[x, y]+ fi3[x, y];
FUNÇÕES BASE SUPERIORES;
φs1[x_,y_]:= -1+x/dx+y/dy;
φs2[x_,y_]:= 1-x/dx;
φs3[x_,y_]:= 1- y/dy;
FUNÇÕES PESO SUPERIORES;
fs1[x_,y_]:= -4*DELX*(1-x/dx)(1-x/dx-y/dy)-4*DELY*(1-y/dy)(1-
x/dx-y/dy);
fs2[x_,y_]:= 4*DELX*(1-x/dx)(1-x/dx-y/dy);
fs3[x_,y_]:= 4*DELY*(1-y/dy)(1-x/dx-y/dy);
FUNÇÕES TESTE SUPERIORES;
ψs1[x_,y_]= φs1[x, y]+ fs1[x, y];
ψs2[x_,y_]= φs2[x, y]+ fs2[x, y];
ψs3[x_,y_]= φs3[x, y]+ fs3[x, y];

```

```

OPERADOR NABLA;
g[f_]:= {∂x f, ∂y f};
CÁLCULO DAS INTEGRAIS;
SUBMATRIZ - M - INFERIOR;
MI[1,1]=Simplify[Integrate[φi1[x, y]*ψi1[x, y],{x,0,dx},{y,0,-
dy/dx*x + dy}]];
MI[2,1]=Simplify[Integrate[φi1[x, y]*ψi2[x, y],{x,0,dx},{y,0,-
dy/dx*x + dy}]];
MI[3,1]=Simplify[Integrate[φi1[x, y]*ψi3[x, y],{x,0,dx},{y,0,-
dy/dx*x + dy}]];
MI[1,2]=Simplify[Integrate[φi2[x, y]*ψi1[x, y],{x,0,dx},{y,0,-
dy/dx*x + dy}]];
MI[1,3]=Simplify[Integrate[φi3[x, y]*ψi1[x, y],{x,0,dx},{y,0,-
dy/dx*x + dy}]];
MI[2,2]=Simplify[Integrate[φi2[x, y]*ψi2[x, y],{x,0,dx},{y,0,-
dy/dx*x + dy}]];
MI[2,3]=Simplify[Integrate[φi2[x, y]*ψi3[x, y],{x,0,dx},{y,0,-
dy/dx*x + dy}]];
MI[3,1]=Simplify[Integrate[φi1[x, y]*ψi3[x, y],{x,0,dx},{y,0,-
dy/dx*x + dy}]];
MI[3,2]=Simplify[Integrate[φi2[x, y]*ψi3[x, y],{x,0,dx},{y,0,-
dy/dx*x + dy}]];
MI[3,3]=Simplify[Integrate[φi3[x, y]*ψi3[x, y],{x,0,dx},{y,0,-
dy/dx*x + dy}]];
SUBMATRIZ - M - SUPERIOR;
MS[1,1]=Simplify[Integrate[φs1[x, y]*ψs1[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];
MS[2,1]=Simplify[Integrate[φs1[x, y]*ψs2[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];
MS[3,1]=Simplify[Integrate[φs1[x, y]*ψs3[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];
MS[1,2]=Simplify[Integrate[φs2[x, y]*ψs1[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];
MS[1,3]=Simplify[Integrate[φs3[x, y]*ψs1[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];
MS[2,2]=Simplify[Integrate[φs2[x, y]*ψs2[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy }]];
MS[2,3]=Simplify[Integrate[φs3[x, y]*ψs2[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy }]];
MS[3,1]=Simplify[Integrate[φs1[x, y]*ψs3[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];
MS[3,2]=Simplify[Integrate[φs2[x, y]*ψs3[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy }]];
MS[3,3]=Simplify[Integrate[φs3[x, y]*ψs3[x, y],{x,0,dx},{y, -
dy/dx*x + dy, dy}]];
SUBMATRIZ N - INFERIOR;
NI[1,1]= Simplify $\left[ \int_0^{dx} \int_0^{-dy/dx*x+dy} g[\phi i1[x,y]].g[\psi i1[x,y]]dydx \right];$ 
NI[2,1]= Simplify $\left[ \int_0^{dx} \int_0^{-dy/dx*x+dy} g[\phi i1[x,y]].g[\psi i2[x,y]]dydx \right];$ 
NI[3,1]= Simplify $\left[ \int_0^{dx} \int_0^{-dy/dx*x+dy} g[\phi i1[x,y]].g[\psi i3[x,y]]dydx \right];$ 

```

$$\begin{aligned}
NI[1, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} g[\phi i 2[x, y]].g[\psi i 1[x, y]] dy dx \right]; \\
NI[1, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} g[\phi i 3[x, y]].g[\psi i 1[x, y]] dy dx \right]; \\
NI[2, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} g[\phi i 2[x, y]].g[\psi i 2[x, y]] dy dx \right]; \\
NI[2, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} g[\phi i 3[x, y]].g[\psi i 2[x, y]] dy dx \right]; \\
NI[3, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} g[\phi i 2[x, y]].g[\psi i 3[x, y]] dy dx \right]; \\
NI[3, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} g[\phi i 3[x, y]].g[\psi i 3[x, y]] dy dx \right]; \\
\text{SUBMATRIZ} &= \text{N} - \text{SUPERIOR}; \\
NS[1, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} g[\phi s 1[x, y]].g[\psi s 1[x, y]] dy dx \right]; \\
NS[2, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} g[\phi s 1[x, y]].g[\psi s 2[x, y]] dy dx \right]; \\
NS[3, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} g[\phi s 1[x, y]].g[\psi s 3[x, y]] dy dx \right]; \\
NS[1, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} g[\phi s 2[x, y]].g[\psi s 1[x, y]] dy dx \right]; \\
NS[1, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} g[\phi s 3[x, y]].g[\psi s 1[x, y]] dy dx \right]; \\
NS[2, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} g[\phi s 2[x, y]].g[\psi s 2[x, y]] dy dx \right]; \\
NS[2, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} g[\phi s 3[x, y]].g[\psi s 2[x, y]] dy dx \right]; \\
NS[3, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} g[\phi s 3[x, y]].g[\psi s 2[x, y]] dy dx \right]; \\
NS[3, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} g[\phi s 3[x, y]].g[\psi s 3[x, y]] dy dx \right]; \\
\text{SUBMATRIZ} &= \text{P} - \text{INFERIOR}; \\
PI[1, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_x (\phi i 1[x, y]) * \psi i 1[x, y] dy dx \right]; \\
PI[1, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_x (\phi i 2[x, y]) * \psi i 1[x, y] dy dx \right]; \\
PI[1, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_x (\phi i 3[x, y]) * \psi i 1[x, y] dy dx \right]; \\
PI[2, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_x (\phi i 1[x, y]) * \psi i 2[x, y] dy dx \right]; \\
PI[2, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_x (\phi i 2[x, y]) * \psi i 2[x, y] dy dx \right]; \\
PI[2, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_x (\phi i 3[x, y]) * \psi i 2[x, y] dy dx \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PI[3, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_x (\phi i1[x, y]) * \psi i3[x, y] dy dx \right]; \\
PI[3, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_x (\phi i2[x, y]) * \psi i3[x, y] dy dx \right]; \\
PI[3, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_x (\phi i3[x, y]) * \psi i3[x, y] dy dx \right]; \\
\text{SUBMATRIZ} &- \text{P} - \text{SUPERIOR}; \\
PS[1, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} \partial_x (\phi s1[x, y]) * \psi s1[x, y] dy dx \right]; \\
PS[1, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} \partial_x (\phi s2[x, y]) * \psi s1[x, y] dy dx \right]; \\
PS[1, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} \partial_x (\phi s3[x, y]) * \psi s1[x, y] dy dx \right]; \\
PS[2, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} \partial_x (\phi s1[x, y]) * \psi s2[x, y] dy dx \right]; \\
PS[2, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} \partial_x (\phi s2[x, y]) * \psi s2[x, y] dy dx \right]; \\
PS[2, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} \partial_x (\phi s3[x, y]) * \psi s2[x, y] dy dx \right]; \\
PS[3, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} \partial_x (\phi s1[x, y]) * \psi s3[x, y] dy dx \right]; \\
PS[3, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} \partial_x (\phi s2[x, y]) * \psi s3[x, y] dy dx \right]; \\
PS[3, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx * x + dy}^{dy} \partial_x (\phi s3[x, y]) * \psi s3[x, y] dy dx \right]; \\
\text{SUBMATRIZ} &- \text{Q} - \text{INFERIOR}; \\
QI[1, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_y (\phi i1[x, y]) * \psi i1[x, y] dy dx \right]; \\
QI[1, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_y (\phi i2[x, y]) * \psi i1[x, y] dy dx \right]; \\
QI[1, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_y (\phi i3[x, y]) * \psi i1[x, y] dy dx \right]; \\
QI[2, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_y (\phi i1[x, y]) * \psi i2[x, y] dy dx \right]; \\
QI[2, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_y (\phi i2[x, y]) * \psi i2[x, y] dy dx \right]; \\
QI[2, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_y (\phi i3[x, y]) * \psi i2[x, y] dy dx \right]; \\
QI[3, 1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_y (\phi i3[x, y]) * \psi i1[x, y] dy dx \right]; \\
QI[3, 2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_y (\phi i2[x, y]) * \psi i3[x, y] dy dx \right]; \\
QI[3, 3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_0^{-dy/dx * x + dy} \partial_y (\phi i3[x, y]) * \psi i3[x, y] dy dx \right]; \\
\text{SUBMATRIZ} &- \text{Q} - \text{SUPERIOR};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
QS[1,1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s1[x,y]) * \psi s1[x,y] dy dx \right]; \\
QS[1,2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s2[x,y]) * \psi s1[x,y] dy dx \right]; \\
QS[1,3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s3[x,y]) * \psi s1[x,y] dy dx \right]; \\
QS[2,1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s1[x,y]) * \psi s2[x,y] dy dx \right]; \\
QS[2,2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s2[x,y]) * \psi s2[x,y] dy dx \right]; \\
QS[2,3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s3[x,y]) * \psi s2[x,y] dy dx \right]; \\
QS[3,1] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s1[x,y]) * \psi s3[x,y] dy dx \right]; \\
QS[3,2] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s2[x,y]) * \psi s3[x,y] dy dx \right]; \\
QS[3,3] &= \text{Simplify} \left[\int_0^x \int_{-dy/dx \cdot x + dy}^{dy} \partial_y (\varphi s3[x,y]) * \psi s3[x,y] dy dx \right];
\end{aligned}$$

INTEGRAL - FONTE - INFERIOR;

FNI[1]=Simplify[Integrate[ψi1[x, y], {x, 0, dx}, {y, 0, -dy/dx*x + dy}]];

FNI[2]=Simplify[Integrate[ψi2[x, y], {x, 0, dx}, {y, 0, -dy/dx*x + dy}]];

FNI[3]=Simplify[Integrate[ψi3[x, y], {x, 0, dx}, {y, 0, -dy/dx*x + dy}]];

FNS[1]=Simplify[Integrate[ψs1[x, y], {x, 0, dx}, {y, -dy/dx*x+dy, dy}]];

FNS[2]=Simplify[Integrate[ψs2[x, y], {x, 0, dx}, {y, -dy/dx*x+dy, dy}]];

FNS[3]=Simplify[Integrate[ψs3[x, y], {x, 0, dx}, {y, -dy/dx*x+dy, dy}]];

MONTAGEM DAS SUBMATRIZES;

AMi={ {MI[1,1],MI[1,2],MI[1,3]}, {MI[2,1],MI[2,2],MI[2,3]},
{MI[3,1],MI[3,2],MI[3,3]} }

AMs={ {MS[1,1],MS[1,2],MS[1,3]}, {MS[2,1],MS[2,2],MS[2,3]},
{MS[3,1],MS[3,2],MS[3,3]} }

ANi={ {NI[1,1],NI[1,2],NI[1,3]}, {NI[2,1],NI[2,2],NI[2,3]},
{NI[3,1],NI[3,2],NI[3,3]} }

ANs={ {NS[1,1],NS[1,2],NS[1,3]}, {NS[2,1],NS[2,2],NS[2,3]},
{NS[3,1],NS[3,2],NS[3,3]} }

APi={ {PI[1,1],PI[1,2],PI[1,3]}, {PI[2,1],PI[2,2],PI[2,3]},
{PI[3,1],PI[3,2],PI[3,3]} }

APs={ {PS[1,1],PS[1,2],PS[1,3]}, {PS[2,1],PS[2,2],PS[2,3]},
{PS[3,1],PS[3,2],PS[3,3]} }

AQi={ {QI[1,1],QI[1,2],QI[1,3]}, {QI[2,1],QI[2,2],QI[2,3]},
{QI[3,1],QI[3,2],QI[3,3]} }

AQs={ {QS[1,1],QS[1,2],QS[1,3]}, {QS[2,1],QS[2,2],QS[2,3]},
{QS[3,1],QS[3,2],QS[3,3]} }

AFi={FNI[1], FNI[2],FNI[3]}

AFs={FNS[1], FNS[2],FNS[3]}